Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

11 класс

1. По кругу расставили 105 натуральных чисел. Докажите, что число пар соседей разной четности четно.

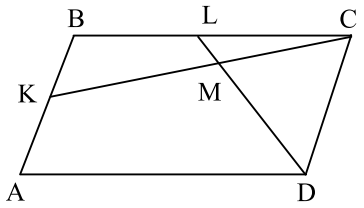
2. В кубе со стороной 1 размещено 2025 точек. Докажите, что найдутся три точки, которые можно заключить в сферу с радиусом $\frac{1}{11}$.

3. Учитель написал на доске натуральное число, назовем его n, дал задание найти все его делители (включая 1 и само число), разделить число $n-1$ с остатком на каждый из найденных делителей, написать все найденные остатки на листок и сдать на проверку. Вася невнимательно выполнил задание: написал на листке все найденные неполные частные. Докажите, что Васин набор чисел будет засчитан как полностью правильный.
   Разделить число y на x с остатком — это значит представить y как

   $$y = xq + r, 0 \leqslant r < x$$

   q называется неполным частным, r — остаком.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны AB, точка L — середина стороны BC, точка M — точка пересечения CK и DL. Найдите отношение площади четырехугольника $BKML$ к площади параллелограмма $ABCD$.



5. Область определения функции $f(x)$ — все действительные числа. Для любого x выполнено

   $$f(f(f(x))) = 0$$

   Какое наименьшее число корней может иметь функция $f(x)$?

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

11 класс

1. По кругу расставили 105 натуральных чисел. Докажите, что число пар соседей разной четности четно.

   Решение. Если все числа одной четности, то нет соседних чисел, у которых четность разная, поэтому число таких пар соседей 0, т.е. четное число (0 — четное число).

   Пусть в кругу есть и четное число, и нечетное. Возьмем какое-нибудь четное число и пройдем круг, начав с этого числа. Будем отмечать переходы от четного числа к нечетному и от нечетного к четному. Когда мы вернемся к исходному числу, число переходов от четного к нечетному будет равно числу переходов от нечетного к четному, они чередуются. Поэтому общее число переходов, а значит и число пар соседей разной четности будет четно.

2. В кубе со стороной 1 размещено 2025 точек. Докажите, что найдутся три точки, которые можно заключить в сферу с радиусом $\frac{1}{11}$.

   Решение. Разделим куб на 1000 кубиков со стороной $\frac{1}{10}$. Найдется хотя бы один кубик, содержащий три точки, иначе число точек не превышало бы 2000. Так как диагональ этого кубика, равная $\frac{\sqrt{3}}{10}$, меньше $\frac{2}{11}$, то такой кубик можно целиком поместить в сферу с радиусом $\frac{1}{11}$.

3. Учитель написал на доске натуральное число, назовем его n, дал задание найти все его делители (включая 1 и само число), разделить число $n-1$ с остатком на каждый из найденных делителей, написать все найденные остатки на листок и сдать на проверку. Вася невнимательно выполнил задание: написал на листке все найденные неполные частные. Докажите, что Васин набор чисел будет засчитан как полностью правильный.
   Разделить число y на x с остатком — это значит представить y как

   $$y = xq + r, 0 \leqslant r < x$$

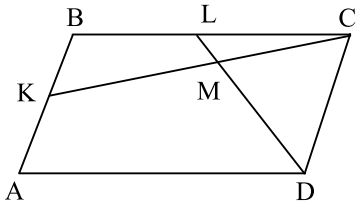
   q называется неполным частным, r — остаком.

   Решение. Пусть дано число n. Пусть a и b — его пара делителей, т.е. $n = ab$. Подставим это произведение в $n-1$ и преобразуем к форме деления на a с остатком

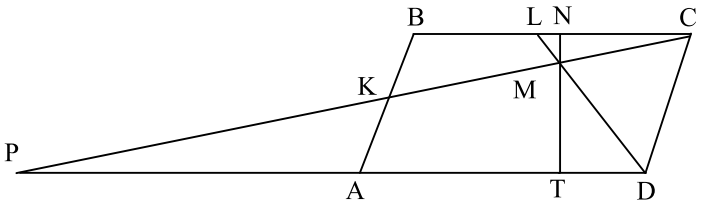
   $$n - 1 = ab - 1 = a(b-1) + a - 1$$

   Сравнив с формулой деления с остатком $n - 1 = aq + r$, $0 \leqslant r < a$, видим, что неполное частное q оказалось равным $b-1$. Поэтому каждая пара делителей a и b числа n участвует в записи деления с остатком дважды — один раз получается неполное частное $b-1$ и остаток $a-1$, второй раз неполное частное $a-1$ и остаток $b-1$. Поэтому, выписав все неполные частные, Вася написал весь набор остатков.

4. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина стороны AB, точка L — середина стороны BC, точка M — точка пересечения CK и DL. Найдите отношение площади четырехугольника $BKML$ к площади параллелограмма $ABCD$.



Решение.



Способ 1.
Продлим CK до пересечения с прямой AD в точке P. Треугольники PAK и KBC равны (т.к. $AK = KB$ и углы, прилежащие к этим сторонам, равны). Отсюда $PD = 2BC = 4LC$. Треугольники LMC и PMD подобны по двум углам с коэффициентом $1 : 4$. Проведем отрезок NT через точку M, перпендикулярный BC и AD. MN и MT — высоты треугольников LMC и PMD, $\dfrac{MN}{MT} = \dfrac{1}{4}$, тогда

$$\frac{MN}{NT} = \frac{1}{5},\ \frac{LC}{AD} = \frac{1}{2}$$

Отсюда

$$\frac{S(CLM)}{S(ABCD)} = \frac{\frac{1}{2}LC \cdot MN}{AD \cdot NT} = \frac{1}{20}$$

Так как $BK = \dfrac{1}{2}AB$, то

$$S(CBK) = \frac{1}{4}S(ABCD)$$

$$S(BKLM) = S(CBK) - S(CLM) = \frac{1}{4}S(ABCD) - \frac{1}{20}S(ABCD) = \frac{1}{5}S(ABCD)$$

Способ 2, дополнительный.
По известной теореме об отношении площадей треугольников с общим углом

$$\frac{S(CLM)}{S(CBK)} = \frac{CL \cdot CM}{CB \cdot CK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{CM}{CK}$$

Найдем $\dfrac{CM}{CK}$. Решим задачу векторным методом.

Пусть $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{a},\ \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{b}$

$$\overrightarrow{DM} = \alpha\overrightarrow{DK} + \beta\overrightarrow{DC},\quad \alpha + \beta = 1$$

$$\overrightarrow{DM} = \alpha\left(\overrightarrow{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{b}\right) + \beta\,\overrightarrow{b} = \alpha\,\overrightarrow{a} + \left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\overrightarrow{b}$$

$$\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DL} = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC}\right) = \frac{k}{2}\left(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{b}\right) = \frac{k}{2}\overrightarrow{a} + k\overrightarrow{b}$$

$$\begin{cases} \alpha = \dfrac{k}{2} \\ \dfrac{\alpha}{2} + \beta = k \\ \alpha + \beta = 1 \end{cases}$$

Решение системы

$$k = \frac{4}{5}, \alpha = \frac{2}{5}, \beta = \frac{3}{5}$$

Напишем отношения

$$\frac{DM}{LM} = \frac{4}{1}, \ \frac{CM}{KM} = \frac{2}{3}, \ \frac{CM}{CK} = \frac{2}{5}$$

$$S(CLM) = \frac{1}{5}S(CBK)$$

$$S(CBK) = \frac{1}{4}S(ABCD) \qquad S(CLM) = \frac{1}{20}S(ABCD)$$

$$S(BKLM) = S(CBK) - S(CLM) = \frac{1}{4}S(ABCD) - \frac{1}{20}S(ABCD) = \frac{1}{5}S(ABCD)$$

Ответ. $\dfrac{S(BKLM)}{S(ABCD)} = \dfrac{1}{5}$.

5. Область определения функции $f(x)$ — все действительные числа. Для любого x выполнено

$$f(f(f(x))) = 0$$

Какое наименьшее число корней может иметь функция $f(x)$?

Решение. Пусть функция имеет один корень, назовем его a. Тогда $f(a) = 0$. Так как корень единственный, то для всех x $f(f(x)) = a$.
Подставим $x = a$. Тогда $f(a) = 0$, $f(f(a)) = f(0) = a$.
Подставим $x = 0$. Тогда $f(0) = a$, $f(f(0)) = f(a) = 0$. Но во всех точках, в том числе и в 0, значение $f(f(x)) = a$. Получили, что $a = 0$.
Значит, единственный корень — это 0, т.е. $f(0) = 0$.
Но тогда, с учетом $f(f(f(x))) = 0$ при всех x, $f(f(x)) = 0$, тогда $f(x) = 0$ при всех x.
Это противоречит тому, что корень единственный.

Пример, при котором функция имеет два корня.

Пусть $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, $f(x) = 1$ при $x \neq 0, x \neq 1$.

Проверим значения $f(f(f(x)))$:
$f(f(f(0))) = f(f(0)) = f(0) = 0$
$f(f(f(1))) = f(f(0)) = f(0) = 0$
$f(f(f(x))) = f(f(1)) = f(0) = 0$, $x \neq 0, x \neq 1$.

Ответ. Два корня.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!