Муниципальный этап школьников по математике за 10 класс

Максимальное время выполнения заданий: 235 минут.
Все задания оцениваются из 20 баллов.

1. У коллекционера Серёжи есть 67 монет разного веса. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих монет Серёжа посчитал суммарный вес этого набора. Когда он выписал все эти числа, среди них оказалась ровно одна пара равных. Докажите, что все 67 монет можно разделить на две группы так, чтобы суммарный вес монет в каждой группе был одинаковым.

2. Обозначим через a_n количество способов раскрасить клетки доски $2 \times n$ в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой клетки было нечётное число соседних по стороне клеток, покрашенных в чёрный цвет. Найдите $a_2 + a_3 + \ldots + a_{2026}$.

3. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P. Точки R и Q на сторонах AC и CB таковы, что $CQPR$ — параллелограмм. Докажите, что точка, симметричная точке P относительно прямой RQ, лежит на описанной окружности треугольника
ABC.

4. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c такие, что

$$(2a - 1)(2b - 1)(2c - 1) = 3abc - 2.$$

5. Найдите все простые числа p такие, что сумма всех натуральных чисел от 1 до p включительно делится на все простые числа, не превосходящие p.

Муниципальный этап школьников по математике за 10 класс. Решения

1. У коллекционера Серёжи есть 67 монет разного веса. Для каждого набора из нескольких (хотя бы одной) своих монет Серёжа посчитал суммарный вес этого набора. Когда он выписал все эти числа, среди них оказалась ровно одна пара равных. Докажите, что все 67 монет можно разделить на две группы так, чтобы суммарный вес монет в каждой группе был одинаковым.

Решение. Рассмотрим пару наборов с равным весом. У этих наборов нет общих монет, так как иначе при удалении общей монеты из обоих наборов мы получим новую пару наборов с равным весом. Кроме того, эта пара наборов в объединении должна содержать все монеты, так как иначе при добавлении в оба набора монеты, которой нет ни в одном из них, мы получим новую пару наборов с равным весом. Значит, рассматриваемые наборы дают требуемое в задаче разбиение.

● Верное решение — *20 баллов*.

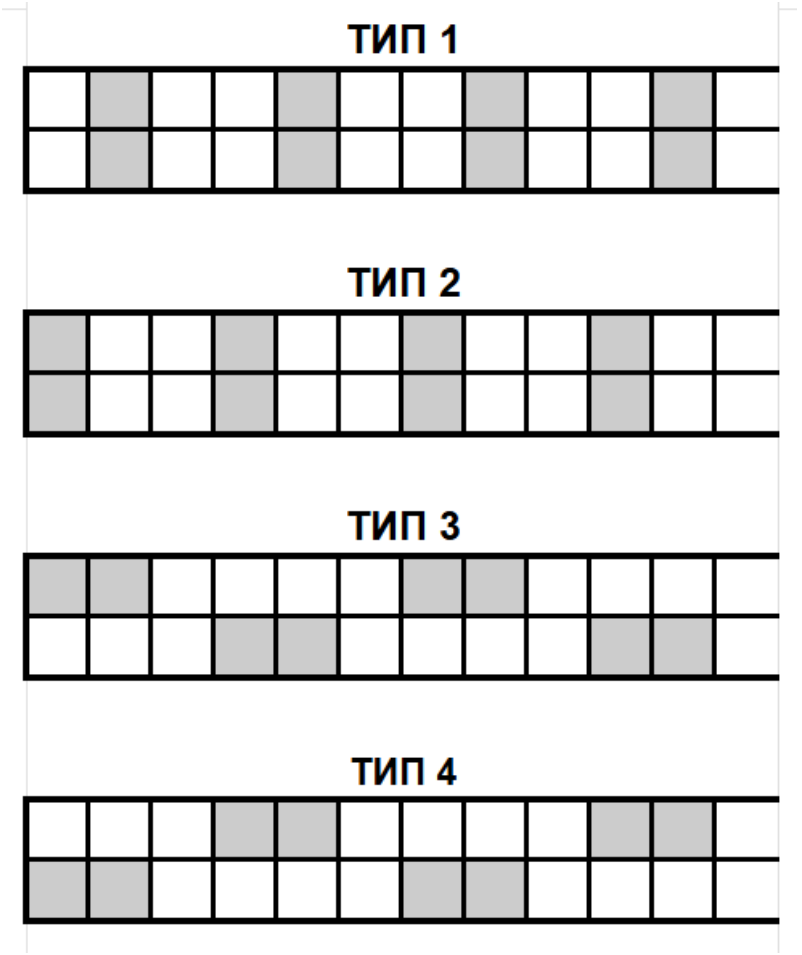
● Доказано, что два набора, равных по весу, не пересекаются — *6 баллов*.

● Доказано, что два набора, равных по весу, содержат все монеты — *6 баллов*.

● Нет существенных продвижений — *0 баллов*.

2. Обозначим через a_n количество способов раскрасить клетки доски $2 \times n$ в чёрный и белый цвета так, чтобы у каждой клетки было нечётное число соседних по стороне клеток, покрашенных в чёрный цвет. Найдите $a_2 + a_3 + \ldots + a_{2026}$.

Ответ. 4050. **Решение.** Нетрудно заметить, что по раскраске двух клеток в первом столбце полностью задаётся раскраска всех остальных клеток. То есть всего существует 4 типа раскрасок, как на картинке.



Заметим, что раскраска типа 1 может закончиться или на черный столбец, или на белый столбец, перед которым стоит чёрный. То есть раскраска типа 1 подойдёт для таблиц $2 \times 3k$ и $2 \times (3k + 2)$. Аналогично раскраска типа 2 подойдет для таблиц $2 \times (3k + 1)$ и $2 \times (3k + 2)$, а раскраски типа 3 и типа 4 подойдут только для таблиц $2 \times (3k + 2)$. То есть для досок $2 \times 3k$ и $2 \times (3k + 1)$ существует одна раскраска, удовлетворяющая условию, а для доски $2 \times (3k + 2)$ — четыре раскраски. Всего есть 2025 чисел от 2 до 2026, причём ровно треть (то есть 675) чисел дают остаток 2 при делении на 3. Значит, $a_2 + a_3 + \ldots + a_{2026} = 2025 + 3 \cdot 675 = 4050$.

● Верное решение — *20 баллов*.

● Верное решение с небольшой арифметической ошибкой в подсчёте суммы $a_2 + a_3 + \ldots + a_{2026}$ — *17 баллов*.

● Доказано, что для досок $2 \times 3k$ и $2 \times (3k + 1)$ существует одна раскраска, удовлетворяющая условию, а для доски $2 \times (3k + 2)$ — три раскраски — *11 баллов*.

● Доказано, что существует только четыре типа раскрасок — *6*

баллов.

● Только ответ — *0 баллов.*

● Нет существенных продвижений — *0 баллов.*

3. На основании AB равнобедренного треугольника ABC отмечена точка P. Точки R и Q на сторонах AC и CB таковы, что $CQPR$ — параллелограмм. Докажите, что точка, симметричная точке P относительно прямой RQ, лежит на описанной окружности треугольника ABC.

Решение. Пусть X симметрична P относительно RQ. Из симметрии следует, что $QP = QX$. Также $\angle QAP = \angle CBA = \angle QPA$, откуда $QA = QP = QX$. Значит, точки A, X и P лежат на одно окружности с центром Q. Тогда $\angle AXP = \frac{1}{2}\angle AQP = \frac{1}{2}\angle ACB$. Аналогично $\angle BXP = \frac{1}{2}\angle BRP = \frac{1}{2}\angle ACB$. Следовательно, $\angle AXB = \angle ACB$, откуда следует требуемое.

● Верное решение — *20 баллов*. За случаи, связанные с расположением точек, баллы не снимать.

● Доказано одно из равенств $\angle AXP = \frac{1}{2}\angle ACB$ или $\angle BXP = \frac{1}{2}\angle ACB$ (а второе нет) — *6 баллов.*

● Доказано, что $QX = QA = QP$ или $RX = RB = RP$ — *3 балла.* (Суммируется с предыдущим критерием).

● Нет существенных продвижений — *0 баллов.*

4. Найдите все тройки натуральных чисел a, b, c такие, что

$$(2a - 1)(2b - 1)(2c - 1) = 3abc - 2.$$

Ответ. $(a, b, c) = (1, 1, 1), (1, 3, 3), (3, 1, 3), (3, 3, 1)$.

Решение. Если все переменные не меньше 2, то $2a - 1 \geqslant \frac{3}{2}a$ (так как $\frac{a}{2} \geqslant 1$), $2b - 1 \geqslant \frac{3}{2}b$, $2c - 1 \geqslant \frac{3}{2}c$. Тогда

$$(2a - 1)(2b - 1)(2c - 1) \geqslant \frac{3}{2}a \cdot \frac{3}{2}b \cdot \frac{3}{2}c \geqslant \frac{27}{8}abc > 3abc - 2.$$

Следовательно, одна из переменных равна 1. Пусть $c = 1$. Тогда условие примет вид $(2a-1)(2b-1) = 3ab-2$, то есть $ab-2a-2b+3 = 0$, что равносильно $(a - 2)(b - 2) = 1$. А это возможно только в двух

случаях: $a - 2 = b - 2 = -1$ или $a - 2 = b - 2 = 1$. Откуда получаем решения $a = b = 1$ и $a = b = 3$.

● Верное решение — *20 баллов*.

● Верное решение, но упущен случай $a - 2 = b - 2 = -1$ — *17 баллов*.

● Доказано, что все переменные ограничены (то есть задача сведена к конечному перебору) — *9 баллов*.

● Доказано, что одна из переменных равна 1 — *6 баллов*.

● Найдены все ответы — *3 балла*. (Суммируется с двумя предыдущими критериями).

● Нет существенных продвижений — *0 баллов*.

5. Найдите все простые числа p такие, что сумма всех натуральных чисел от 1 до p включительно делится на все простые числа, не превосходящие p.

Ответ. Только $p = 3$. **Решение.** Заметим, что $p = 2$ не подходит ($1 + 2$ не делится на 2), а $p = 3$ подходит ($1 + 2 + 3$ делится на 2 и на 3). Докажем, что при $p \geqslant 5$ такое невозможно. Пусть $1 + 2 + 3 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}$ делится на все простые числа от 1 до p, то есть на $p_1 < p_2 < \ldots < p_k < p$ ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$ и т.д.). Тогда $\frac{p(p+1)}{2}$ делится на $p_1 p_2 \ldots p_k p$. То есть $\frac{p+1}{2}$ делится на $p_1 p_2 \ldots p_k$, откуда $\frac{p+1}{2} \geqslant p_1 p_2 \ldots p_k$.

Заметим, что число $p_1 p_2 \ldots p_k - 1 > 1$ при $p \geqslant 5$ и не делится ни на одно из чисел $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Значит, у него есть простой делитель, не меньший p. То есть $p_1 p_2 \ldots p_k - 1 \geqslant p$. Но $p_1 p_2 \ldots p_k \leqslant \frac{p+1}{2}$, противоречие.

● Верное решение — *20 баллов*.

● Доказано, что $\frac{p+1}{2} \geqslant p_1 p_2 \ldots p_k$ — *3 балла.*

● Разбор частных случаев p — *0 баллов.*

● Только ответ — *0 баллов.*

● Нет существенных продвижений — *0 баллов.*