Ленинградская область

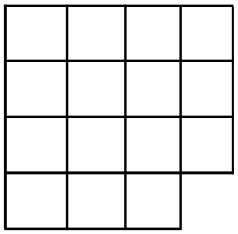
Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

6 класс

1. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на три равных по форме и по площади части. Разрезы можно проводить только по линиям сетки.



2. Имеется три одинаковых по виду монеты и чашечные весы без гирь. Известно, что две монеты настоящие, и весят одинаково, а третья монета фальшивая, причем она может оказаться и легче, и тяжелее остальных. За какое минимальное количество взвешиваний можно гарантированно найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее?

3. В локальной компьютерной сети ввели правило: когда один компьютер посылает другому какое-то сообщение, компьютер-получатель должен в ответ отправить два сообщения, основное и резервное. На этом обмен сообщениями между этими компьютерами останавливается. Может ли так получиться, что в какой-то день компьютеры все вместе отправили ровно 1000 сообщений?

4. Какая наименьшая степень числа 150 делится на 2025^{2025}?

5. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых встречается сочетание цифр 1234? (Без разрывов, в том же порядке).

6. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Двое из них заявили: ”Оба моих соседа — лжецы”, а остальные восемь заявили: ”Оба моих соседа — рыцари”. Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек?
(*Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

Продолжительность выполнения заданий – 3 астрономических часа (180 минут). Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.

Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

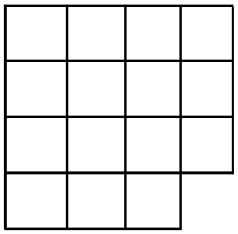
Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

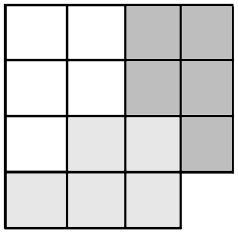
2025-2026 уч.год

6 класс

1. Разрежьте фигуру, показанную на рисунке, на три равных по форме и по площади части. Разрезы можно проводить только по линиям сетки.



Решение.



2. Имеется три одинаковых по виду монеты и чашечные весы без гирь. Известно, что две монеты настоящие, и весят одинаково, а третья монета фальшивая, причем она может оказаться и легче, и тяжелее остальных. За какое минимальное количество взвешиваний можно гарантированно найти фальшивую монету и определить, легче она или тяжелее?

Решение. Обозначим веса монет $M1, M2, M3$. Проведем два взвешивания.

Взвесим (сравним) $M1$ и $M2$.

Если $M1 = M2$, то третья монета фальшивая, и вторым взвешиванием мы сравним $M2$ и $M3$. Так мы узнаем, будет ли фальшивая легче или тяжелее.

Если $M1 < M2$, то вторым взвешиванием сравним $M2$ и $M3$. Результат $M2 < M3$ невозможен, так как тогда все три монеты имеют разный вес: $M1 < M2 < M3$. Если получится, что $M2 = M3$, то монеты $M2$ и $M3$ настоящие, а монета $M1$ фальшивая, и она легче. Если получится, что $M2 > M3$, то монеты $M1$ и $M3$ настоящие, а монета $M2$ фальшивая, и она тяжелее.

Ответ. За два взвешивания.

3. В локальной компьютерной сети ввели правило: когда один компьютер посылает другому какое-то сообщение, компьютер-получатель должен в ответ отправить два сообщения, основное и резервное. На этом обмен сообщениями между этими компьютерами останавливается. Может ли так получиться, что в какой-то день компьютеры все вместе отправили ровно 1000 сообщений?

   Решение. Рассмотрим пару компьютеров, которые обменялись сообщениями. Всего они отправили три сообщения. Поэтому общее число сообщений, которые отправлены в течение дня, делитсся на 3. Так как 1000 не делится на 3, то общее количество сообщений не могло быть равным 1000.

   Ответ. Общее число сообщений в день не могло равняться 1000.

4. Какая наименьшая степень числа 150 делится на 2025^{2025}?

   Решение.

$$2025 = 3^4 \cdot 5^2$$

$$2025^{2025} = 3^{8100} \cdot 5^{4050}$$

$$150 = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$$

$$150^n = 2^n \cdot 3^n \cdot 5^{2n}$$

   Необходимо, чтобы в последнем выражении было достаточно степеней троек и пятерок, чтобы выражение делилось на $3^{8100} \cdot 5^{4050}$.

   Необходимо обеспечить делимость на 3^{8100}. Значит, показатель степени n должен быть не меньше 8100. 150^n в степени 8100 будет делиться на 5^{4050}.

   Наименьшая степень — 8100.

   Ответ. 8100.

5. Сколько существует шестизначных чисел, в записи которых встречается сочетание цифр 1234? (без разрывов, в том же порядке).

   Решение. Шестизначные числа, которые нам нужны, имеют вид

$$_\ _\ 1234; \quad _\ 1234\ _; \quad 1234\ _\ _$$

   где знаком _ указаны разряды, на которые нужно поставить оставшиеся две цифры. В первый разряд можно поставить одну из цифр $1, 2, \ldots, 9$, во второй, пятый, шестой разряды можно поставить любую из цифр.

   Таким образом, имеется $9 \cdot 10 = 90$ вариантов расставить цифры в числах вида _ _ 1234 и _ 1234 _. Имеется $10 \cdot 10 = 90$ вариантов расставить цифры в числах вида 1234 _ _. Всего получается $90 + 90 + 100 = 280$ шестизначных чисел.

6. За круглым столом сидят 10 человек, каждый из которых либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Двое из них заявили: "Оба моих соседа — лжецы", а остальные восемь заявили: "Оба моих соседа — рыцари". Сколько рыцарей могло быть среди этих 10 человек?
(*Перечислите все возможные варианты и докажите, что других нет.*)

   Решение. Ни один из рыцарей не мог сказать "Оба моих соседа — рыцари". Если бы это было верно, то рядом с кем-то из рыцарей сидели бы два рыцаря. Ни один из них не мог бы сказать: "Оба моих соседа — лжецы", и тогда им остается сказать: "Оба моих соседа — рыцари". Продвигаясь далее по кругу, мы получим, что ни с одним из рыцарей не может рядом сидеть лжец, т.е. лжецов за столом нет совсем. Это значит, что не найдутся рыцари, которые скажут "Оба моих соседа — лжецы".

   Не может оказаться, что рыцарей нет совсем. В таком случае лжец, который сказал бы: "Оба моих соседа — лжецы", сказал бы правду.

   Случаи одного и двух рыцарей возможны.

   Если рыцарь один, то он скажет: "Оба моих соседа — лжецы", а его соседи-лжецы скажут: "Оба моих соседа — рыцари" и "Оба моих соседа — лжецы", и это будет неверно. Остальные семь лжецов, у которых соседи лжецы, скажут: "Оба моих соседа — рыцари", и это будет соответствовать условию задачи.

   Если рыцарей двое, то посадим между ними двух или более лжецов — главное, чтобы между рыцарями не оказался один лжец. При такой рассадке фразы обоих рыцарей "Оба моих соседа — лжецы" будут верными, а фразы восьми лжецов "Оба моих соседа — рыцари" будут неверными.

   Ответ. Рыцарей может быть один или два.

Продолжительность выполнения заданий – 3 астрономических часа (180 минут). Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!