МАТЕМАТИКА
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Задания
муниципального этапа
2026-2027 учебный год
9 класс

1. Существует ли квадратный трёхчлен, график которого пересекает оси координат в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 6?

2. На шахматную доску 8×8 поставили шахматные фигуры — k ладей и k коней так, что ни одна из фигур не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое возможно?

3. В записи четырёх десятизначных чисел все цифры — восьмёрки и девятки. Докажите, что можно добавить к ним пятое десятизначное число, также записываемое только восьмёрками и девятками, так, чтобы сумма всех пяти чисел записывалась только чётными цифрами.

4. В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Известно, что центр окружности, вписанной в треугольник BCD, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.

5. В начале на доске записано число 3. Затем каждую минуту число x на доске заменяют на одно из чисел $2x + 4$, $3x + 8$ или $x^2 + 5x$. Может ли в какой-то момент на доске появиться число $20^{26} + 2027$?

ВСОШ

МАТЕМАТИКА
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Критерии оценивания
заданий
муниципального этапа
2026-2027 учебный год
9 класс

1.

Существует ли квадратный трёхчлен, график которого пересекает оси координат в вершинах равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 6?

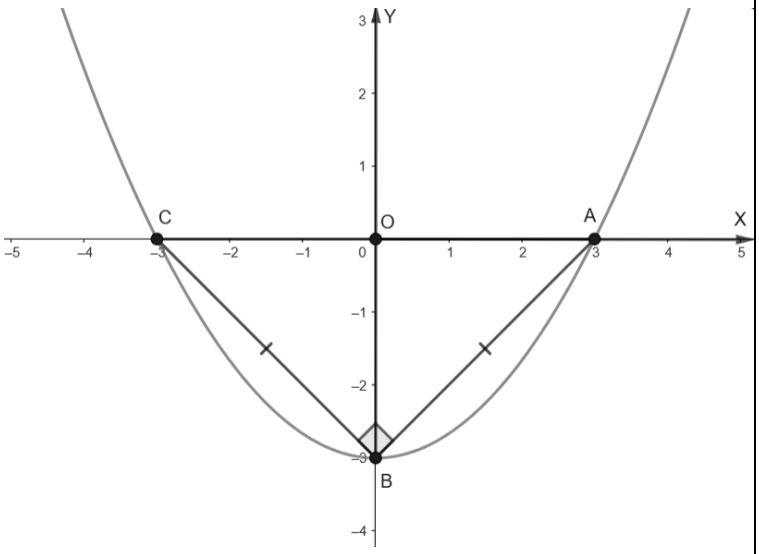
Ответ: да, например $\frac{1}{3}(x^2-9)$, график приведён на рисунке.

Решение:

Для решения достаточно приведённого примера. Три точки пересечения получим, подставив в уравнение

$y=\frac{1}{3}(x^2-9)$

значения $y=0$ и $x=0$. Других не будет, так как график трёхчлена — парабола.



Дополнение:

Приведём способ получения примера. Пусть график трёхчлена задаётся уравнением $y=ax^2+bx+c$, а $x_1 \geq x_2$ — его корни.

Заметим, что график трёхчлена всегда пересечёт ось Oy ровно в одной точке, соответствующей $x=0$. Тогда две другие вершины треугольника должны быть на оси Ox. Если это концы одного из катетов, то другой обязан лежать на оси Oy, а тогда два его конца будут лежать на ней же, получим две точки пересечения — противоречие. Тогда на Ox лежит гипотенуза. Высота треугольника 3, потому график проходит через одну из точек $(0,\pm 3)$. Тогда остальные вершины треугольника — $(-3,0)$ и $(3,0)$ Тогда $y=a(x-x_1)(x-x_2)=a(x^2-9)$. Подставив $x=0$, найдём $a=\pm\frac{1}{3}$, других примеров нет.

Критерии.

- Приведён любой из подходящих ответов – 7 баллов.
- Окончательный вид трёхчлена отсутствует (например, коэффициенты не получены) – не более 1 балла.

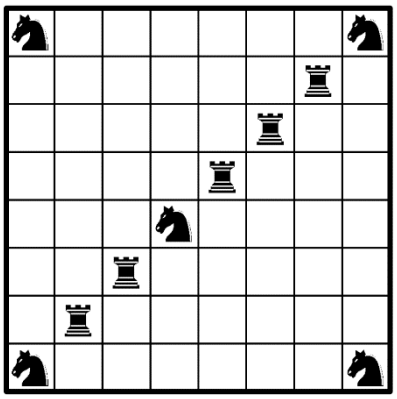
2.

На шахматную доску 8×8 поставили шахматные фигуры — k ладей и k коней так, что ни одна из фигур не бьёт никакую другую. При каком наибольшем k такое возможно?

Ответ: 5.

Решение:

Пример на 5 на рисунке справа.



Оценка. С ладьёй не может стоять в одной строке или одном столбце никакая другая фигура.

Предположим, что ладей хотя бы 6. Тогда они оставят не более 4 непобитых клеток. Противоречие.

Критерии.

- Только оценка на 5 — 3 балла.
- Только пример — 4 балла.

3. *В записи четырёх десятизначных чисел все цифры — восьмёрки и девятки. Докажите, что можно добавить к ним пятое десятизначное число, также записываемое только восьмёрками и девятками, так, чтобы сумма всех пяти чисел записывалась только чётными цифрами.*

Решение:

Сначала добавим число из одних девяток и рассмотрим последние 10 цифр суммы. Найдём позиции, на которых в записи суммы стоят нечётные цифры, и заменим девятки на восьмёрки в тех же разрядах добавляемого числа. Это уменьшит на 1 соответствующие цифры суммы (а переносов не будет, так как эти цифры были нечётными, в частности ненулевыми). Таким образом, мы получим число из восьмёрок и девяток, добавление которого делает последние 10 цифр суммы чётными.

Осталось заметить, что сумма является 11-значным числом, и его первая цифра равна 4. Действительно, мы складываем 5 чисел, больших $8 \cdot 10^9$, но меньших 10^{10},поэтому в результате получается число между $5 \cdot 8 \cdot 10^9 = 4 \cdot 10^{10}$ и $5 \cdot 10^{10}$, т. е. 11-значное число с первой цифрой 4.

Критерии.

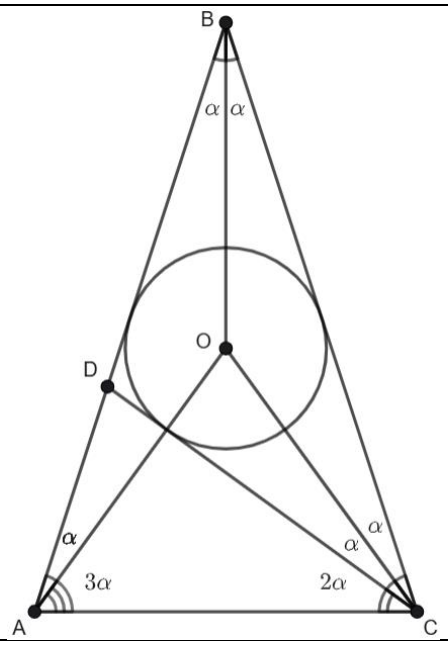
- В приведённом решении не проверено, что первая цифра будет чётной, остальное верно — не более 5 баллов.

4. *В треугольнике ABC проведена биссектриса CD. Известно, что центр окружности, вписанной в треугольник BCD, совпадает с центром окружности, описанной около треугольника ABC. Найдите углы треугольника ABC.*

Ответ: $\angle A = \angle C = 72°, \angle B = 36°$.

Решение.

Пусть O — общий центр указанных окружностей. Из условия следует, что BO и CO — биссектрисы углов ABC и BCD (O — центр вписанной окружности) и, кроме того, $AO = BO = CO$ (O — центр описанной окружности). Поэтому если $\angle ABO = \alpha$, то $\angle OAB = \alpha$, $\angle OCB = \angle OBC = \alpha$, $\angle BCD = 2\alpha$ (CD — биссектриса). Отсюда следует, что $\angle OAC = \angle OCA = 3\alpha$. Итак, сумма углов треугольника ABC равна 10α, а значит, $\alpha = 18°$.



Критерии.

- Специальных критериев нет.

5. *В начале на доске записано число 3. Затем каждую минуту число x на доске заменяют на одно из чисел $2x + 4$, $3x + 8$ или $x^2 + 5x$. Может ли в какой-то момент на доске появиться число $20^{26} + 2027$?*

Ответ: нет.

Решение:

Заметим, что числа на доске всегда дают остаток 3 при делении на 7. Действительно, пусть $x = 7k + 3$, тогда

$$2x + 4 = 2(7k + 3) + 4 = 14k + 10 = 7(2k + 1) + 3$$
$$3x + 8 = 3(7k + 3) + 8 = 21k + 17 = 7(3k + 2) + 3$$
$$x^2 + 5x = (7k + 3)^2 + 5(7k + 3) = 49k^2 + 42k + 9 + 35k + 15 = 7(7k^2 + 11k + 3) + 3$$

С другой стороны, числа $20, 20^2, 20^3, 20^4 \ldots$ дают соответственно остатки $6, 1, 6, 1, \ldots$ при делении на 7, значит, $20^{26} + 2027 = (7A + 1) + 2027 = 7(A + 289) + 5$.

Итого, число $20^{26} + 2027$ даёт остаток 5, значит, оно появиться не может.

Критерии.

- Присутствует идея рассмотреть остатки от деления или сравнения по модулю, дальше продвижений нет — 1 балл.

Муниципальный этап ВСОШ по математике

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. Стандартные общие правила:

Оценка	*З а ч т о с т а в и т с я*
7	Верное решение
6-7	Верное решение, но имеются мелкие недочёты, в целом не влияющие на ход решения.
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты, например, ошибки в арифметике, не нарушающие общего рассуждения; пропущены случаи, не влияющие на общую логику решения.
3-4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2-3	Решение в целом отсутствует, но доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения; сформулированы утверждения, помогающие в решении, но не доказаны.
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого здесь или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены.