Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

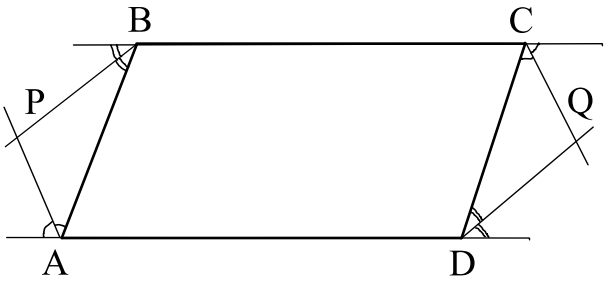
2025-2026 уч.год

9 класс

1. Напишите какое-нибудь натуральное число, которое делится на 2025, и сумма цифр которого делится на 2025. Поясните свой ответ.

2. Рассматриваются графики квадратных функций вида $y = 2x^2 + px + q$, такие, что $p + \dfrac{1}{10}q = 100$. Докажите, что все эти графики проходят через одну точку координатной плоскости.

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, биссектрисы внешних углов при вершинах C и D пересекаются в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна полупериметру параллелограмма.



4. В поселке живут Рыцари и Лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а Лжецы всегда говорят неправду. В этом поселке нескольким жителям задали два вопроса: «Есть ли у вас домашнее животное?» и «Есть ли у вас кошка?» На вопросы можно было ответить только «Да» или «Нет». На первый вопрос «Да» ответила ровно половина опрошенных, на второй вопрос «Да» ответили менее половины опрошенных. Кого больше среди тех, у кого есть домашнее животное, но нет кошки — Рыцарей или Лжецов?

5. Про натуральные числа a, b, c известно, что ab делится на 32, но не делится на 4096, bc делится на 128, но не делится на 512, ac делится на 256, но не делится на 1024. Делится ли $a + b + c$ на 4?

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

9 класс

1. Напишите какое-нибудь натуральное число, которое делится на 2025, и сумма цифр которого делится на 2025. Поясните свой ответ.

   Решение.

   $$\underbrace{2025\,2025\ldots 2025}_{225\text{ раз}}$$

   Сумма цифр равна $9 \cdot 225 = 2025$.

2. Рассматриваются графики квадратных функций вида $y = 2x^2 + px + q$, такие, что $p + \dfrac{1}{10}q = 100$. Докажите, что все эти графики проходят через одну точку координатной плоскости.

   Решение. Выразим q:

   $$q = 1000 - 10p$$

   Уравнение функции имеет вид

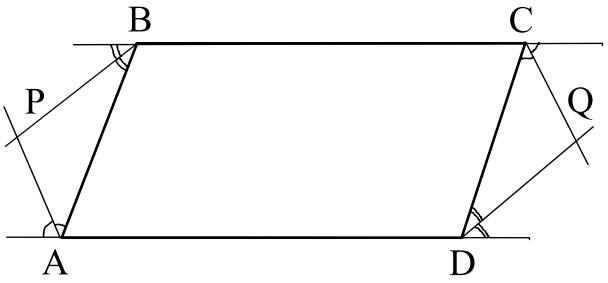
   $$y = 2x^2 + px + 1000 - 10p$$

   Подставим $x = 10$, получим

   $$y = 2p \cdot 100 + p \cdot 10 + 1000 - 10p = 1200$$

   Все графики функций проходят через точку $(10; 1200)$.

3. В параллелограмме $ABCD$ биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, биссектрисы внешних углов при вершинах C и D пересекаются в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна полупериметру параллелограмма.



   Решение.



Так как точка P принадлежит биссектрисе угла FAB, она равноудалена от лучей AF и AB (см. рис). Аналогично эта точка равноудалена от лучей BA и BE. Таким образом, точка P находится на равном расстоянии от прямых AD и BC. Аналогично точка Q находится на равном расстоянии от прямых AD и BC. Поэтому прямая PQ проходит через середины сторон AB и CD, точки M и N.

Так как сумма углов FAB и ABE равна $180°$, то полусумма этих углов — $90°$, и треугольник APB прямоугольный. В нем отрезок PM является медианой, поэтому $PM = \dfrac{AB}{2}$.

Точно так же доказывается, что $QN = \dfrac{CD}{2} = \dfrac{AB}{2}$.

Так как $AMND$ — параллелограмм, то $MN = AD$.

Итак, $PQ = PM + MN + NQ = AB + AD$, это и требовалось доказать.

4. В поселке живут Рыцари и Лжецы. Рыцари всегда говорят правду, а Лжецы всегда говорят неправду. В этом поселке нескольким жителям задали два вопроса: «Есть ли у вас домашнее животное?» и «Есть ли у вас кошка?» На вопросы можно было ответить только «Да» или «Нет». На первый вопрос «Да» ответила ровно половина опрошенных, на второй вопрос «Да» ответили менее половины опрошенных. Кого больше среди тех, у кого есть домашнее животное, но нет кошки — Рыцарей или Лжецов?

   Решение.

   Рыцари, у которых нет домашнего животного, на первый вопрос ответили «Нет», на второй ответили «Нет».

   Рыцари, у которых есть кошка, на первый вопрос ответили «Да», на второй ответили «Да».

   Рыцари, у которых есть домашнее животное, но не кошка, на первый вопрос ответили «Да», на второй ответили «Нет».

   Рыцари не могли ответить «Нет» — «Да».

   Лжецы, у которых нет домашнего животного, на первый вопрос ответили «Да», на второй ответили «Да».

   Лжецы, у которых есть кошка, на первый вопрос ответили «Нет», на второй — «Нет».

   Лжецы, у которых есть домашнее животное, но не кошка, на первый вопрос ответили «Нет», на второй — «Да».

   Лжецы не могли ответить «Да» — «Нет».

   Итак, пары ответов Рыцарей: Нет-Нет, Да-Да, Да-Нет. Пары ответов Лжецов: Нет-Нет, Да-Да, Нет-Да.

   На первый вопрос ответили «Да» все, кто сказал «Да-Да», и еще Рыцари, сказавшие «Да-Нет». На второй вопрос ответили «Да» те, кто сказал «Да-Да», и еще Лжецы, сказавшие «Нет-Да». Отсюда рыцарей с ответами «Да-Нет» больше, чем Лжецов с ответами «Нет-Да». Значит, Рыцарей, имеющих домашнее животное, но не имеющих кошки, больше, чем Лжецов.

   Ответ. Рыцарей, имеющих домашнее животное, но не имеющих кошки, больше, чем Лжецов.

5. Про натуральные числа a, b, c известно, что ab делится на 32, но не делится на 4096, bc делится на 128, но не делится на 512, ac делится на 256, но не делится на 1024. Делится ли $a + b + c$ на 4?

   Решение.

   Пусть $a = a_0 \cdot 2^x, b = b_0 \cdot 2^y, c = c_0 \cdot 2^z$, где a_0, b_0, c_0 не делятся на 2, x, y, z целые неотрицательные числа. Тогда

$$\begin{cases} x + y \geqslant 5, \\ x + y < 12, \\ y + z \geqslant 7, \\ y + z < 9, \\ x + z \geqslant 8, \\ x + z < 10. \end{cases}$$

   Посмотрим, какие значения могут принимать x, y, z.

   Если $x = 0$, то y не меньше 5, z не меньше 8, и тогда $y + z$ не меньше 13, это противоречит $y + z < 9$.

   Если $x = 1$, то y не меньше 4, z не меньше 7, и тогда $y + z$ не меньше 11, это противоречит $y + z < 9$.

   Если $y = 0$, то x не меньше 5, z не меньше 7, и тогда $x + z$ не меньше 12, это противоречит $x + z < 10$.

   Если $y = 1$, то x не меньше 4, z не меньше 6, и тогда $x + z$ не меньше 10, это противоречит $x + z < 10$.

   Если $z = 0$, то x не меньше 8, y не меньше 7, и тогда $x + z$ не меньше 15, это противоречит $x + y < 12$.

   Если $z = 1$, то x не меньше 7, y не меньше 6, и тогда $x + z$ не меньше 13, это противоречит $x + y < 12$.

   Существует решение системы $x = 6, y = 5, z = 2$. Т.е. каждое из чисел a, b, c делится на 4, поэтому сумма $a + b + c$ делится на 4.

   В общем случае, все остальные решения системы удовлетворяют условиям $x \geqslant 2, y \geqslant 2, x \geqslant 2$.

   Ответ. Делится.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!