Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

10 класс

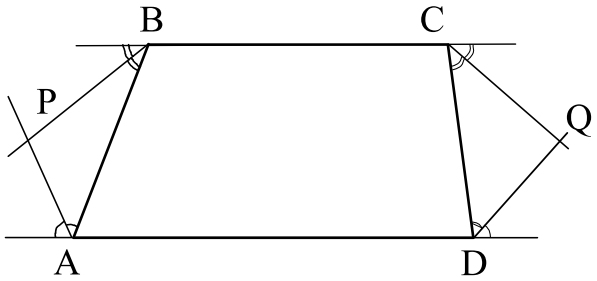
1. Найдите наименьшее целое число, которое является решением неравенства

$$(x+3)^5 + (x-3)^5 \geqslant 5000$$

2. В саду в ряд растет 10 яблонь, на каждой из которых созрели яблоки. Во время сбора урожая садовник заметил, что количество яблок, собранных на соседних яблонях, отличается ровно в два раза, и с разных яблонь он собрал разное количество яблок. Может ли садовник разложить все собранные яблоки в 10 ящиков, если в каждый ящик входит не больше 100 яблок?

3. Одно и то же число разделили с остатком сначала на 12, затем на 13. Сумма неполного частного, полученного при делении на 12, и остатка, полученного при делении на 13, равна 14. Найдите остаток от деления данного числа на 12.

4. В трапеции $ABCD$ биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, биссектрисы внешних углов при вершинах C и D пересекаются в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна полупериметру трапеции.



5. Даны натуральные числа a, b, c, d, такие, что, d — наибольшее из них, и выполняется

$$(ab+cd)(bc+ad)(ac+bd) = (d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2.$$

Докажите, что $d = a + b + c$.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!

Ленинградская область

Всероссийская олимпиада школьников по математике

Муниципальный этап

2025-2026 уч.год

10 класс

1. Найдите наименьшее целое число, которое является решением неравенства

$$(x+3)^5 + (x-3)^5 \geqslant 5000$$

Решение. Так как $f(x) = (x+3)^5 + (x-3)^5$ — возрастающая функция (сумма двух возрастающих функций), то достаточно проверить

$$f(2) = 3125 < 5000, \qquad f(3) = 7776 > 5000$$

Ответ. 3.

2. В саду в ряд растет 10 яблонь, на каждой из которых созрели яблоки. Во время сбора урожая садовник заметил, что количество яблок, собранных на соседних яблонях, отличается ровно в два раза, и с разных яблонь он собрал разное количество яблок. Может ли садовник разложить все собранные яблоки в 10 ящиков, если в каждый ящик входит не больше 100 яблок?

Решение. Пусть на какой-то яблоне выросло самое малое возможное количество яблок, т.е. одно. Тогда количество яблок на яблонях образует геометрическую прогрессию с первым членом 1, знаменателем 9 и последним членом 512. Сумма членов этой прогрессии 1023, т.е. наименьшее суммарное количество яблок, удовлетворяющих услоию, равно 1023. Это число больше 1000, поэтому разложить яблоки в 10 ящиков невозможно.

3. Одно и то же число разделили с остатком сначала на 12, затем на 13. Сумма неполного частного, полученного при делении на 12, и остатка, полученного при делении на 13, равна 14. Найдите остаток от деления данного числа на 12.

Решение.

Запишем результаты делений с остатками данного числа a в виде

$$a = 12q_1 + r_1 = 13q_2 + r_2$$

Прибавим к этой сумме слева и справа q_1.

$$a = 12q_1 + q_1 + r_1 = 13q_2 + q_1 + r_2$$

С учетом условия $q_1 + r_2 = 14$, получим

$$a = 13q_1 + r_1 = 13q_2 + 14$$

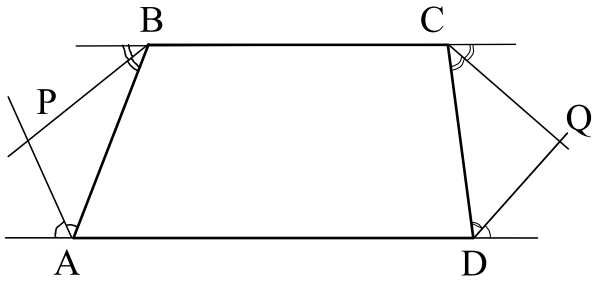
Так как r_1 — это остаток от деления на 12, то r_1 может быть только $0, 1, \ldots, 11$, т.е. меньше 13. Значит, левая часть равенства представляет собой запись деления числа a на 13 с остатком. Поэтому справа тоже записан результат деления на 13 с остатком,

$$a = 13q_1 + r_1 = 13q_2 + 13 + 1 = 13(q_2 + 1) + 1$$

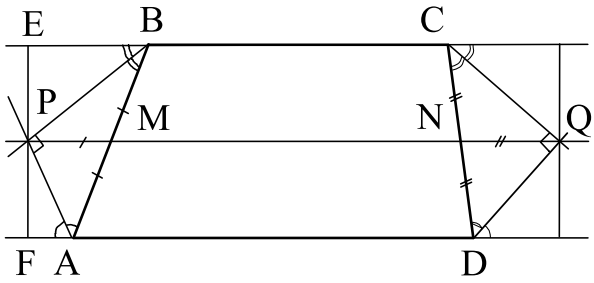
Отсюда $r_1 = 1$.

Ответ. 1.

4. В трапеции $ABCD$ биссектрисы внешних углов при вершинах A и B пересекаются в точке P, биссектрисы внешних углов при вершинах C и D пересекаются в точке Q. Докажите, что длина отрезка PQ равна полупериметру трапеции.



Решение.



Так как точка P принадлежит биссектрисе угла FAB, она равноудалена от лучей AF и AB (см. рис). Аналогично эта точка равноудалена от лучей BA и BE. Таким образом, точка P находится на равном расстоянии от прямых AD и BC. Аналогично точка Q находится на равном расстоянии от прямых AD и BC. Поэтому прямая PQ проходит через середины сторон AB и CD, точки M и N.

Так как сумма углов FAB и ABE равна $180°$, то полусумма этих углов — $90°$, и треугольник APB прямоугольный. В нем отрезок PM является медианой, поэтому $PM = \dfrac{AB}{2}$.

Точно так же доказывается, что $QN = \dfrac{CD}{2}$.

Так как $ABCD$ — трапеция, то $MN = \dfrac{AD + BC}{2}$.

Итак, $PQ = PM + MN + NQ = \dfrac{AB}{2} + \dfrac{AD + BC}{2} + \dfrac{CD}{2}$, это и требовалось доказать.

5. Даны натуральные числа a, b, c, d, такие, что, d — наибольшее из них, и выполняется

$$(ab + cd)(bc + ad)(ac + bd) = (d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2.$$

Докажите, что $d = a + b + c$.

Решение.

Покажем, что если $d \neq a + b + c$, то равенство, данное в условии, не выполняется.

Пусть $a + b + c > d$. Тогда

$$ab + cd - (d - a)(d - b) = ab + cd - (d^2 - ad - bd + ab) = cd - d^2 + ad + bd = d(a + b + c - d)$$

Так как $a + b + c > d$, то $d(a + b + c - d) > 0$. Итак, $ab + cd > (d - a)(d - b)$.

Аналогично $bc + ad > (d - b)(d - c)$ и $ac + bd > (d - a)(d - c)$.

Перемножая все три неравенства, получаем:

$$(ab + cd)(bc + ad)(ac + bd) > (d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2$$

что противоречит условию.

Пусть $a + b + c < d$. Тогда

$$(d-a)(d-b)-(ab+cd) = d^2-ad-bd+ab-ab-cd = d^2-d(a+b+c) = d(d-a-b-c)$$

Так как $a + b + c < d$, то $d(d - a - b - c) > 0$. Итак, $ab + cd < (d - a)(d - b)$.

Аналогично $bc + ad < (d - b)(d - c)$ и $ac + bd < (d - a)(d - c)$.

Перемножая все три неравенства, получаем:

$$(ab + cd)(bc + ad)(ac + bd) < (d - a)^2(d - b)^2(d - c)^2,$$

что также противоречит условию.

Таким образом, оба предположения $a + b + c > d$ и $a + b + c < d$ приводят к противоречию. Следовательно, единственно возможный случай — это $d = a + b + c$.

Продолжительность выполнения заданий – 235 минут.
Максимальное количество баллов за каждую задачу – 7 баллов. Итого 35 баллов за все задание.
Не забудьте обосновать свои решения задач!