Ленинградская область

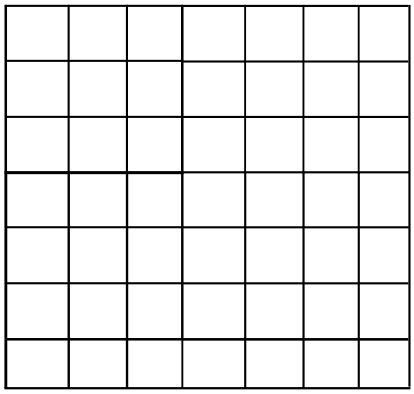
Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

5 класс

1. Можно ли в квадрате 7×7 закрасить некотрые клетки так, чтобы в любом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?



2. Имеется мешок с 16 кг сахарного песка и рычажные весы без гирь и несколько чашек. Можно ли отмерить 13 кг сахара?

3. На доске написано 50 последовательных натуральных чисел. При этом на доске написано 126 цифр. Какие числа написаны на доске?

4. На 9 карточках пишут числа $1, 2, \ldots, 9$, причём каждое ровно один раз, перемешивают их и раскладывают чистыми сторонами вверх. Затем снова пишут числа $1, 2, \ldots, 9$. Для каждой карточки складывают два ее числа, после чего, полученные 9 сумм перемножают. Докажите, что после перемножения этих сумм получится четное число.

5. Делится ли число $27^{10} + 29^{10}$ на 10?

6. На празднике в большой компании встретились Иванов, Петров, Сидоров. Их профессии: программист, математик и инженер. У программиста нет ни братьев, ни сестер, и он самый младший из троих. Сидоров старше математика и женат на сестре Иванова. Назовите фамилии программиста, математика и инженера.

Продолжительность выполнения заданий – 3 астрономических часа (180 минут). Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.

Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

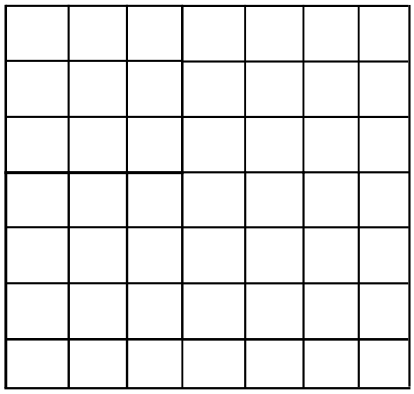
Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

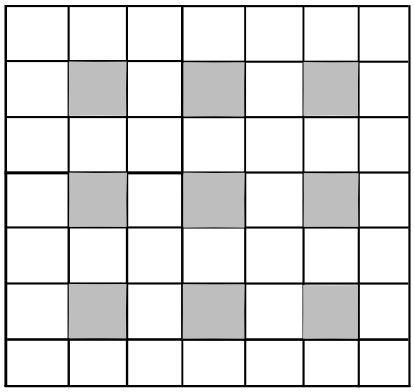
2025-2026 уч.год

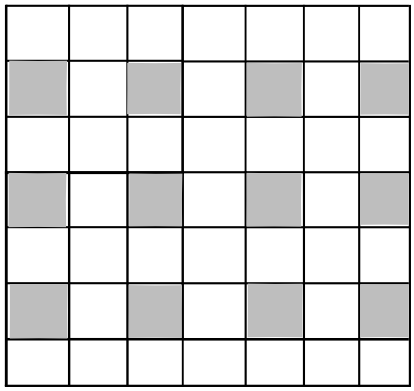
5 класс

1. Можно ли в квадрате 7×7 закрасить некотрые клетки так, чтобы в любом квадрате 2×2 была ровно одна закрашенная клетка?



Решение.





2. Имеется мешок с 16 кг сахарного песка и рычажные весы без гирь и несколько чашек. Можно ли отмерить 13 кг сахара?

   Решение.

   Это возможно. Первым взвешиванием делим весь сахар на две части 8 и 8 кг, Далее делим сахар из одной части на 4 кг и 4 кг, затем делим на 2 кг и 2 кг, последним взвешиванием делим сахар на 1 кг и 1 кг. Чтобы получить 13 кг, нужно собрать вместе кучки 8 кг, 4 кг и 1 кг.

   Ответ. Это возможно.

3. На доске написано 50 последовательных натуральных чисел. При этом на доске написано 126 цифр. Какие числа написаны на доске?

   Решение. Если бы все числа были двузначными, на доске было бы написано 100 цифр. Если бы написанный ряд начинался с однозначных чисел, то цифр было бы меньше 100. Так как на самом деле цифр на 26 больше, чем 100, то последние 26 чисел этого ряда — трехзначные. Поэтому на доске написаны 24 последних двузначных чисел и 26 первых трехзначных, т.е. числа

   $$76, 77, 78, 79, 80, \ldots 89, 90, \ldots 99, 100, 101, \ldots 109, 110, \ldots 119, 120, 121, 122, 123, 124, 125$$

   Ответ. $76, 77, \ldots 124, 125$.

4. На 9 карточках пишут числа $1, 2, \ldots, 9$, причём каждое ровно один раз, перемешивают их и раскладывают чистыми сторонами вверх. Затем снова пишут числа $1, 2, \ldots, 9$. Для каждой карточки складывают два ее числа, после чего, полученные 9 сумм перемножают. Докажите, что после перемножения этих сумм получится четное число.

   Решение. Результат перемножения будет нечетным, если все девять сумм будут нечетными. В любом другом случае при перемножении девяти чисел получится четное произведение.

   Нечетное число при сложении двух чисел можно получить, только если сложить четное с нечетным. Для этого все числа, которые складываем, должны образовать пары "четное – нечетное". Т.е. нечетных чисел должно быть столько же, сколько четных. Это невозможно по условию нашей задачи: в наборе $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ есть пять нечетных и четыре четных числа, они не разбиваются в пары "четное – нечетное". Поэтому хотя бы одна пара будет составлять сумму двух нечетных чисел, это даст четную сумму, а это приведет к тому, что произведение будет четным.

5. Делится ли число $27^{10} + 29^{10}$ на 10?

   Решение. Делимость на 10 определяется последней цифрой числа.

   Последняя цифра числа 7 в разных степенях образует цикл длины 4:

   $$7 \to 9 \to 3 \to 1 \to 7 \to 9 \to 3 \to 1 \ldots$$

   Десятая степень имеет такую же последнюю цифру, как и вторая степень: $10 = 2 \cdot 4 + 2$.

   Получили, что последняя цифра числа 27^{10} — это 9.

   Последняя цифра числа 9 в разных степенях образует цикл длины 2:

   $$9 \to 1 \to 9 \to 1 \ldots$$

   Десятая степень имеет такую же последнюю цифру, как и вторая степень: $10 = 5 \cdot 4$.

   Получили, что последняя цифра числа 29^{10} — это 1.

   Сумма последних цифр $9 + 1$ дает 0. Значит, число делится на 10.

   Ответ. Делится.

6. На празднике в большой компании встретились Иванов, Петров, Сидоров. Их профессии: программист, математик и инженер. У программиста нет ни братьев, ни сестер, и он самый младший из троих. Сидоров старше математика и женат на сестре Иванова. Назовите фамилии программиста, математика и инженера.

   Решение. Так как у программиста нет ни братьев, ни сестер, то он не Иванов (у Иванова есть сестра). Так как программист самый младший, а Сидоров старше по крайней мере одного человека, то программист — не Сидоров. Остается один вариант: программист — это Петров. Так как Сидоров старше математика, то математик — не Сидоров, значит, математик — Иванов. И тогда инженер — это Сидоров.

   Ответ. Программист — Петров, математик — Иванов, инженер — Сидоров.

Продолжительность выполнения заданий – 3 астрономических часа (180 минут). Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 42 балла за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!