МАТЕМАТИКА
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Задания
муниципального этапа
2026-2027 учебный год
10 класс

1. Найдите наименьшее натуральное число n, для которого суммы цифр чисел n и $n+1$ делятся на 5.

2. Все клетки доски 10×10 покрашены в белый цвет. Аня и Боря по очереди перекрашивают по одной белой клетке в чёрный цвет, начинает Аня. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется двух соседних по стороне белых клеток. У кого из игроков есть выигрышная стратегия вне зависимости от ходов соперника?

3. Последовательность положительных чисел задана условиями: $a_1 = 20$; $a_2 = 26$; $a_n = \dfrac{5a_{n-1}+1}{25a_{n-2}}$ для $n \geqslant 3$. Найдите a_{2026}.

4. Подбросив монету 15 раз, можно получить одну из $2^{15} = 32768$ различных последовательностей орлов и решек. Сколько из них таких, в которых дважды орёл выпадет сразу после орла, трижды — решка сразу после решки, четыре раза решка следует за орлом и пять раз — орёл за решкой?

5. Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка D — середина стороны AB. Известно, что угол AID прямой. Докажите равенство $AB + BC = 3AC$.

ВСОШ

МАТЕМАТИКА
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Критерии оценивания
заданий
муниципального этапа
2026-2027 учебный год
10 класс

1.	*Найдите наименьшее натуральное число n, для которого суммы цифр чисел n и n + 1 делятся на 5.*
	Ответ: 49999. **Решение:** Пусть n имеет на конце ровно k девяток, т.е. $n = M \cdot 10^k + \underbrace{99\ldots9}_{k \text{ раз}}$, $n+1 = (M+1)\cdot 10^k$, иначе суммы цифр отличаются на 1 и не могут одновременно делиться на 5. Сумму цифр n обозначим *S(n).* $$S(n) = S(M) + 9k = S(M) + 10k - k \vdots 5,$$ $$S(n+1) = S(M+1) = S(M) + 1 \vdots 5.$$ Тогда $S(M) = 5t + 4$ при некотором целом t, тогда из $S(M) - k \vdots 5$ имеем k хотя бы 4. При *k=4 n=49999, n+1=50000*, подходит.
	Критерии: • Приведён верный ответ — 1 балл.
2.	*Все клетки доски 10×10 покрашены в белый цвет. Аня и Боря по очереди перекрашивают по одной белой клетке в чёрный цвет, начинает Аня. Проигрывает тот, после чьего хода на доске не останется двух соседних по стороне белых клеток. У кого из игроков есть выигрышная стратегия вне зависимости от ходов соперника?*
	Ответ: Стратегию имеет Боря. **Решение:** Установим, в каком случае игрок не может сделать очередной ход. Это произойдёт лишь тогда, когда на доске остались только две соседние незакрашенные клетки. В противном случае кроме двух соседних незакрашенных клеток (а они обязательно должны быть, поскольку соперник смог сделать свой ход) на доске есть ещё какие-то незакрашенные клетки, которые ещё можно покрасить. Итак, игрок не сумеет сделать очередной ход только в случае, когда на доске осталось ровно две незакрашенные клетки и 98 закрашенных. Такая ситуация может возникнуть только после хода Бори, поскольку лишь после его хода на доске остаётся чётное число закрашенных клеток.

Тогда в любом случае закончится ровно через 98 ходов, а Борина стратегия — не делать непосредственно проигрышный ход, в остальном ходить как угодно.

Дополнение:

Так как Боря может ходить практически произвольно, то возможно придумать много конкретных последовательностей его ходов, например:

- Разбить доску на прямоугольники 1×2 и дополнять в них Анины ходы;
- Центральная/осевая симетрия до некоторого момента, затем перебор;
- и т.д.

Все они, очевидно, приводят к победе.

Критерии.

- Верная стратегия с обоснованием — 7 баллов.
- Любая верная стратегия без обоснования — не более 1 балла.
- Ответ «победит Боря» без предъявления стратегии — 0 баллов.
- Нерабочая стратегия — 0 баллов.
- Доказательство, что победит Аня — 0 баллов.

3. *Последовательность положительных чисел задана условиями:* $a_1 = 20$, $a_2 = 26$, $a_n = \frac{5a_{n-1}+1}{25a_{n-2}}$ *при* $n \geq 3$. *Найдите* a_{2026}.

Ответ: 20.

Решение:

Будем рассматривать $b_n = a_n \cdot 5$. Тогда $b_1 = 100$, $b_2 = 130$, $b_n = \frac{b_{n-1}+1}{b_{n-2}}$.

Выпишем несколько начальных элементов b_n:

$$b_3 = \frac{130+1}{100} = \frac{131}{100}$$

$$b_4 = \frac{\frac{131}{100}+1}{130} = \frac{231}{13000}$$

$$b_5 = \frac{\frac{231}{13000}+1}{\frac{131}{100}} = \frac{13231}{131 \cdot 130} = \frac{101}{130}$$

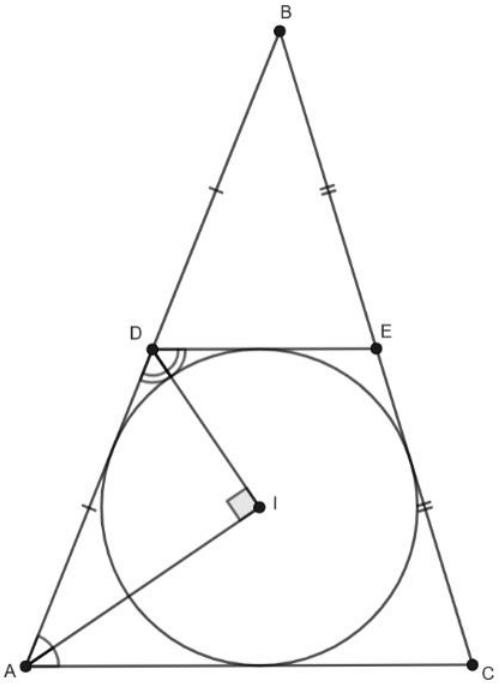
$$b_6 = \frac{\frac{101}{130}+1}{\frac{231}{13000}} = \frac{231 \cdot 100}{231} = 100$$

$$b_7 = \frac{100+1}{\frac{101}{130}} = 130$$

	Видим, что $b_1 = b_6$, $b_2 = b_7$. Так как новый элемент зависит только от двух предыдущих, то последовательность периодична с периодом 5 и $b_{2026} = b_{405\cdot5+1} = b_1 = 100$, откуда $a_{2026} = a_1 = \frac{b_{2026}}{5} = 20$. Также возможно увидеть периодичность, рассматривая саму последовательность $\{a_n\}$.
	Критерии. • Сделан вывод о периодичности на основе только одного повторившегося элемента, например $a_6 = a_1$, — не более 3 баллов.
4.	*Подбросив монету 15 раз, можно получить одну из $2^{15} = 32768$ различных последовательностей орлов и решек. Сколько из них таких, в которых дважды орёл выпадет сразу после орла, трижды — решка сразу после решки, четыре раза решка следует за орлом и пять раз — орёл за решкой?*
	Ответ: 525. **Решение.** Будем обозначать группы подряд идущих одинаковых букв как [О] и [Р]. ОО и РР встречаются внутри таких групп, а ОР и РО — строго между ними. Тогда 4+5=9 раз группа сменилась, то есть всего групп 10, в каждой не менее одной буквы. Тогда последовательность выглядит так: [Р][О][Р][О][Р][О][Р][О][Р][О]. 10 букв уже заняты, из того, что ОО встречается 2 раза, имеем ещё 2 буквы О, из того, что РР встречается 3 раза — ещё 3 Р, всего 15. Таким образом, задача свелась к следующей: сколько есть способов расположить 2 О по пяти группам [О] и 3 Р по пяти группам [Р]? Расположим О: либо обе в одной группе (5 способов), либо в разных ($5 \cdot 4/2 = 10$ способов), всего 5+10=15 способов. Расположим Р: все в одной группе (5 способов), либо 2+1 ($5 \cdot 4 = 20$ способов), либо по одной в 3 группы $\left(\frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10\right)$, всего 5+20+10=35 способов. Объединяя, получаем $15 \cdot 35 = 525$.
	Критерии. • Получено, что орлы и решки образуют 10 чередующихся групп — 1 балл. • Верно получено количество орлов (7) и решек (8) — 1 балл, суммируется с предыдущим. • Задача сведена к тому, что необходимо 7 орлов разделить на 5 групп и то же для 8 решек, дальше ошибки в арифметике — 5 баллов, не суммируется с другими.

5. *Точка I — центр вписанной окружности треугольника ABC, точка D — середина стороны AB. Известно, что угол AID прямой. Докажите равенство $AB + BC = 3AC$.*

Решение:



Пусть E — середина стороны BC, тогда DE — средняя линия. Так как $DE \parallel AC$, имеем $\angle ADE = 180° - \angle A = 2 \cdot (90° - \angle DAI) = 2\angle ADI$ (второе равенство следует из того, что AI — биссектриса угла A, третье — из условия $\angle AID = 90°$). Таким образом, DI — биссектриса угла ADE, следовательно, прямая DE тоже касается вписанной окружности треугольника ABC. Значит, четырёхугольник $ADEC$ описанный, откуда $AD + CE = AC + DE$.

Подставляя сюда $AD = \frac{1}{2}AB, CE = \frac{1}{2}BC$ и $DE = \frac{1}{2}AC$, получаем равенство $\frac{1}{2}(AB + BC) = \frac{3}{2}AC$, т. е. $AB + BC = 3AC$.

Дополнение:

Неверно считать, что I — пересечение диагоналей $ADEC$, или что $AIC = DIE = 90°$. Эти утверждения не могут быть частью верного решения.

Критерии.

- Свойства описанного четырёхугольника и средней линии доказывать не требуется.
- Достроена средняя линия DE — 1 балл.
- Доказано, что DI — биссектриса угла ADE — 2 балла, суммируются с предыдущим.

Муниципальный этап ВСОШ по математике

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ОЦЕНКИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ

Решение каждой задачи оценивается в 7 баллов. Стандартные общие правила:

Оценка	*З а ч т о с т а в и т с я*
7	Верное решение
6-7	Верное решение, но имеются мелкие недочёты, в целом не влияющие на ход решения.
5	Решение в целом верно, но имеет заметные недочёты, например, ошибки в арифметике, не нарушающие общего рассуждения; пропущены случаи, не влияющие на общую логику решения.
3-4	В том случае, когда решение задачи делится на две равноценные части — решение одной из частей.
2-3	Решение в целом отсутствует, но доказаны вспомогательные утверждения, помогающие в решении задачи.
0-1	Рассмотрены отдельные случаи при отсутствии решения; сформулированы утверждения, помогающие в решении, но не доказаны.
0	Решение полностью неверно или отсутствует

Любое правильное решение оценивается в 7 баллов. Недопустимо снимать баллы за то, что текст решения слишком длинный, или за то, что верное решение школьника отличается от приведённого здесь или от других решений, известных жюри. В то же время любой сколь угодно длинный текст решения, не содержащий полезных продвижений, должен быть оценен в 0 баллов. Работа участника, помимо приведённых, может включать другие содержательные продвижения, которые должны быть оценены.