Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

8 класс

1. При каких значениях коэффициентов a, b, c три прямые $y = ax+b$, $y = bx+c$, $y = cx+a$, проведенные на координатной плоскости, пересекаются в точке $(2; 2)$?

2. Имеется мешок с 25 кг сахарного песка, рычажные весы, гиря в 1 кг и несколько чашек. Можно ли за два взвешивания отмерить 19 кг сахара?

3. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна длине отрезка LC, $AC = 2AB$ (точка L лежит на BC). Найдите величину угла ABC.

4. 12 студентов ответили на вопросы экзаменационного теста. Известно, что каждый студент ответил правильно на все вопросы, кроме четырех, и на каждый вопрос правильно ответили все студенты, кроме трех. Сколько вопросов в тесте?

5. На какую максимальную степень числа 3 делится число

$$3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot 3\,333 \cdot 33\,333 \cdot 333\,333 \cdot 3\,333\,333 \cdot 33\,333\,333 \cdot 333\,333\,333 \cdot 3\,333\,333\,333\,?$$

Написано произведение десяти чисел, в каждом из которых на одну цифру 3 больше предыдущего.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

8 класс

1. При каких значениях коэффициентов a, b, c три прямые $y = ax+b$, $y = bx+c$, $y = cx+a$, проведенные на координатной плоскости, пересекаются в точке $(2; 2)$?

   Решение.

   Подстановка координаты точки $(2; 2)$ в уравнения всех трех прямых приводит к системе

   $$\begin{cases} 2a + b = 2, \\ 2b + c = 2, \\ 2c + a = 2. \end{cases}$$

   Сложим все три уравнения и получим

   $$3a + 3b + 3c = 6$$

   $$a + b + c = 2$$

   Приравняем левые части полученного уравнения и первого уравнения.

   $$a + b + c = 2a + b$$

   Получим

   $$a = c$$

   Аналогично $b = c$. Тогда $3a = 2$,

   $$a = b = c = \frac{2}{3}$$

   Ответ. $a = b = c = \frac{2}{3}$.

2. Имеется мешок с 25 кг сахарного песка, рычажные весы, гиря в 1 кг и несколько чашек. Можно ли за два взвешивания отмерить 19 кг сахара?

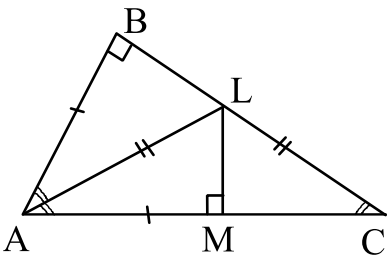
   Решение.

   Это возможно. Первым взвешиванием делим весь сахар на две части 12 и 13 кг. Для этого на одну чашу весов кладем гирю 1 кг и высыпаем весь сахар на весы так, чтобы весы оказались в равновесии. Вторым взвешиванием делим 12 кг поровну, уравновесив две части на весах. Получаем 6 кг сахара. Сложив 13 кг и 6 кг, получаем 19 кг сахара.

   Ответ. Это возможно.

3. В треугольнике ABC длина биссектрисы AL равна длине отрезка LC, $AC = 2AB$ (точка L лежит на BC). Найдите величину угла ABC.

Решение.



Отметим на AC точку M – середину AC. Треугольники ABL и ALM равны, так как у них есть равные углы при вершине A, и равны стороны: AL – общая сторона, $AB = AM$ по условию. В равнобедренном треугольнике ALC $AL = LC$ по условию, поэтому медиана LM является и высотой. Получили, что угол LMA прямой, откуда угол ABC в треугольнике ABL тоже прямой.

Ответ. $90°$.

4. 12 студентов ответили на вопросы экзаменационного теста. Известно, что каждый студент ответил правильно на все вопросы, кроме четырех, и на каждый вопрос правильно ответили все студенты, кроме трех. Сколько вопросов в тесте?

Решение. Пусть в тесте n вопросов. Посчитаем двумя способами количество пар "студент — вопрос, на который дан верный ответ".
Один студент ответил верно на $n - 4$ вопроса, поэтому число верных ответов равно $12(n - 4)$.
На каждый вопрос ответили верно 9 студентов, потому общее число верных ответов равно $9n$.
Получаем, что $12(n - 4) = 9n$, откуда $n = 16$.

Ответ. 16.

5. На какую максимальную степень числа 3 делится число

$$3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot 3\,333 \cdot 33\,333 \cdot 333\,333 \cdot 3\,333\,333 \cdot 33\,333\,333 \cdot 333\,333\,333 \cdot 3\,333\,333\,333\,?$$

Написано произведение десяти чисел, в каждом из которых на одну цифру 3 больше предыдущего

Решение.

$$3 \cdot 33 \cdot 333 \cdot 3\,333 \cdot 33\,333 \cdot 333\,333 \cdot 3\,333\,333 \cdot 33\,333\,333 \cdot 333\,333\,333 \cdot 3\,333\,333\,333$$

$$3^{10} \cdot (1 \cdot 11 \cdot 111 \cdot 1\,111 \cdot 11\,111 \cdot 111\,111 \cdot 1\,111\,111 \cdot 11\,111\,111 \cdot 111\,111\,111 \cdot 1\,111\,111\,111)$$

В произведении, написанном в скобках, числа 111, 111 111 делятся на 3 (сумма цифр делится на 3 и не делится на 9), и число 111 111 111 делится на 9:

$$111\,111\,111 = 9 \cdot 12345679$$

Число 12 345 679 на 3 не делится, его сумма цифр равна 37.

В итоге получается 14 троек в произведении.

Ответ. Число делится на 3^{14} и не делится на 3^{15}.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!