РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЯ 25

Допускаются иные способы решения и формы записи, не искажающие его смысла.

Вариант 1

25 Пусть EH — перпендикуляр к прямой CD. Так как $AD \parallel BC$, то $AB \perp AD$. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу: $\angle BEC = \angle EDC$ и $\angle AED = \angle ECD$.

Прямоугольные треугольники EBC и DHE подобны, так как $\angle BEC = \angle HDE$. Поэтому $\frac{BC}{EH} = \frac{EC}{DE}$. Прямоугольные треугольники EAD и CHE подобны, так как $\angle AED = \angle HCE$. Поэтому $\frac{AD}{EH} = \frac{DE}{EC}$.

Перемножив эти равенства, получаем $\frac{AD \cdot BC}{EH^2} = 1$, откуда $EH = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{45 \cdot 20} = 30$.

Ответ: 30.

Вариант 2

25 Пусть EH — перпендикуляр к прямой CD. Так как $AD \parallel BC$, то $AB \perp AD$. Угол между касательной и хордой равен вписанному углу, опирающемуся на ту же дугу: $\angle BEC = \angle EDC$ и $\angle AED = \angle ECD$.

Прямоугольные треугольники EBC и DHE подобны, так как $\angle BEC = \angle HDE$. Поэтому $\frac{BC}{EH} = \frac{EC}{DE}$. Прямоугольные треугольники EAD и CHE подобны, так как $\angle AED = \angle HCE$. Поэтому $\frac{AD}{EH} = \frac{DE}{EC}$.

Перемножив эти равенства, получаем $\frac{AD \cdot BC}{EH^2} = 1$, откуда $EH = \sqrt{AD \cdot BC} = \sqrt{27 \cdot 12} = 18$.

Ответ: 18.

Вариант 3

25 Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, $O_1O_2 = 8 + 12 = 20$. Фигура симметрична относительно прямой O_1O_2, поэтому $AB \perp O_1O_2$ и $CD \perp O_1O_2$, то есть $AB \parallel CD$.

Радиусы O_1A и O_2C перпендикулярны касательной AC. Проведём $O_1K \parallel AC$, K на прямой O_2C. Тогда AO_1KC — прямоугольник, поэтому $O_1K = AC$ и $O_2K = 12 - 8 = 4$. Из прямоугольного треугольника O_1KO_2 получаем $AC^2 = O_1K^2 = 20^2 - 4^2 = 384$.

Расстояние между прямыми AB и CD равно проекции отрезка AC на прямую O_1O_2. Угол между AC и O_1O_2 равен углу KO_1O_2, $\cos \angle KO_1O_2 = \frac{O_1K}{O_1O_2}$. Искомое расстояние равно $AC \cdot \frac{AC}{O_1O_2} = \frac{384}{20} = 19{,}2$.

Ответ: 19,2.

Вариант 4

25 Пусть O_1 и O_2 — центры окружностей, $O_1O_2 = 12 + 28 = 40$. Фигура симметрична относительно прямой O_1O_2, поэтому $AB \perp O_1O_2$ и $CD \perp O_1O_2$, то есть $AB \parallel CD$.

Радиусы O_1A и O_2C перпендикулярны касательной AC. Проведём $O_1K \parallel AC$, K на прямой O_2C. Тогда AO_1KC — прямоугольник, поэтому $O_1K = AC$ и $O_2K = 28 - 12 = 16$. Из прямоугольного треугольника O_1KO_2 получаем $AC^2 = O_1K^2 = 40^2 - 16^2 = 1344$.

Расстояние между прямыми AB и CD равно проекции отрезка AC на прямую O_1O_2. Угол между AC и O_1O_2 равен углу KO_1O_2, $\cos \angle KO_1O_2 = \frac{O_1K}{O_1O_2}$. Искомое расстояние равно $AC \cdot \frac{AC}{O_1O_2} = \frac{1344}{40} = 33{,}6$.

Ответ: 33,6.

Вариант 5

25 Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, $AC = 20$, $BD = 14$. Проведём через C прямую, параллельную BD, до пересечения с прямой AD в точке E. Тогда $BCED$ — параллелограмм: $CE = BD = 14$, $DE = BC$, поэтому $AE = AD + BC = 2 \cdot 11 = 22$.

Треугольники ABC и CDE имеют равные основания $BC = DE$ и равные высоты, поэтому $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = S_{ACD} + S_{CDE} = S_{ACE}$.

Стороны треугольника ACE равны 20, 14 и 22. По формуле Герона $p = 28$, $S_{ACE} = \sqrt{28 \cdot 8 \cdot 14 \cdot 6} = \sqrt{18816} = 56\sqrt{6}$.

Ответ: $56\sqrt{6}$.

Вариант 6

25 Пусть $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, $AC = 18$, $BD = 14$. Проведём через C прямую, параллельную BD, до пересечения с прямой AD в точке E. Тогда $BCED$ — параллелограмм: $CE = BD = 14$, $DE = BC$, поэтому $AE = AD + BC = 2 \cdot 9 = 18$.

Треугольники ABC и CDE имеют равные основания $BC = DE$ и равные высоты, поэтому $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = S_{ACD} + S_{CDE} = S_{ACE}$.

Стороны треугольника ACE равны 18, 14 и 18. По формуле Герона $p = 25$, $S_{ACE} = \sqrt{25 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 7} = \sqrt{13475} = 35\sqrt{11}$.

Ответ: $35\sqrt{11}$.

Вариант 7

25 Проведём $MT \parallel AP$ (T на BC). Отрезок MT — средняя линия треугольника APC, поэтому $PT = TC$. По теореме о пропорциональных отрезках (угол MBC, $KP \parallel MT$) $BP : PT = BK : KM = 5 : 2$. Значит, $BP : PT : TC = 5 : 2 : 2$ и $\frac{CP}{CB} = \frac{4}{9}$.

Пусть $S = S_{ABC}$. Медиана делит треугольник на два равновеликих: $S_{ABM} = S_{CBM} = \frac{S}{2}$. Тогда $S_{ABK} = \frac{BK}{BM} \cdot S_{ABM} = \frac{5}{7} \cdot \frac{S}{2}$, $S_{CBK} = \frac{BK}{BM} \cdot S_{CBM} = \frac{5}{7} \cdot \frac{S}{2}$ и $S_{CKP} = \frac{CP}{CB} \cdot S_{CBK} = \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{7} \cdot \frac{S}{2}$.

Значит, $\frac{S_{CKP}}{S_{ABK}} = \frac{4}{9}$.

Ответ: $4 : 9$ **(или** $\frac{4}{9}$**).**

Вариант 8

25 Проведём $MT \parallel AP$ (T на BC). Отрезок MT — средняя линия треугольника APC, поэтому $PT = TC$. По теореме о пропорциональных отрезках (угол MBC, $KP \parallel MT$) $BP : PT = BK : KM = 4 : 5$. Значит, $BP : PT : TC = 4 : 5 : 5$ и $\frac{CP}{CB} = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}$.

Пусть $S = S_{ABC}$. Медиана делит треугольник на два равновеликих: $S_{ABM} = S_{CBM} = \frac{S}{2}$. Тогда $S_{AKM} = \frac{KM}{BM} \cdot S_{ABM} = \frac{5}{9} \cdot \frac{S}{2}$, $S_{CBK} = \frac{BK}{BM} \cdot S_{CBM} = \frac{4}{9} \cdot \frac{S}{2}$ и $S_{CKP} = \frac{CP}{CB} \cdot S_{CBK} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{S}{2}$.

Значит, $\frac{S_{CKP}}{S_{AKM}} = \frac{5}{7} \cdot \frac{4}{9} : \frac{5}{9} = \frac{4}{7}$.

Ответ: $4 : 7$ **(или** $\frac{4}{7}$**).**

Вариант 9

25 Пусть a и b — основания ($a > b$), c — боковая сторона, h — высота. В трапецию можно вписать окружность, поэтому $a + b = 2c$ и периметр равен $2(a + b) = 100$, откуда $a + b = 50$, $c = 25$.

Площадь $\frac{a+b}{2} \cdot h = 25h = 375$, $h = 15$. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\frac{a-b}{2} = \sqrt{25^2 - 15^2} = 20$, поэтому $a - b = 40$, $a = 45$, $b = 5$.

Пусть O — точка пересечения диагоналей. Треугольники, образованные основаниями и отрезками диагоналей, подобны с коэффициентом $\frac{a}{b}$, поэтому их высоты, проведённые из O к основаниям, относятся как $a : b$, а в сумме равны h. Искомое расстояние равно $h \cdot \frac{a}{a+b} = 15 \cdot \frac{45}{50} = 13{,}5$.

Ответ: 13,5.

Вариант 10

25 Пусть a и b — основания ($a > b$), c — боковая сторона, h — высота. В трапецию можно вписать окружность, поэтому $a + b = 2c$ и периметр равен $2(a + b) = 68$, откуда $a + b = 34$, $c = 17$.

Площадь $\frac{a+b}{2} \cdot h = 17h = 136$, $h = 8$. Проекция боковой стороны на большее основание равна $\frac{a-b}{2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$, поэтому $a - b = 30$, $a = 32$, $b = 2$.

Пусть O — точка пересечения диагоналей. Треугольники, образованные основаниями и отрезками диагоналей, подобны с коэффициентом $\frac{a}{b}$, поэтому их высоты, проведённые из O к основаниям, относятся как $a : b$, а в сумме равны h. Искомое расстояние равно $h \cdot \frac{a}{a+b} = 8 \cdot \frac{32}{34} = \frac{128}{17} = 7\frac{9}{17}$.

Ответ: $7\frac{9}{17}$.

Вариант 11

25 Пусть AD — основание с углами 36° и 54°, BC — другое основание. Углы при AD острые, поэтому $AD > BC$ и продолжения боковых сторон пересекаются в точке O, причём $\angle AOD = 180^\circ - 36^\circ - 54^\circ = 90^\circ$.

Пусть M и N — середины AD и BC. Медиана OM треугольника AOD делит пополам и параллельный AD отрезок BC, поэтому точка N лежит на OM. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине: $OM = \frac{AD}{2}$, $ON = \frac{BC}{2}$. Значит, $MN = OM - ON = \frac{AD-BC}{2}$.

Средняя линия трапеции равна $\frac{AD+BC}{2}$, и она больше, чем $\frac{AD-BC}{2}$. Поэтому $\frac{AD+BC}{2} = 25$, $\frac{AD-BC}{2} = 11$, откуда $AD = 36$, $BC = 14$.

Ответ: 36; 14.

Вариант 12

25 Пусть AD — основание с углами 58° и 32°, BC — другое основание. Углы при AD острые, поэтому $AD > BC$ и продолжения боковых сторон пересекаются в точке O, причём $\angle AOD = 180^\circ - 58^\circ - 32^\circ = 90^\circ$.

Пусть M и N — середины AD и BC. Медиана OM треугольника AOD делит пополам и параллельный AD отрезок BC, поэтому точка N лежит на OM. Медиана прямоугольного треугольника, проведённая к гипотенузе, равна её половине: $OM = \frac{AD}{2}$, $ON = \frac{BC}{2}$. Значит, $MN = OM - ON = \frac{AD-BC}{2}$.

Средняя линия трапеции равна $\frac{AD+BC}{2}$, и она больше, чем $\frac{AD-BC}{2}$. Поэтому $\frac{AD+BC}{2} = 14$, $\frac{AD-BC}{2} = 6$, откуда $AD = 20$, $BC = 8$.

Ответ: 20; 8.

Вариант 13

25 Точка M равноудалена от всех вершин, поэтому четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром M и диаметром $AD = 10$. Тогда $\angle ABD = 90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle BAD = 180^\circ - \angle C = 70^\circ$ и $\angle ADB = 90^\circ - 70^\circ = 20^\circ$.

Значит, $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = 65^\circ - 20^\circ = 45^\circ$. Хорда BC окружности диаметра AD равна $BC = AD \cdot \sin\angle BDC = 10 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 5\sqrt{2}$.

Ответ: $5\sqrt{2}$.

Вариант 14

25 Точка M равноудалена от всех вершин, поэтому четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность с центром M и диаметром $AD = 12$. Тогда $\angle ABD = 90^\circ$ (опирается на диаметр), $\angle BAD = 180^\circ - \angle C = 78^\circ$ и $\angle ADB = 90^\circ - 78^\circ = 12^\circ$.

Значит, $\angle BDC = \angle ADC - \angle ADB = 72^\circ - 12^\circ = 60^\circ$. Хорда BC окружности диаметра AD равна $BC = AD \cdot \sin\angle BDC = 12 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 6\sqrt{3}$.

Ответ: $6\sqrt{3}$.

Вариант 15

25 Точка E лежит на биссектрисе угла B, поэтому она равноудалена от прямых AB и BC. Точка E лежит на биссектрисе угла C, поэтому она равноудалена от прямых BC и CD. Значит, расстояния от E до прямых AB и CD тоже равны 6.

Точка E лежит внутри углов ABC и BCD, то есть между параллельными прямыми AB и CD, поэтому расстояние между этими прямыми равно $6 + 6 = 12$.

$S_{ABCD} = AB \cdot 12 = 15 \cdot 12 = 180$.

Ответ: 180.

Вариант 16

25 Точка E лежит на биссектрисе угла B, поэтому она равноудалена от прямых AB и BC. Точка E лежит на биссектрисе угла C, поэтому она равноудалена от прямых BC и CD. Значит, расстояния от E до прямых AB и CD тоже равны 7,5.

Точка E лежит внутри углов ABC и BCD, то есть между параллельными прямыми AB и CD, поэтому расстояние между этими прямыми равно $7{,}5 + 7{,}5 = 15$.

$S_{ABCD} = AB \cdot 15 = 14 \cdot 15 = 210$.

Ответ: 210.

Вариант 17

25 Угол B прямой, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{369 - 225} = 12$. Так как $\angle CBH = 45^\circ$, треугольник BHC прямоугольный и равнобедренный: $BH = CH = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 6\sqrt{2}$.

По свойству биссектрисы $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{15}{12}$, поэтому $LC = \frac{4}{9}AC$ и $S_{BLC} = \frac{4}{9}S_{ABC} = \frac{4}{9} \cdot \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 12 = 40$. С другой стороны, $S_{BLC} = \frac{1}{2}BL \cdot CH$, откуда $BL = \frac{2 \cdot 40}{6\sqrt{2}} = \frac{20\sqrt{2}}{3}$.

Так как $BL > BH$, точка H лежит на отрезке BL и $HL = BL - BH = \frac{20\sqrt{2}}{3} - 6\sqrt{2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$. Тогда $S_{CHL} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot HL = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = 4$.

Ответ: 4.

Вариант 18

25 Угол B прямой, $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2} = \sqrt{425 - 25} = 20$. Так как $\angle CBH = 45^\circ$, треугольник BHC прямоугольный и равнобедренный: $BH = CH = \frac{BC}{\sqrt{2}} = 10\sqrt{2}$.

По свойству биссектрисы $\frac{AL}{LC} = \frac{AB}{BC} = \frac{5}{20}$, поэтому $LC = \frac{4}{5}AC$ и $S_{BLC} = \frac{4}{5}S_{ABC} = \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 20 = 40$. С другой стороны, $S_{BLC} = \frac{1}{2}BL \cdot CH$, откуда $BL = \frac{2 \cdot 40}{10\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$.

Так как $BL < BH$, точка L лежит на отрезке BH и $LH = BH - BL = 10\sqrt{2} - 4\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$. Тогда $S_{CLH} = \frac{1}{2} \cdot CH \cdot LH = \frac{1}{2} \cdot 10\sqrt{2} \cdot 6\sqrt{2} = 60$.

Ответ: 60.

Вариант 19

25 Продолжим боковые стороны до пересечения в точке O. Так как $\angle A + \angle D = 90^\circ$, то $\angle AOD = 90^\circ$, то есть $OA \perp OD$.

Треугольники OBC и OAD подобны ($BC \parallel AD$), поэтому $\frac{OB}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{11}{26}$. Так как $OA - OB = AB = 12$, получаем $OA = \frac{12 \cdot 26}{15} = 20{,}8$, $OB = 8{,}8$.

Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде AB. Эта прямая перпендикулярна OA, то есть параллельна OD, и удалена от прямой OD на $\frac{OA+OB}{2}$. Окружность касается прямой CD, поэтому её радиус равен расстоянию от центра до CD: $R = \frac{20{,}8+8{,}8}{2} = 14{,}8$.

Ответ: 14,8.

Вариант 20

25 Продолжим боковые стороны до пересечения в точке O. Так как $\angle A + \angle D = 90^\circ$, то $\angle AOD = 90^\circ$, то есть $OA \perp OD$.

Треугольники OBC и OAD подобны ($BC \parallel AD$), поэтому $\frac{OB}{OA} = \frac{BC}{AD} = \frac{15}{27}$. Так как $OA - OB = AB = 14$, получаем $OA = \frac{14 \cdot 27}{12} = 31{,}5$, $OB = 17{,}5$.

Центр окружности лежит на серединном перпендикуляре к хорде AB. Эта прямая перпендикулярна OA, то есть параллельна OD, и удалена от прямой OD на $\frac{OA+OB}{2}$. Окружность касается прямой CD, поэтому её радиус равен расстоянию от центра до CD: $R = \frac{31{,}5+17{,}5}{2} = 24{,}5$.

Ответ: 24,5.

Вариант 21

25 Пусть окружность с центром O и радиусом R касается луча AB в точке T. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AM \cdot AN = 9 \cdot 20 = 180$, $AT = 6\sqrt{5}$.

$\sin \angle BAC = \sqrt{1 - \frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$. Пусть P — середина MN. Тогда $OP \perp AC$ и $AP = \frac{9+20}{2} = 14{,}5$.

Спроектируем ломаную ATO на прямую AC. Проекция отрезка AT равна $AT \cdot \cos \angle BAC = 6\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{3} = 10$. Отрезок $TO \perp AB$ образует с прямой AC угол $90^\circ - \angle BAC$, его проекция равна $R \sin \angle BAC = \frac{2}{3}R$. Сумма проекций равна AP: $10 + \frac{2}{3}R = 14{,}5$, откуда $R = 6{,}75$.

Ответ: 6,75.

Вариант 22

25 Пусть окружность с центром O и радиусом R касается луча AB в точке T. По теореме о касательной и секущей $AT^2 = AM \cdot AN = 18 \cdot 22 = 396$, $AT = 6\sqrt{11}$.

$\sin\angle BAC = \sqrt{1 - \frac{11}{36}} = \frac{5}{6}$. Пусть P — середина MN. Тогда $OP \perp AC$ и $AP = \frac{18+22}{2} = 20$.

Спроектируем ломаную ATO на прямую AC. Проекция отрезка AT равна $AT \cdot \cos\angle BAC = 6\sqrt{11} \cdot \frac{\sqrt{11}}{6} = 11$. Отрезок $TO \perp AB$ образует с прямой AC угол $90^\circ - \angle BAC$, его проекция равна $R\sin\angle BAC = \frac{5}{6}R$. Сумма проекций равна AP: $11 + \frac{5}{6}R = 20$, откуда $R = 10{,}8$.

Ответ: 10,8.

Вариант 23

25 Радиус вписанной окружности треугольника ABC равен расстоянию от O до AC: $r = 8$. Расстояние от O до прямой BC тоже равно 8. Треугольник ABC лежит между параллельными прямыми BC и AD, поэтому высота параллелограмма $h = 8 + 12 = 20$.

Пусть окружность касается AB в точке T. Тогда $AT = \sqrt{AO^2 - r^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = 15$. Отрезки касательных, проведённых из B и C, в сумме равны BC, поэтому полупериметр треугольника ABC равен $p = 15 + BC$.

Площадь треугольника ABC равна $pr = 8(15 + BC)$ и равна $\frac{1}{2}BC \cdot h = 10BC$. Отсюда $BC = 60$ и $S_{ABCD} = BC \cdot h = 60 \cdot 20 = 1200$.

Ответ: 1200.

Вариант 24

25 Радиус вписанной окружности треугольника ABC равен расстоянию от O до AC: $r = 5$. Расстояние от O до прямой BC тоже равно 5. Треугольник ABC лежит между параллельными прямыми BC и AD, поэтому высота параллелограмма $h = 5 + 6 = 11$.

Пусть окружность касается AB в точке T. Тогда $AT = \sqrt{AO^2 - r^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$. Отрезки касательных, проведённых из B и C, в сумме равны BC, поэтому полупериметр треугольника ABC равен $p = 12 + BC$.

Площадь треугольника ABC равна $pr = 5(12 + BC)$ и равна $\frac{1}{2}BC \cdot h = 5{,}5BC$. Отсюда $BC = 120$ и $S_{ABCD} = BC \cdot h = 120 \cdot 11 = 1320$.

Ответ: 1320.

Вариант 25

25 Пусть N — середина BC. Угол BNM опирается на диаметр BM, поэтому $MN \perp BC$. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC, $MN \parallel AB$, значит, $AB \perp BC$ и $\angle ABC = 90^\circ$.

Угол B прямой, поэтому гипотенуза AC является диаметром описанной окружности и $AC = 2 \cdot 12 = 24$. Две меньшие стороны — катеты; пусть они равны $2x$ и x. По теореме Пифагора $5x^2 = 576$, $x^2 = 115{,}2$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2x \cdot x = x^2 = 115{,}2$.

Ответ: 115,2.

Вариант 26

25 Пусть N — середина BC. Угол BNM опирается на диаметр BM, поэтому $MN \perp BC$. Отрезок MN — средняя линия треугольника ABC, $MN \parallel AB$, значит, $AB \perp BC$ и $\angle ABC = 90^\circ$.

Угол B прямой, поэтому гипотенуза AC является диаметром описанной окружности и $AC = 2 \cdot 18 = 36$. Две меньшие стороны — катеты; пусть они равны $3x$ и x. По теореме Пифагора $10x^2 = 1296$, $x^2 = 129{,}6$.

$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot 3x \cdot x = \frac{3}{2}x^2 = 194{,}4$.

Ответ: 194,4.

Вариант 27

25 По свойству биссектрисы $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{MB} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$. Так как $AC < BC$, касательная пересекает прямую AB за точкой A.

Угол между касательной CD и хордой CA равен вписанному углу, опирающемуся на дугу CA: $\angle DCA = \angle DBC$. Угол D у треугольников DCA и DBC общий, поэтому они подобны и $\frac{DA}{DC} = \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{5}{9}$.

Пусть $DA = x$. Тогда $DC = \frac{9}{5}x$, $DB = \frac{9}{5}DC = \frac{81}{25}x$. Но $DB = DA + AB = x + 28$, откуда $\frac{56}{25}x = 28$, $x = 12{,}5$ и $CD = \frac{9}{5} \cdot 12{,}5 = 22{,}5$.

Ответ: 22,5.

Вариант 28

25 По свойству биссектрисы $\frac{AC}{BC} = \frac{AM}{MB} = \frac{13}{15}$. Так как $AC < BC$, касательная пересекает прямую AB за точкой A.

Угол между касательной CD и хордой CA равен вписанному углу, опирающемуся на дугу CA: $\angle DCA = \angle DBC$. Угол D у треугольников DCA и DBC общий, поэтому они подобны и $\frac{DA}{DC} = \frac{DC}{DB} = \frac{AC}{BC} = \frac{13}{15}$.

Пусть $DA = x$. Тогда $DC = \frac{15}{13}x$, $DB = \frac{15}{13}DC = \frac{225}{169}x$. Но $DB = DA + AB = x + 28$, откуда $\frac{56}{169}x = 28$, $x = 84{,}5$ и $CD = \frac{15}{13} \cdot 84{,}5 = 97{,}5$.

Ответ: 97,5.

Вариант 29

25 Пусть $\angle ADB = \alpha$, $\angle CAD = \beta$. Угол AKB — внешний угол треугольника AKD, поэтому $\alpha + \beta = 60^\circ$.

Треугольники ABD и ACD вписаны в окружность радиуса R, по теореме синусов $AB = 2R\sin\alpha$, $CD = 2R\sin\beta$. Значит, $\sin\beta = \frac{CD}{AB}\sin\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha$.

$\sin(60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{3}{2}\sin\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{4}$ и $\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{3}{19}$.

$R^2 = \frac{AB^2}{4\sin^2\alpha} = \frac{144 \cdot 19}{4 \cdot 3} = 228$, $R = 2\sqrt{57}$.

Ответ: $2\sqrt{57}$.

Вариант 30

25 Пусть $\angle ADB = \alpha$, $\angle CAD = \beta$. Угол AKB — внешний угол треугольника AKD, поэтому $\alpha + \beta = 60^\circ$.

Треугольники ABD и ACD вписаны в окружность радиуса R, по теореме синусов $AB = 2R\sin\alpha$, $CD = 2R\sin\beta$. Значит, $\sin\beta = \frac{CD}{AB}\sin\alpha = \frac{4}{13}\sin\alpha$.

$\sin(60^\circ - \alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha = \frac{4}{13}\sin\alpha$, откуда $\operatorname{tg}\alpha = \frac{13\sqrt{3}}{21}$ и $\sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{169}{316}$.

$R^2 = \frac{AB^2}{4\sin^2\alpha} = \frac{39^2 \cdot 316}{4 \cdot 169} = 711$, $R = \sqrt{711} = 3\sqrt{79}$.

Ответ: $3\sqrt{79}$ **(или** $\sqrt{711}$**).**

Вариант 31

25 Пусть P — точка пересечения BE и AD. В треугольнике ABD отрезок BP — биссектриса и высота, поэтому треугольник ABD равнобедренный: $AB = BD$, и P — середина AD: $AP = PD = 12$. Значит, $BC = 2BD = 2AB$.

Проведём $DF \parallel BE$ (F на AC). Отрезок DF — средняя линия треугольника BEC: F — середина EC, $DF = \frac{BE}{2} = 12$. В треугольнике ADF отрезок $PE \parallel DF$ и P — середина AD, поэтому E — середина AF и $PE = \frac{DF}{2} = 6$. Значит, $AE = EF = FC$, а $BP = 24 - 6 = 18$.

Из прямоугольных треугольников ABP и APE: $AB = \sqrt{18^2 + 12^2} = 6\sqrt{13}$, $AE = \sqrt{12^2 + 6^2} = 6\sqrt{5}$. Тогда $BC = 2AB = 12\sqrt{13}$, $AC = 3AE = 18\sqrt{5}$.

Ответ: $6\sqrt{13}$; $12\sqrt{13}$; $18\sqrt{5}$.

Вариант 32

25 Пусть P — точка пересечения BL и AM. В треугольнике ABM отрезок BP — биссектриса и высота, поэтому треугольник ABM равнобедренный: $AB = BM$, и P — середина AM: $AP = PM = 24$. Значит, $BC = 2BM = 2AB$.

Проведём $MF \parallel BL$ (F на AC). Отрезок MF — средняя линия треугольника BLC: F — середина LC, $MF = \frac{BL}{2} = 24$. В треугольнике AMF отрезок $PL \parallel MF$ и P — середина AM, поэтому L — середина AF и $PL = \frac{MF}{2} = 12$. Значит, $AL = LF = FC$, а $BP = 48 - 12 = 36$.

Из прямоугольных треугольников ABP и APL: $AB = \sqrt{36^2 + 24^2} = 12\sqrt{13}$, $AL = \sqrt{24^2 + 12^2} = 12\sqrt{5}$. Тогда $BC = 2AB = 24\sqrt{13}$, $AC = 3AL = 36\sqrt{5}$.

Ответ: $12\sqrt{13}$; $24\sqrt{13}$; $36\sqrt{5}$.

Вариант 33

25 Пусть φ — угол между диагоналями. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 28 \cdot 18 \cdot \sin\varphi$.

Высота треугольника ABK, проведённая из вершины A к прямой BD, равна $AO \cdot \sin\varphi$, поэтому $S_{ABK} = \frac{1}{2} \cdot BK \cdot 12 \cdot \sin\varphi$.

По условию $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABK}} = \frac{28 \cdot 18}{12 \cdot BK} = 5$, откуда $BK = 8{,}4$ и $KD = BD - BK = 18 - 8{,}4 = 9{,}6$.

Ответ: 9,6.

Вариант 34

25 Пусть φ — угол между диагоналями, $BD = 15 + 9 = 24$. Тогда $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC \cdot BD \cdot \sin\varphi = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 24 \cdot \sin\varphi$.

Высота треугольника ABN, проведённая из вершины B к прямой AC, равна $BO \cdot \sin\varphi$, поэтому $S_{ABN} = \frac{1}{2} \cdot AN \cdot 15 \cdot \sin\varphi$.

По условию $\frac{S_{ABCD}}{S_{ABN}} = \frac{30 \cdot 24}{15 \cdot AN} = 7{,}5$, откуда $AN = 6{,}4$ и $CN = AC - AN = 30 - 6{,}4 = 23{,}6$.

Ответ: 23,6.

Вариант 35

25 Пусть M — середина AB, прямая DM пересекает прямую BC в точке P. Треугольники AMD и BMP равны: $AM = MB$, углы при вершине M вертикальные, $\angle MAD = \angle MBP$ как накрест лежащие. Поэтому $BP = AD$.

$\angle CPD = \angle ADP$ как накрест лежащие, а $\angle ADP = \angle CDP$, так как DM — биссектриса. Значит, треугольник CDP равнобедренный: $CP = CD = 26$. Тогда $AD = BP = CP - BC = 26 - 1 = 25$.

Проведём $CE \parallel AB$, где точка E лежит на AD. Тогда $ABCE$ — параллелограмм, поэтому $CE = 10$ и $ED = AD - BC = 24$. Так как $10^2 + 24^2 = 676 = 26^2$, треугольник CED прямоугольный с прямым углом E, то есть CE — высота трапеции.

$S_{ABCD} = \frac{AD + BC}{2} \cdot CE = \frac{25 + 1}{2} \cdot 10 = 130$.

Ответ: 130.

Вариант 36

25 Пусть M — середина AB, прямая DM пересекает прямую BC в точке P. Треугольники AMD и BMP равны: $AM = MB$, углы при вершине M вертикальные, $\angle MAD = \angle MBP$ как накрест лежащие. Поэтому $BP = AD$.

$\angle CPD = \angle ADP$ как накрест лежащие, а $\angle ADP = \angle CDP$, так как DM — биссектриса. Значит, треугольник CDP равнобедренный: $CP = CD = 17$. Тогда $AD = BP = CP - BC = 17 - 1 = 16$.

Проведём $CE \parallel AB$, где точка E лежит на AD. Тогда $ABCE$ — параллелограмм, поэтому $CE = 8$ и $ED = AD - BC = 15$. Так как $8^2 + 15^2 = 289 = 17^2$, треугольник CED прямоугольный с прямым углом E, то есть CE — высота трапеции.

$S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot CE = \frac{16+1}{2} \cdot 8 = 68$.

Ответ: 68.