МАТЕМАТИКА
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Задания
муниципального этапа
2026-2027 учебный год
11 класс

1. На скамейке сидят десять школьников — мальчики и девочки. Может ли быть так, что между каждыми двумя мальчиками сидит чётное число школьников, а между каждыми двумя девочками — нечётное?

2. Решите систему:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=5; \\ 3x^2+4xy=24. \end{cases}$$

3. В клетках таблицы 10×10 записаны натуральные числа, не превосходящие 10. При этом числа в любых двух соседних по стороне или углу клетках взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее 17 раз.

4. Для некоторого x числа $\sin 2x$, $\sin 5x$ и $\sin 7x$ рациональны. Докажите, что число $\sin 12x$ также рационально.

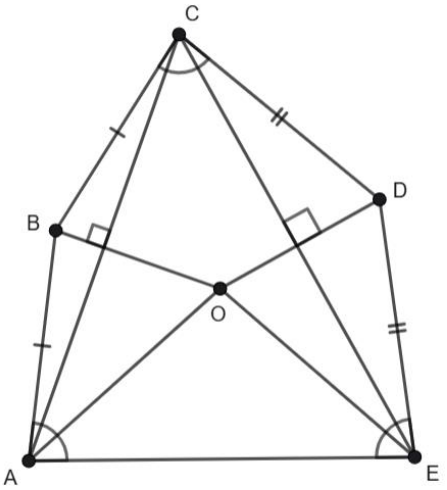
5. О выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно: $AB=BC$, $CD=DE$ и $\angle A=\angle C=\angle E<90^\circ$. Докажите, что в этот пятиугольник можно вписать окружность.

МАТЕМАТИКА
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Критерии оценивания
заданий
муниципального этапа
2026-2027 учебный год
11 класс

1.	*На скамейке сидят десять школьников — мальчики и девочки. Может ли быть так, что между каждыми двумя мальчиками сидит чётное число школьников, а между каждыми двумя девочками — нечётное?*
	Ответ: нет. **Решение:** Посмотрим на места с чётными номерами и на места с нечётными номерами. Если какая-то девочка сидит на месте с нечётным номером и другая — на чётном, то между ними чётное число школьников, значит, либо чётные, либо нечётные места свободны от девочек. Рассмотрим первый случай: тогда на чётных местах сидят только мальчики и между любой их парой — нечётное число школьников. Противоречие. Второй случай точно так же приводит к противоречию.
	Критерии. • Специальных критериев нет.
2.	*Решите систему:* $\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} = 5; \\ 3x^2+4xy = 24. \end{cases}$
	Ответ: $x=2, y=3/2$. **Решение:** **Способ I** Рассмотрим координатную плоскость. В первом равенстве записано, что сумма расстояний от точки $P(x,y)$ до $A(0,0)$ и $B(4,3)$ равна 5. Но между самими точками (0,0) и (4,3) расстояние 5, тогда, по неравенству треугольника, P лежит на отрезке AB, откуда $y=3x/4$, $x>0$. Подставив y во второе уравнение, имеем $3x^2+4x\frac{3}{4}x=24$ $6x^2=24$ $x=\pm 4$ Поскольку $x>0$, получаем $x=2, y=3/2$.

	Способ II Рассмотрим первое равенство. Перенесём часть вправо и возведём в квадрат: $$\sqrt{x^2+y^2}+\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=5$$ $$\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2}=5-\sqrt{x^2+y^2}$$ $$(x-4)^2+(y-3)^2=\left(5-\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$ $$x^2-8x+16+y^2-6y+9=25-10\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2$$ $$8x+6y=10\sqrt{x^2+y^2}$$ $$(8x+6y)^2=100(x^2+y^2)$$ $$64x^2+96xy+36y^2=100x^2+100y^2$$ $$(6x-8y)^2=0$$ Тогда $y=3x/4$. При $x<0$ получим $(x-4)^2+(y-3)^2>4^2+3^2=5^2$, что невозможно, значит $x\geq 0$. Дальше аналогично способу I.
	Критерии Не учтено $x>0$, из-за чего лишние ответы — снимается 2 балла.
3.	*В клетках таблицы 10×10 записаны натуральные числа, не превосходящие 10. При этом числа в любых двух соседних по стороне или углу клетках взаимно просты. Докажите, что какое-то число встречается в таблице не менее 17 раз.*
	Решение: Разобьём таблицу 10 × 10 на 25 квадратов 2 × 2. Заметим, что в каждом квадрате расположено не более одного чётного числа и не более одного числа, делящегося на три. Следовательно, по крайней мере по два числа в каждом квадрате равны 1, 5 или 7. Таким образом, в таблице расположено как минимум 50 чисел 1, 5 или 7. Поэтому в таблице найдётся по крайней мере 17 одинаковых чисел.
	Критерии • Специальных критериев нет.
4.	*Для некоторого x числа $\sin 2x$, $\sin 5x$ и $\sin 7x$ рациональны. Докажите, что число $\sin 12x$ также рационально.*
	Решение: $$\sin 5x+\sin 7x=2\sin 6x\cos x$$ $$\sin 5x-\sin 7x=2\sin x\cos 6x$$ Перемножив равенства, получим $$\sin^2 7x-\sin^2 5x=(2\sin x\cos x)(2\sin 6x\cos 6x)$$ $$=\sin 2x\cdot\sin 12x$$ Если $\sin 2x\neq 0$, то $\sin 12x$ рационально.

	Если $\sin 2x = 0$, то $\sin 6x = 3\sin 2x - 4\sin^3 2x = 0$, тогда $\sin 12x = 2\sin 6x \cos 6x = 0$. Случай $\sin 2x = 0$ действительно необходимо разобрать: например, $0 \cdot \sqrt{2} = 0$ — рациональное число.
	Критерии. • Не разобран случай $\sin 2x = 0$ или $\sin 2x \neq 0$ — не более 4 баллов.
5.	*О выпуклом пятиугольнике $ABCDE$ известно: $AB = BC$, $CD = DE$ и $\angle A = \angle C = \angle E < 90°$. Докажите, что в этот пятиугольник можно вписать окружность.*
	Решение:  Заметим, что треугольник ACE остроугольный, ведь все его углы меньше острого угла из условия. Поэтому центр его описанной окружности O лежит внутри ACE. Докажем, что O служит центром окружности, касающейся всех сторон пятиугольника. Для этого достаточно проверить, что точка O лежит на биссектрисах углов A, B, D, E. Биссектрисы углов B и D суть серединные перпендикуляры к сторонам треугольника ACE, поэтому центр описанной окружности O лежит на них. Далее, $\angle AEC = \angle AED - \angle CED = \angle BCD - \angle ECD = \angle BCA + \angle ACE = \angle BAC + \angle ACE$. Отсюда $\angle BAC = \angle AEC - \angle ACE$. Значит, $\angle BAO = \angle BAC + \angle CAO = \angle BAC + (90° - \angle AEC) = 90° - \angle ACE = \angle OAE$ (мы воспользовались тем, что центральный угол вдвое больше вписанного и выразили углы при основании равнобедренных треугольников AOC и AOE через углы при вершинах), т. е. точка O лежит на биссектрисе угла A. Аналогично доказывается, что она лежит на биссектрисе угла E.
	Критерии • Найден центр искомой окружности — 2 балла.

Муниципальный этап ВСОШ по математике

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. Стандартные общие правила:

Оценка	*З а ч т о с т а в и т с я*
7	Верное решение
6-7	Верное решение, но имеются мелкие недочёты, в целом не влияющие на ход решения.
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты, например, ошибки в арифметике, не нарушающие общего рассуждения; пропущены случаи, не влияющие на общую логику решения.
3-4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2-3	Решение в целом отсутствует, но доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения; сформулированы утверждения, помогающие в решении, но не доказаны.
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого здесь или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены.