РЕШЕНИЯ ЗАДАНИЯ 24

Допускаются иные способы решения и формы записи, не искажающие его смысла.

Вариант 1

24 Треугольники NBC и NAD равны по трём сторонам: $NB = NA$ (N — середина AB), $BC = AD$ (противоположные стороны параллелограмма), $NC = ND$ (по условию).

Поэтому $\angle NBC = \angle NAD$, то есть $\angle B = \angle A$. Но $\angle A + \angle B = 180^\circ$ как углы, прилежащие к стороне параллелограмма, значит, $\angle A = \angle B = 90^\circ$.

Параллелограмм с прямым углом является прямоугольником.

Вариант 2

24 Треугольники ABN и DCN равны по трём сторонам: $AB = DC$ (стороны ромба), $BN = CN$ (N — середина BC), $AN = DN$ (по условию).

Поэтому $\angle B = \angle C$. Но $\angle B + \angle C = 180^\circ$ как углы, прилежащие к стороне ромба, значит, $\angle B = \angle C = 90^\circ$.

Ромб с прямым углом является квадратом.

Вариант 3

24 Пусть h — высота трапеции, S — её площадь. Средняя линия равноудалена от оснований, поэтому расстояния от точки K до прямых BC и AD равны $\frac{h}{2}$.

Тогда $S_{BKC} + S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD+BC}{2} \cdot h = \frac{1}{2}S$.

Треугольники ABK, BKC, CKD и AKD составляют всю трапецию, поэтому $S_{ABK} + S_{CKD} = S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S = S_{BKC} + S_{AKD}$.

Вариант 4

24 Пусть h — высота трапеции, S — её площадь. Средняя линия равноудалена от оснований, поэтому расстояния от точки E до прямых LM и KN равны $\frac{h}{2}$.

Тогда $S_{LEM} + S_{KEN} = \frac{1}{2} \cdot LM \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot KN \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{KN+LM}{2} \cdot h = \frac{1}{2}S$.

Треугольники KLE, LEM, MEN и KEN составляют всю трапецию, поэтому $S_{KLE} + S_{MEN} = S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S = S_{LEM} + S_{KEN}$.

Вариант 5

24 $\angle BAF = \angle FAD$, так как AF — биссектриса, и $\angle FAD = \angle AFB$ как накрест лежащие при параллельных прямых AD и BC и секущей AF. Значит, $\angle BAF = \angle AFB$, треугольник ABF равнобедренный и $BF = AB$.

Аналогично $\angle CDF = \angle FDA = \angle DFC$, треугольник DCF равнобедренный и $CF = CD$.

Так как $AB = CD$, получаем $BF = CF$, то есть F — середина BC.

Вариант 6

24 $\angle BCS = \angle SCD$, так как CS — биссектриса, и $\angle SCD = \angle CSB$ как накрест лежащие при параллельных прямых AB и CD и секущей CS. Значит, треугольник BCS равнобедренный и $BS = BC$.

Аналогично $\angle ADS = \angle SDC = \angle DSA$, треугольник ADS равнобедренный и $AS = AD$.

Так как $AD = BC$, получаем $AS = BS$, то есть S — середина AB.

Вариант 7

24 Пусть внутренняя общая касательная касается окружностей в точках X и Y и пересекает отрезок OQ в точке P; r_1 и r_2 — радиусы окружностей с центрами O и Q, $r_1 : r_2 = m : n$.

Радиусы, проведённые в точки касания, перпендикулярны касательной: $OX \perp XY$, $QY \perp XY$. Прямоугольные треугольники OXP и QYP подобны: углы при вершине P равны как вертикальные.

Значит, $OP : QP = OX : QY = r_1 : r_2 = m : n$, что и требовалось доказать.

Вариант 8

24 Пусть внутренняя общая касательная касается окружностей в точках X и Y и пересекает отрезок OQ в точке P; r_1 и r_2 — радиусы окружностей с центрами O и Q, $r_1 : r_2 = k : l$.

Радиусы, проведённые в точки касания, перпендикулярны касательной: $OX \perp XY$, $QY \perp XY$. Прямоугольные треугольники OXP и QYP подобны: углы при вершине P равны как вертикальные.

Значит, $OP : QP = OX : QY = r_1 : r_2 = k : l$, что и требовалось доказать.

Вариант 9

24 $KP = \frac{1}{2}KN = \frac{1}{2}LM = KL$, поэтому треугольник KLP равнобедренный и $\angle KLP = \angle KPL$.

$\angle KPL = \angle PLM$ как накрест лежащие при параллельных прямых KN и LM и секущей LP.

Следовательно, $\angle KLP = \angle PLM$, то есть LP — биссектриса угла KLM.

Вариант 10

24 $KT = \frac{1}{2}KL = KN$, поэтому треугольник KNT равнобедренный и $\angle KNT = \angle KTN$.

$\angle KTN = \angle TNM$ как накрест лежащие при параллельных прямых KL и NM и секущей NT.

Следовательно, $\angle KNT = \angle TNM$, то есть NT — биссектриса угла KNM.

Вариант 11

24 Пусть h_1 и h_2 — расстояния от точки E до прямых AB и CD. Точка E лежит между этими параллельными прямыми, поэтому $h_1 + h_2 = h$, где h — высота параллелограмма, проведённая к стороне AB.

Так как $CD = AB$, получаем $S_{ABE} + S_{CED} = \frac{1}{2}AB \cdot h_1 + \frac{1}{2}CD \cdot h_2 = \frac{1}{2}AB \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Вариант 12

24 Пусть h_1 и h_2 — расстояния от точки N до прямых AB и CD; тогда $h_1 + h_2$ равно высоте параллелограмма, проведённой к AB, и $S_{ABN} + S_{CND} = \frac{1}{2}AB \cdot (h_1 + h_2) = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Точно так же, рассматривая расстояния от N до прямых BC и AD, получаем $S_{BNC} + S_{AND} = \frac{1}{2}S_{ABCD}$.

Следовательно, $S_{ABN} + S_{CND} = S_{BNC} + S_{AND}$.

Вариант 13

24 Пусть AD и BC — основания. Продолжим DE до пересечения с прямой BC в точке F. Треугольники AED и BEF равны: $AE = BE$, $\angle AED = \angle BEF$ как вертикальные, $\angle EAD = \angle EBF$ как накрест лежащие при $AD \parallel BF$. Поэтому $EF = ED$.

В треугольнике DCF отрезок CE — медиана, и $CE = ED = EF = \frac{1}{2}DF$. Медиана, равная половине стороны, к которой она проведена, выходит из вершины прямого угла, поэтому $\angle DCF = 90^\circ$.

Значит, боковая сторона CD перпендикулярна основанию BC (а значит, и AD), и трапеция $ABCD$ прямоугольная.

Вариант 14

24 Пусть AD и BC — основания. Продолжим AK до пересечения с прямой BC в точке F. Треугольники AKD и FKC равны: $DK = CK$, $\angle AKD = \angle FKC$ как вертикальные, $\angle KDA = \angle KCF$ как накрест лежащие при $AD \parallel CF$. Поэтому $KF = AK$.

В треугольнике ABF отрезок BK — медиана, и $BK = AK = KF = \frac{1}{2}AF$. Медиана, равная половине стороны, к которой она проведена, выходит из вершины прямого угла, поэтому $\angle ABF = 90^\circ$.

Значит, боковая сторона AB перпендикулярна основаниям, и трапеция $ABCD$ прямоугольная.

Вариант 15

24 $\angle AHB = \angle AKB = 90^\circ$, поэтому точки H и K лежат на окружности с диаметром AB.

Углы AHK и ABK — вписанные в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу AK, поэтому они равны.

Вариант 16

24 $\angle AHC = \angle AFC = 90^\circ$, поэтому точки H и F лежат на окружности с диаметром AC.

Углы CFH и CAH — вписанные в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу CH, поэтому они равны.

Вариант 17

24 Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому $OL = ON$.

Треугольники AOL и BON равны: $OL = ON$, $\angle AOL = \angle BON$ как вертикальные, $\angle ALO = \angle BNO$ как накрест лежащие при параллельных прямых KL и MN и секущей LN.

Следовательно, $AL = BN$.

Вариант 18

24 Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам, поэтому $OM = OK$.

Треугольники AOM и BOK равны: $OM = OK$, $\angle AOM = \angle BOK$ как вертикальные, $\angle AMO = \angle BKO$ как накрест лежащие при параллельных прямых LM и KN и секущей KM.

Следовательно, $AM = BK$.

Вариант 19

24 Точки A и D лежат по одну сторону от прямой BC (четырёхугольник выпуклый), и отрезок BC виден из них под равными углами: $\angle BAC = \angle BDC$. Значит, точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

Углы CBD и CAD — вписанные в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу CD, поэтому они равны.

Вариант 20

24 Точки A и B лежат по одну сторону от прямой CD (четырёхугольник выпуклый), и отрезок CD виден из них под равными углами: $\angle CAD = \angle CBD$. Значит, точки A, B, C, D лежат на одной окружности.

Углы ACD и ABD — вписанные в эту окружность и опираются на одну и ту же дугу AD, поэтому они равны.

Вариант 21

24 Пусть AD и BC — основания, h — высота, S — площадь трапеции. Точка K — середина CD, поэтому расстояния от K до прямых BC и AD равны $\frac{h}{2}$.

$S_{BKC} + S_{AKD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD+BC}{2} \cdot h = \frac{1}{2}S$.

Трапеция составлена из треугольников ABK, BKC и AKD, поэтому $S_{KAB} = S - \frac{1}{2}S = \frac{1}{2}S$.

Вариант 22

24 Пусть AD и BC — основания, h — высота, S — площадь трапеции. Точка P — середина CD, поэтому расстояния от P до прямых BC и AD равны $\frac{h}{2}$.

Тогда $S_{ADP} + S_{BCP} = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot \frac{h}{2} + \frac{1}{2} \cdot BC \cdot \frac{h}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AD+BC}{2} \cdot h = \frac{1}{2}S$.

Вариант 23

24 Угол BAC тупой, поэтому основания высот B_1 и C_1 лежат на продолжениях сторон CA и BA за точку A, и $\angle BAB_1 = \angle CAC_1 = 180^\circ - \angle BAC = \varphi$.

Из прямоугольных треугольников ABB_1 и ACC_1: $AB_1 = AB\cos\varphi$, $AC_1 = AC\cos\varphi$, поэтому $\frac{AB_1}{AB} = \frac{AC_1}{AC}$.

Кроме того, $\angle B_1AC_1 = \angle BAC$ как вертикальные. Значит, треугольники AB_1C_1 и ABC подобны по двум сторонам и углу между ними.

Вариант 24

24 Угол ABC тупой, поэтому основания высот A_1 и C_1 лежат на продолжениях сторон CB и AB за точку B, и $\angle ABA_1 = \angle CBC_1 = 180^\circ - \angle ABC = \varphi$.

Из прямоугольных треугольников ABA_1 и CBC_1: $BA_1 = AB\cos\varphi$, $BC_1 = BC\cos\varphi$, поэтому $\frac{BA_1}{AB} = \frac{BC_1}{BC}$.

Кроме того, $\angle A_1BC_1 = \angle ABC$ как вертикальные. Значит, треугольники A_1BC_1 и ABC подобны по двум сторонам и углу между ними.

Вариант 25

24 Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Точка M лежит на биссектрисе угла A, поэтому она равноудалена от прямых AB и AD.

Точка M лежит и на биссектрисе угла D, поэтому она равноудалена от прямых AD и CD. Следовательно, M равноудалена от прямых AB, AD и CD.

Вариант 26

24 Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон. Точка K лежит на биссектрисе угла A, поэтому она равноудалена от прямых AB и AD.

Точка K лежит и на биссектрисе угла B, поэтому она равноудалена от прямых AB и BC. Следовательно, K равноудалена от прямых AB, BC и AD.

Вариант 27

24 $\angle CBD = \angle BDA$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD.

$\frac{BC}{DB} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ и $\frac{BD}{DA} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$, то есть стороны, прилежащие к этим углам, пропорциональны.

Значит, треугольники CBD и BDA подобны по двум сторонам и углу между ними.

Вариант 28

24 $\angle CBD = \angle BDA$ как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BD.

$\frac{BC}{DB} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ и $\frac{BD}{DA} = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$, то есть стороны, прилежащие к этим углам, пропорциональны.

Значит, треугольники CBD и BDA подобны по двум сторонам и углу между ними.

Вариант 29

24 Продолжим AT до пересечения с прямой BC в точке F. Треугольники ATD и FTC равны: $DT = CT$, $\angle ATD = \angle FTC$ как вертикальные, $\angle TDA = \angle TCF$ как накрест лежащие при $AD \parallel BF$. Поэтому $CF = AD$.

$\angle BFA = \angle FAD$ как накрест лежащие, а $\angle FAD = \angle BAF$, так как AT — биссектриса. Значит, треугольник ABF равнобедренный и $AB = BF$.

Точка C лежит между B и F, поэтому $AB = BF = BC + CF = BC + AD$.

Вариант 30

24 Продолжим AF до пересечения с прямой BC в точке G. Треугольники AFD и GFC равны: $DF = CF$, $\angle AFD = \angle GFC$ как вертикальные, $\angle FDA = \angle FCG$ как накрест лежащие при $AD \parallel BG$. Поэтому $CG = AD$.

Тогда $BG = BC + CG = BC + AD = AB$, и треугольник ABG равнобедренный: $\angle BAG = \angle BGA$.

$\angle BGA = \angle GAD$ как накрест лежащие при $BG \parallel AD$. Следовательно, $\angle BAF = \angle FAD$, то есть AF — биссектриса угла BAD.

Вариант 31

24 Треугольники ABD и ACD имеют общее основание AD и равные высоты (вершины B и C лежат на прямой BC, параллельной AD), поэтому $S_{ABD} = S_{ACD}$.

Так как $S_{ABD} = S_{APB} + S_{APD}$ и $S_{ACD} = S_{CPD} + S_{APD}$, получаем $S_{APB} = S_{CPD}$.

Вариант 32

24 Треугольники MNK и MPK имеют общее основание MK и равные высоты (вершины N и P лежат на прямой NP, параллельной MK), поэтому $S_{MNK} = S_{MPK}$.

Так как $S_{MNK} = S_{MNF} + S_{MFK}$ и $S_{MPK} = S_{PKF} + S_{MFK}$, получаем $S_{MNF} = S_{PKF}$.

Вариант 33

24 $MS = MT$ как радиусы первой окружности, поэтому точка M равноудалена от концов отрезка ST и лежит на его серединном перпендикуляре. Аналогично $NS = NT$, и точка N тоже лежит на серединном перпендикуляре к ST.

Так как $M \neq N$, прямая MN совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку ST, то есть $MN \perp ST$.

Вариант 34

24 $IA = IB$ как радиусы первой окружности, поэтому точка I равноудалена от концов отрезка AB и лежит на его серединном перпендикуляре. Аналогично $JA = JB$, и точка J тоже лежит на серединном перпендикуляре к AB.

Так как $I \neq J$, прямая IJ совпадает с серединным перпендикуляром к отрезку AB, то есть $IJ \perp AB$.

Вариант 35

24 Пусть для определённости точка S лежит на продолжениях сторон AB и DC за точки B и C. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, поэтому $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

Тогда $\angle SBC = 180^\circ - \angle ABC = \angle ADC = \angle SDA$.

Угол S у треугольников BCS и DAS общий. Значит, они подобны по двум углам.

Вариант 36

24 Пусть для определённости точка L лежит на продолжениях сторон AD и BC за точки D и C. Четырёхугольник $ABCD$ вписан в окружность, поэтому $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$.

Тогда $\angle LDC = 180^\circ - \angle ADC = \angle ABC = \angle ABL$.

Угол L у треугольников ALB и CLD общий. Значит, они подобны по двум углам.