Муниципальный этап школьников по математике за 9 класс

Максимальное время выполнения заданий: 235 минут.
Все задания оцениваются из 20 баллов.

1. У коллекционера Серёжи есть 5 монет разного веса, каждая весит натуральное число граммов. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих монет Серёжа посчитал суммарный вес этого набора. Когда он выписал все эти числа (всего 31 число), среди них оказалась ровно одна пара равных. Приведите хотя бы один пример, как такое могло произойти.

2. Числа x, y, a, b, c, d таковы, что оба произведения $x \cdot (a - b + c - d + y)$ и $y \cdot (x - a + b - c + d)$ отрицательны. Докажите, что число $x \cdot y$ тоже отрицательно.

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = BC$ и $\angle ACB < 60°$. Точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Описанная окружность треугольника BIO вторично пересекает отрезок BC в точке D. Чему может быть равен угол между прямыми OD и BI?

4. В классе учатся 36 человек, некоторые из которых дружат (дружба взаимна). Оказалось, что никакие двое учеников с одинаковым количеством друзей не дружат между собой. Какое наибольшее количество пар друзей может быть в классе?

5. Серёжа задумал 10 последовательных трёхзначных чисел и переставил их в некотором порядке. Получил числа $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$. Могло ли так оказаться, что каждое из чисел a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ является квадратом натурального числа?

Муниципальный этап школьников по математике за 9 класс.
Решения

1. У коллекционера Серёжи есть 5 монет разного веса, каждая весит натуральное число граммов. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих монет Серёжа посчитал суммарный вес этого набора. Когда он выписал все эти числа (всего 31 число), среди них оказалась ровно одна пара равных. Приведите хотя бы один пример, как такое могло произойти.

Решение. Например, подойдет набор {1, 2, 4, 8, 15}. Нетрудно убедиться, что данными числами можно получить набор с любым весом от 1 до 30, причём есть ровно два набора с весом 15: {1, 2, 4, 8} и {15}.

Комментарий. Существуют и другие примеры.

- Правильный пример — *20 баллов.*
- Неправильный пример — *0 баллов.*

2. Числа x, y, a, b, c, d таковы, что оба произведения $x \cdot (a - b + c - d + y)$ и $y \cdot (x - a + b - c + d)$ отрицательны. Докажите, что число $x \cdot y$ тоже отрицательно.

Решение. Пусть $t = a-b+c-d$. Тогда по условию числа $x(t+y) = xt + xy$ и $y(x - t) = xy - yt$ отрицательные.

Если одно из чисел x и y равно 0, то одно из выражений $xt + xy$ и $xy - yt$ тоже равно 0, чего не может быть.

Если числа x и y одного знака, то числа xt и yt тоже одного знака (или равны 0). Если $xt, yt \geqslant 0$, то $xt + xy > 0$, противоречие. Если $xt, yt \leqslant 0$, то $xy - yt > 0$, противоречие.

Значит, числа x и y разных знаков, то есть число $xy < 0$.

- Верное решение — *20 баллов.*
- Верное решение, но не разобран случай $x = 0$ или $y = 0$ — *17 баллов.*
- Правильно разобран один из случаев, когда t и x одного знака или разного знака — *6 баллов.*

· Доказано, что $x, y \neq 0$ — *0 баллов.*

· Нет существенных продвижений — *0 баллов.*

3. Дан равнобедренный треугольник ABC, в котором $AC = BC$ и $\angle ACB < 60°$. Точки I и O — центры вписанной и описанной окружностей треугольника ABC соответственно. Описанная окружность треугольника BIO вторично пересекает отрезок BC в точке D. Чему может быть равен угол между прямыми OD и BI?

Ответ. 90°. **Решение.** Пусть $\angle ACB = 2\alpha$. Тогда $\angle A = \angle B = 90° - \alpha$ и $\angle CBI = 45° - \alpha/2$. Из равнобедренности треугольника COB получаем, что $\angle OBC = \angle OCB = \alpha$. Пусть H — основание биссектрисы CI. Тогда из вписанности четырёхугольника $BOID$ получаем, что $\angle BDO = \angle BIH$. Угол BIH внешний для треугольника BIC, поэтому мы можем продолжить равенство:

$$\angle BDO = \angle BIH = \angle ICB + \angle CBI = \alpha + (45° - \alpha/2) = 45 + \alpha/2.$$

Получаем, что

$$\angle BDO + \angle CBI = (45° + \alpha/2) + (45° - \alpha/2) = 90°,$$

откуда $OD \perp IB$.

Комментарий. В решении равенство углов $\angle BDO = \angle BIH$ верно всегда, вне зависимости от расположения точек O и I. А, например, равенство $\angle BDO = BIO$ верно только в случае, когда точка I находится на отрезке CO. Если же I находится на продолжении отрезка CO за точку O, то этот факт становится не верным. На самом деле при условии $\angle ACB < 60°$ верно, что O лежит на отрезке CI.

· Верное решение — *20 баллов.*

· В счёте углов используется расположение точек I и O без доказательства — *не более 17 баллов.*

· Нет существенных продвижений — 0 баллов.

4. В классе учатся 36 человек, некоторые из которых дружат (дружба взаимна). Оказалось, что никакие двое учеников с одинаковым количеством друзей не дружат между собой. Какое наибольшее количество пар друзей может быть в классе?

Ответ. 546.

Решение. Оценка. Если в классе есть t человек, у которых поровну друзей, то они не знают друг друга. Значит, каждый из них дружит с не более чем $35-(t-1) = 36-t$ одноклассниками. Тогда мы можем сделать вывод, что в классе не более одного ученика с 35 друзьями; не более двух с 34 друзьями; не более трёх с 33 друзьями; . . . ; не более восьми с 28 друзьями. Так как 36 = 1+2+3+4+5+6+7+8, то в сумме все дети дружат с не более чем 1·35+2·34+3·33+. . .+8·28 = 1092 одноклассниками. Так как каждую дружбу мы посчитали дважды, то всего дружб не более 1092/2 = 546.

Осталось привести пример, где такое количество дружб возможно. Разделим всех учеников на 8 групп по 1, 2, 3, . . . , 8 человек. Сделаем так, чтобы любые два ученика из одной группы не дружили, а из разных дружили. Тогда мы получим одного человека с 35 друзьями, двух с 34 друзьями, . . . , 8 человек с 28 друзьями, то есть столько же, как и в оценке. Значит, в этом примере будет 546 дружб.

- Верное решение — 20 *баллов.*
- Верные оценка и построение примера, но в подсчёте рёбер допущена арифметическая ошибка — *17 баллов.*
- Только пример — *9 баллов.*
- Только оценка — *9 баллов.*
- Только ответ — *0 баллов.*
- Нет существенных продвижений — *0 баллов.*

5. Серёжа задумал 10 последовательных трёхзначных чисел и переставил их в некотором порядке. Получил числа a_1, a_2, . . . , a_{10}. Могло ли так оказаться, что каждое из чисел a_1, $a_1 + a_2$, $a_1 + a_2 + a_3$, . . . , $a_1 + a_2 + \ldots + a_{10}$ является квадратом натурального числа?

Ответ. Нет. **Решение.** Квадраты натуральных чисел при делении на 4 могут иметь только остатки 0 и 1.

Среди 10 последовательных натуральных чисел есть хотя бы два числа, дающие остаток 2 при делении на 4. Тогда среди чисел a_2, a_3, . . . , a_{10} есть хотя бы одно такое. Пусть это a_i. Так как число $S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{i-1}$ является точным квадратом, то S при деле-

нии на 4 может давать только остатки 0 и 1. Тогда число $S + a_i$ даёт остаток 2 или 3. То есть оно не может быть квадратом натурального числа.

- Верное решение — *20 баллов.*
- Только ответ — *0 баллов.*
- Нет существенных продвижений — *0 баллов.*