Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по экономике
Красноярский край
2026-2027 учебный год
Задания 9 класс
Время выполнения 150 мин. Максимальное кол-во баллов – 100

ТЕСТ 1
(4 вопроса, 4 балла)

Выберите единственный верный ответ (1 балл за верный ответ и 0 баллов при неверном ответе)

1. Если два человека получают одинаковую заработную плату за час работы, то альтернативная стоимость часа их свободного времени одинакова.

1) Верно 2) Неверно

2. При положительной инфляции номинальный доход человека может увеличиться, а реальный – уменьшиться.

1) Верно 2) Неверно

3. Если после введения потоварного налога цена, которую платят покупатели, выросла меньше, чем величина налога, то часть налогового бремени несут производители.

1) Верно 2) Неверно

4. Если два производителя могут изготовить одинаковое количество товара за одинаковое время, то ни один из них не обладает сравнительным преимуществом.

1) Верно 2) Неверно

ТЕСТ 2
(4 вопроса, 8 баллов)

Выберите единственный верный ответ (2 балла за верный ответ и 0 баллов при неверном ответе)

1. На рынке совершенной конкуренции фирма увеличила объем выпуска продукции. Что при прочих равных не изменится?

1) Ее общая выручка.
2) Переменные издержки.
3) Рыночная цена товара.
4) Общие издержки.

2. Алексей рассматривает два инвестиционных проекта. Проект А гарантированно принесет доход 8% годовых. Проект Б с вероятностью 50% принесет доход 20%, а с вероятностью 50% – убыток 4%. Какое утверждение является наиболее корректным?

1) Проект Б выгоднее, так как его максимальная доходность выше.
2) Проект А выгоднее, поскольку он гарантирует получение прибыли.
3) Проекты одинаково выгодны, поскольку имеют одинаковую ожидаемую доходность.
4) На основании приведенной информации нельзя определить, какой проект рациональнее выбрать.

3. В стране производятся только два товара – X и Y. После внедрения новой технологии производительность труда при производстве товара X увеличилась, а при производстве товара Y не изменилась. Какое утверждение обязательно верно?

1) Альтернативная стоимость производства товара X уменьшилась.
2) Альтернативная стоимость производства товара Y увеличилась.
3) Страна обязательно получит сравнительное преимущество в производстве товара X.
4) Для ответа недостаточно информации.

4. Какое из перечисленных изменений не приведет к смещению кривой рыночного спроса?

1) Изменение доходов покупателей.
2) Изменение цены данного товара.
3) Изменение вкусов потребителей.
4) Изменение цен товаров-заменителей.

ТЕСТ 3
(4 вопроса, 12 баллов)

Выберите все верные ответы (3 балла за вопрос, если в точности указаны все верные варианты и не отмечено ничего лишнего, 0 баллов в противном случае)

1. Что произойдет, если на конкурентном рынке увеличится спрос на товар?

1) Равновесный объем продаж обязательно увеличится.
2) Равновесная цена обязательно увеличится.
3) Выручка производителей обязательно увеличится.
4) Прибыль производителей обязательно увеличится.
5) Если предложение совершенно эластично, равновесная цена может не измениться.

2. Какие свойства характерны для общественных благ?

1) Общественные блага неисключаемы.
2) Общественные блага неконкурентны в потреблении.
3) Частные компании не могут производить общественные блага.
4) Потребление общественного блага одним человеком всегда уменьшает возможности его потребления другими.
5) Проблема "безбилетника" связана с общественными благами.

3. В каких из перечисленных ситуаций обе страны могут получить выгоду от международной торговли?

1) Альтернативные издержки производства всех товаров в обеих странах одинаковы.
2) Каждая страна специализируется на производстве товаров, по которым имеет сравнительное преимущество.
3) Ни одна страна не участвует в международной торговле.
4) Одна страна производит все товары эффективнее другой, но альтернативные издержки производства различаются.
5) Страны имеют разные альтернативные издержки производства.

4. Какие выводы можно сделать, если исследование показало, что при изменении цены на 10% объем спроса изменяется более чем на 10%?

1) Повышение цены обязательно увеличит выручку.
2) Покупатели чувствительны к изменению цены.
3) Спрос является эластичным.
4) Снижение цены может привести к росту выручки продавца.
5) Цена товара не влияет на объем спроса.

ЗАДАНИЯ С КРАТКИМ ОТВЕТОМ
(4 вопроса, 16 баллов)

Кратко запишите ответ на предложенную задачу в виде числа без указания единиц измерения (4 балла за верный ответ и 0 баллов при неверном ответе)

1. Магазин бытовой техники предлагает покупателю два варианта оплаты двух одинаковых товаров стоимостью 20 000 рублей каждый.

Вариант А: на каждую покупку предоставляется скидка 10%.

Вариант Б: скидка не предоставляется, однако после оплаты первого товара покупателю начисляется кэшбэк в размере 15% от фактически уплаченной суммы, который можно полностью использовать при оплате второго товара.

На сколько рублей будут отличаться общие расходы покупателя при выборе этих вариантов оплаты? Ответ запишите в виде числа.

2. После повышения цены товара на 25% объем его продаж сократился на 20%.

На сколько процентов изменилась выручка продавца? Если выручка снизилась, ответ запишите со знаком минус.

3. Фирма произвела 24 изделия. Средние издержки составили 150 рублей на одно изделие. Производство 25-го изделия увеличило общие издержки на 100 рублей. Чему стали равны средние издержки фирмы после производства 25 изделий?

4. В начале года зарплата работника до вычета НДФЛ составляла 60 000 рублей в месяц. Через год работодатель повысил зарплату на 8%, а цены за этот год выросли на 20%. НДФЛ составляет 13% и удерживается из зарплаты.

На сколько процентов изменился реальный доход работника после вычета НДФЛ? Если реальный доход снизился, ответ запишите со знаком минус.

ЗАДАЧИ

Задача 1 (20 баллов)

Трое друзей открывают мастерскую настольных игр «Грань кубика». За один рабочий день каждый из них может заниматься изготовлением либо игровых полей, либо наборов деревянных фигурок. Производственные возможности ребят представлены в таблице:

	Игровые поля	**Наборы фигурок**
Антон	12	6
Борис	8	8
Витя	4	12

1. Постройте границу производственных возможностей мастерской. (5 баллов)
2. Сможет ли мастерская за один день выполнить заказ на 18 игровых полей и 18 наборов фигурок? Ответ обоснуйте. (3 балла)
3. Друзья рассматривают два варианта расширения производства:

Вариант А: приобрести лазерный станок, позволяющий дополнительно изготовить до 10 наборов фигурок в день независимо от занятости работников.

Вариант Б: передать часть изготовления игровых полей подрядчику, который способен ежедневно изготовить до 10 игровых полей.

Постройте новую границу производственных возможностей для каждого из вариантов. (8 баллов)

4. Для каждого из приведённых заказов определите, какие из рассматриваемых вариантов расширения производства позволяют выполнить заказ. Если заказ может быть выполнен несколькими способами, укажите все подходящие варианты. Кратко обоснуйте ответ. (4 балла)

Заказ	**Игровые поля**	**Наборы фигурок**
1	25	15
2	14	28
3	20	20
4	23	23

Задача 2 (20 баллов)

Мастерская «Грань кубика» успешно развивается. Для увеличения объемов производства друзья решили приобрести лазерный станок стоимостью 300 000 рублей. По их оценкам, дополнительная прибыль, полученная благодаря использованию станка, составит 360 000 рублей.

Собственных средств для покупки станка у мастерской нет, поэтому они рассматривают три способа финансирования.

Вариант А. Банк готов предоставить кредит на сумму 300 000 рублей сроком на два года под r% годовых. В конце каждого года мастерская возвращает половину основного долга. Проценты начисляются на остаток задолженности на начало каждого года.

Вариант Б. Отец одного из друзей готов полностью оплатить покупку станка. Взамен мастерская обязуется выплатить ему 15% дополнительной прибыли, полученной благодаря использованию станка, а также фиксированное вознаграждение F рублей.

Вариант В. Покупатели готовы заранее оплатить будущие заказы на сумму 300 000 рублей. За это мастерская обязуется предоставить им скидку s% на заказы, которые без скидки стоили бы 500 000 рублей.

1. Найдите общую сумму процентов по банковскому кредиту при $r = 12$. (4 балла)
2. Запишите функцию $C_B(F)$, задающую общую стоимость варианта Б для мастерской в зависимости от параметра F. (2 балла)
3. Найдите зависимость предельной процентной ставки r от параметра F, при которой варианты А и Б оказываются одинаково затратными. При каких значениях r банковский кредит менее затратен, чем вариант Б? (4 балла)
4. При $r = 14$ и $s = 16$ найдите все значения параметра F, при которых вариант Б оказывается менее затратным одновременно по сравнению с вариантами А и В. (3 балла)
5. При фиксированном значении $F = 18\,000$ найдите все значения параметров r и s, при которых варианты финансирования по возрастанию затрат располагаются в порядке: вариант А, затем вариант Б, затем вариант В. (3 балла)
6. При фиксированной ставке банковского кредита $r = 12$ найдите все значения параметров F и s, при которых варианты финансирования по возрастанию затрат располагаются в порядке: вариант А, затем вариант Б, затем вариант В. (4 балла)

Задача 3 (20 баллов)

Мастерская настольных игр «Грань кубика» успешно завершила расширение производства и приобрела новое оборудование. Теперь друзья готовятся к выпуску своей первой настольной игры.

Проведенное маркетинговое исследование показало, что спрос на продукцию составляют две группы потребителей6 со стороны семей он описывается функцией

$$Q_f = 120 - P,$$

а спрос со стороны школьников

$$Q_s = 300 - 5P,$$

где P – цена одной игры, а Q_fи Q_s – количество игр, которое готовы приобрести соответственно семьи и школьники.

Себестоимость производства одной игры постоянна и составляет 20 денежных единиц.

1. Постройте функцию совокупного спроса на игру. (4 балла)
2. Постройте функцию прибыли мастерской в зависимости от цены игры. (4 балла)
3. Какую цену следует установить мастерской, чтобы получить наибольшую прибыль? Найдите величину этой прибыли. (4 балла)
4. После обзора игры популярным блогером в TikTok спрос со стороны школьников увеличился и стал описываться функцией

$$Q_s = a - 5P,$$

где $a > 0$. Спрос семей не изменился. Для значений a, при которых оптимальная цена действительно позволяет продавать игру и семьям, и школам, найдите эту цену $P(a)$. (4 балла)

5. В зависимости от значения параметра a мастерская может придерживаться одной из двух ценовых стратегий:
   - установить цену, при которой игру покупают только семьи;
   - установить цену, при которой игру покупают и семьи, и школьники.

Исследуйте, при каких значениях параметра a оптимальной является каждая из этих стратегий. Считайте, что $0 < a \leq 350$. (4 балла)

Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников по экономике
Красноярский край
2026-2027 учебный год
Ответы 9 класс
Время выполнения 150 мин. Максимальное кол-во баллов – 100

ОТВЕТЫ НА ТЕСТ

Тест 1. Только один возможный ответ: «Верно» или «Неверно» (4 балла)

Номер вопроса	Верно (1)	Неверно (2)
1		Неверно
2	Верно	
3	Верно	
4		Неверно

Тест 2. Только один правильный ответ (8 баллов)

Номер вопроса	Ответ
1	3
2	4
3	4
4	2

Тест 3. Выбрать все верные ответы (12 баллов)

Номер вопроса	Ответ
1	1, 5
2	1, 2, 5
3	2, 4, 5
4	2, 3, 4

4. Задания с открытым ответом (16 баллов)

Номер вопроса	Ответ
1	1000
2	0
3	148
4	-10

ЗАДАЧИ

Задача 1 (20 баллов)

Трое друзей открывают мастерскую настольных игр «Грань кубика». За один рабочий день каждый из них может заниматься изготовлением либо игровых полей, либо наборов деревянных фигурок. Производственные возможности ребят представлены в таблице:

	Игровые поля	**Наборы фигурок**
Антон	12	6
Борис	8	8
Витя	4	12

1. Постройте границу производственных возможностей мастерской. (5 баллов)
2. Сможет ли мастерская за один день выполнить заказ на 18 игровых полей и 18 наборов фигурок? Ответ обоснуйте. (3 балла)
3. Друзья рассматривают два варианта расширения производства:

Вариант А: приобрести лазерный станок, позволяющий дополнительно изготовить до 10 наборов фигурок в день независимо от занятости работников.

Вариант Б: передать часть изготовления игровых полей подрядчику, который способен ежедневно изготовить до 10 игровых полей.

Постройте новую границу производственных возможностей для каждого из вариантов. (8 баллов)

4. Для каждого из приведённых заказов определите, какие из рассматриваемых вариантов расширения производства позволяют выполнить заказ. Если заказ может быть выполнен несколькими способами, укажите все подходящие варианты. Кратко обоснуйте ответ. (4 балла)

Заказ	**Игровые поля**	**Наборы фигурок**
1	25	15
2	14	28
3	20	20
4	23	23

Решение

1. Альтернативные издержки одного набора фигурок:

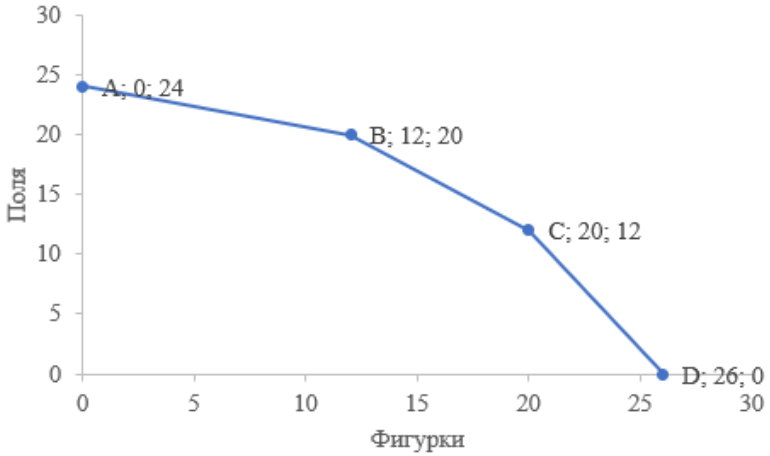
Антон: 1 набор фигурок = 2 поля;

Борис: 1 набор фигурок = 1 поле;

Витя: 1 набор фигурок = 1/3 поля.

Значит, фигурки выгоднее всего сначала делает Витя, затем Борис, затем Антон.

Тогда КПВ будет выглядеть следующим образом



Или может быть описана уравнениями:

Пусть x – количество наборов фигурок; y – количество игровых полей.

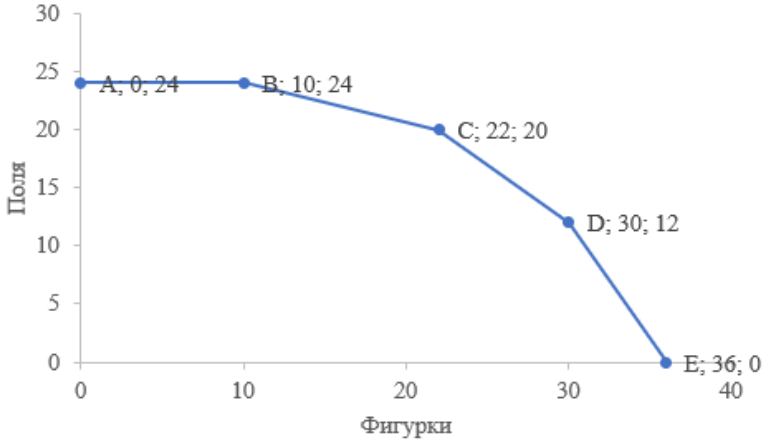
$$y = \begin{cases} 24 - \frac{x}{3}, 0 \le x \le 12 \\ 32 - x, 12 \le x \le 20 \\ 52 - 2x, 20 \le x \le 26 \end{cases}$$

Или если x – количество полей, y – наборов фигурок:

$$y = \begin{cases} 26 - \frac{x}{2}, 0 \le x \le 12 \\ 42 - x, 12 \le x \le 20 \\ 82 - 3x, 20 \le x \le 24 \end{cases}$$

2. Заказ 18 полей и 18 фигурок невыполним: при 18 наборах фигурок максимум полей равен
$32 - 18 = 14$ (находится из подстановки значения в соответствующее уравнение, или доказывается через демонстрацию, что точка лежит вне границ КПВ.

3. В «Варианте А» КПВ сдвигается вправо на 10 наборов фигурок:

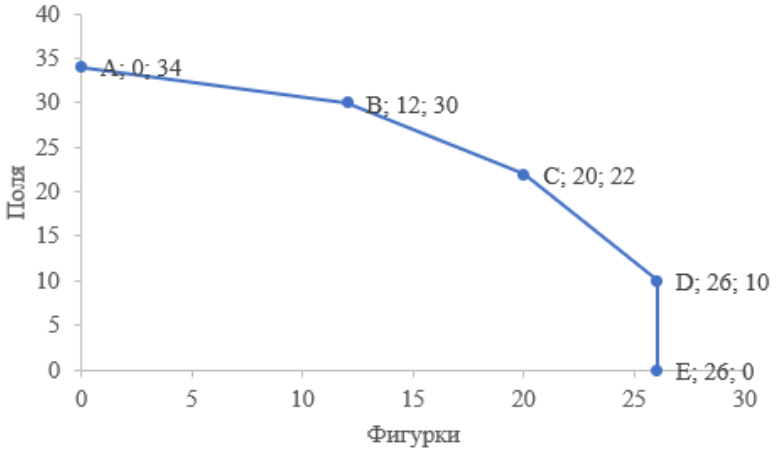


Или, если решать через уравнение КПВ:

$$y = \begin{cases} 24, 0 \le x \le 10 \\ \frac{82 - 2x}{3}, 10 \le x \le 22 \\ 42 - x, 22 \le x \le 30 \\ 72 - 2x, 30 \le x \le 36 \end{cases}$$

Здесь первый горизонтальный участок соответствует тому, что станок полностью обеспечивает первые 10 наборов фигурок, пока работники могут целиком заниматься изготовлением игровых полей.

В «Варианте А» КПВ сдвигается ввверх на 10 наборов фигурок:

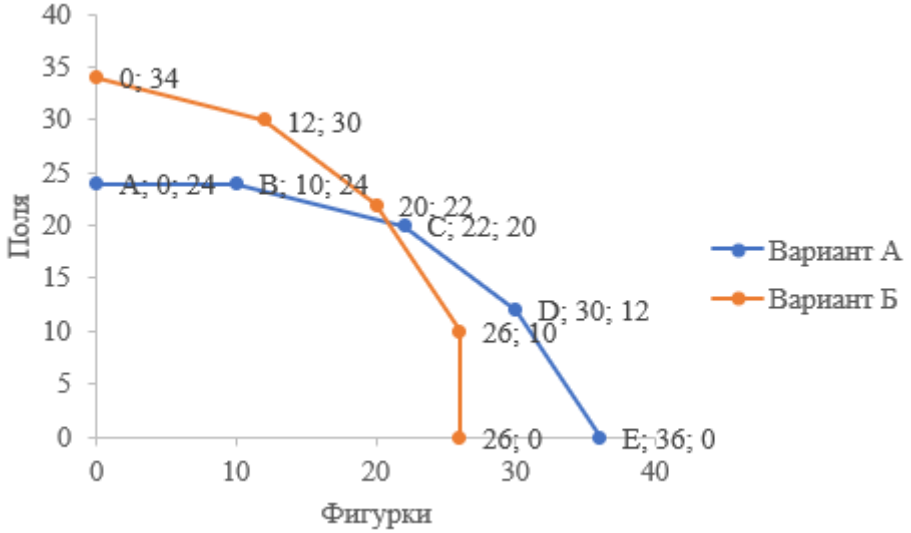


Или, если решать через уравнение КПВ:

$$y = \begin{cases} 34 - \frac{x}{3}, 0 \le x \le 12 \\ \frac{82 - 2x}{3}, 12 \le x \le 20 \\ 42 - x, 20 \le x \le 26 \\ 0 \le y \le 10, x = 26 \end{cases}$$

Последний вертикальный участок возникает потому, что при максимальном выпуске фигурок друзья сами не делают поля, но подрядчик может изготовить **от 0 до 10** полей. Поэтому точка $(26; 0)$тоже достижима, а верхняя граница при x=26 – (26;10).

4. Для понимания того какой из рассматриваемых вариантов поможет выполнить тот или иной заказ, если мы решаем задачу графически, необходимо наложить графики друг на друга



При выборе между приобретением лазерного станка и передачей части производства игровых полей на аутсорсинг необходимо сравнивать положение соответствующего заказа относительно границ производственных возможностей (КПВ) для каждого из вариантов.

Если точка находится в зоне, где КПВ Варианта Б выше, чем КПВ Варианта А, то мы можем произвести набор, только при выборе варианта производства Б.

Если точка находится в зоне, где КПВ Варианта А выше, чем КПВ Варианта Б, то мы можем произвести набор, только при выборе варианта производства А.

Если точка находится внутри обеих границ, то она достижима при использования обоих вариантов производства.

Если за пределами внешней КПВ, то данный вариант не достижим для производства ни при каких обстоятельствах.

Так же возможна качественная интерпретация результатов:

Вариант А (лазерный станок) увеличивает максимально возможный выпуск **наборов фигурок**, не изменяя производственные возможности по изготовлению игровых полей. Поэтому он наиболее эффективен для заказов, в которых ограничивающим фактором является выпуск фигурок.

Вариант Б (аутсорсинг игровых полей) увеличивает максимально возможный выпуск **игровых полей**, не изменяя собственные производственные возможности мастерской по изготовлению фигурок. Поэтому он наиболее эффективен для заказов, в которых ограничивающим фактором является выпуск игровых полей.

Для приведённых в задаче заказов:

Заказ	Ответ	Обоснование
25 полей, 15 наборов фигурок	Только вариант Б	Ограничивающим фактором является выпуск игровых полей. Увеличение выпуска фигурок не позволяет выполнить заказ.
14 полей, 28 наборов фигурок	Только вариант А	Ограничивающим фактором является выпуск фигурок. Дополнительные игровые поля не помогают выполнить заказ.
20 полей, 20 наборов фигурок	Оба варианта	Точка принадлежит обеим новым КПВ. Каждый из вариантов расширения позволяет выполнить заказ.
23 поля, 23 набора фигурок	Ни один вариант	Заказ находится вне обеих новых КПВ, поэтому ни одна из стратегий не обеспечивает необходимых объёмов производства.

Важно! При проверке следует засчитывать любые корректные обоснования, основанные на сравнении заказа с соответствующими КПВ, даже если они отличаются от приведённого решения по форме или используют вычисления вместо графического анализа.

Критерии оценивания

1. Построение исходной КПВ – 5 баллов

Верно определены альтернативные издержки / порядок специализации: 2 балла;

Найдены ключевые точки КПВ:

(24;0),(20;12),(12;20),(0;26) – 2 балла;

Корректно построен график или записана ломаная КПВ – 1 балл.

2. Проверка заказа 18 полей и 18 наборов фигурок – 3 балла. Из них:

Найден максимум полей при 18 наборах фигурок – 2 балла;
Сделан верный вывод, что заказ невыполним – 1 балл.
3. КПВ при покупке станка – 4 балла. Из них:
Верно понято, что станок добавляет до 10 наборов фигурок – 1 балл;
Найдены точки новой КПВ:
(24;10),(20;22),(12;30),(0;36) – 2 балла;
Корректно построена/описана новая КПВ – 1 балл.
КПВ при аутсорсинге полей – 4 балла. Из них:
Верно понято, что аутсорсинг добавляет до 10 игровых полей – 1 балл;
Найдены точки новой КПВ:
(34;0),(30;12),(22;20),(10;26) – 2 балла;
Корректно построена/описана новая КПВ – 1 балл.
5. Сравнение вариантов по заказам – 4 балла. За каждый «правильный» заказ по 1 баллу:
За каждый верно классифицированный заказ – 0,5 балла;
За краткое корректное обоснование по каждому заказу – 0,5 балла

Задача 2 (20 баллов)

Мастерская «Грань кубика» успешно развивается. Для увеличения объемов производства друзья решили приобрести лазерный станок стоимостью 300 000 рублей. По их оценкам, дополнительная прибыль, полученная благодаря использованию станка, составит 360 000 рублей.

Собственных средств для покупки станка у мастерской нет, поэтому они рассматривают три способа финансирования.

Вариант А. Банк готов предоставить кредит на сумму 300 000 рублей сроком на два года под r% годовых. В конце каждого года мастерская возвращает половину основного долга. Проценты начисляются на остаток задолженности на начало каждого года.

Вариант Б. Отец одного из друзей готов полностью оплатить покупку станка. Взамен мастерская обязуется выплатить ему 15% дополнительной прибыли, полученной благодаря использованию станка, а также фиксированное вознаграждение F рублей.

Вариант В. Покупатели готовы заранее оплатить будущие заказы на сумму 300 000 рублей. За это мастерская обязуется предоставить им скидку s% на заказы, которые без скидки стоили бы 500 000 рублей.

1. Найдите общую сумму процентов по банковскому кредиту при $r = 12$. (4 балла)
2. Запишите функцию $C_B(F)$, задающую общую стоимость варианта Б для мастерской в зависимости от параметра F. (2 балла)
3. Найдите зависимость предельной процентной ставки r от параметра F, при которой варианты А и Б оказываются одинаково затратными. При каких значениях r банковский кредит менее затратен, чем вариант Б? (4 балла)
4. При $r = 14$ и $s = 16$ найдите все значения параметра F, при которых вариант Б оказывается менее затратным одновременно по сравнению с вариантами А и В. (3 балла)
5. При фиксированном значении $F = 18\,000$ найдите все значения параметров r и s, при которых варианты финансирования по возрастанию затрат располагаются в порядке: вариант А, затем вариант Б, затем вариант В. (3 балла)
6. При фиксированной ставке банковского кредита $r = 12$ найдите все значения параметров F и s, при которых варианты финансирования по возрастанию затрат располагаются в порядке: вариант А, затем вариант Б, затем вариант В. (4 балла)

Решение

1. Проценты за первый год:

$$300000 \cdot 0{,}12 = 36000.$$

После погашения половины основного долга остаток задолженности составляет 150 000 рублей. Проценты за второй год:

$$150000 \cdot 0{,}12 = 18000.$$

Общая сумма процентов:

$$36000 + 18000 = 54000.$$

Ответ: 54 000 рублей.

2. 15% от суммарной прибыли:

$$360000 \cdot 0{,}15 = 54000.$$

Следовательно,

$$C_B(F) = 54000 + F.$$

Ответ: $C_B(F) = 54000 + F$.

3. Стоимость варианта А:

$$C_A(r) = 300000 \cdot \frac{r}{100} + 150000 \cdot \frac{r}{100} = 4500r.$$

Варианты А и Б одинаково затратны, если:

$$4500r = 54000 + F.$$

Отсюда:

$$r = 12 + \frac{F}{4500}.$$

Банковский кредит менее затратен, если:

$$r < 12 + \frac{F}{4500}.$$

Ответ: предельная ставка $r = 12 + \frac{F}{4500}$; кредит дешевле при $r < 12 + \frac{F}{4500}$.

4. При $r = 14$:

$$C_A = 4500 \cdot 14 = 63000.$$

При $s = 16$:

$$C_V = 500000 \cdot 0{,}16 = 80000.$$

Вариант Б менее затратен одновременно по сравнению с вариантами А и В, если:

$$54000 + F < 63000$$

и

$$54000 + F < 80000.$$

Из первого неравенства:

$$F < 9000.$$

Из второго:

$$F < 26000.$$

Оба условия выполняются при:

$$F < 9000.$$

Ответ: $F < 9000$.

5. При $F = 18\,000$:

$$C_B = 54000 + 18000 = 72000.$$

Требуемый порядок означает:

$$C_A < C_B < C_V.$$

То есть:

$$4500r < 72000 < 5000s.$$

Отсюда:

$$r < 16,$$
$$s > 14{,}4.$$

Ответ: $r < 16$, $s > 14{,}4$.

6. При $r = 12$:

$$C_A = 4500 \cdot 12 = 54000.$$

Требуемый порядок означает:

$$C_A < C_B < C_V.$$

То есть:

$$54000 < 54000 + F < 5000s.$$

Первое неравенство:

$$54000 < 54000 + F$$

даёт:

$$F > 0.$$

Второе неравенство:

$$54000 + F < 5000s$$

даёт:

$$s > 10{,}8 + \frac{F}{5000}.$$

При $F = 0$ варианты А и Б равны по затратам, поэтому для строгого порядка А → Б → В необходимо именно $F > 0$.

Ответ: $F > 0$, $s > 10{,}8 + \frac{F}{5000}$.

Критерии оценивания

1. Верно найдены проценты за первый год – 1 балл;

Верно учтено уменьшение основного долга после первого года – 1 балл;

Верно найдены проценты за второй год – 1 балл;

Верно найдена общая сумма процентов – 1 балл.

2. Верно найдена сумма выплат, зависящая от дополнительной прибыли, – 1 балл;

Верно записана функция $C_B(F) = 54000 + F$

3. Верно записана стоимость варианта а $C_A(r) = 4500r$ – 1 балл;

Верно составлено уравнение равенства затрат – 1 балл;

Верно найдена зависимость $r = 12 + \frac{F}{4500}$ – 1 балл;

Верно указано условие, при котором кредит менее затратен, – 1 балл.

4. Верно найдены стоимости вариантов а и в при заданных параметрах – 1 балл;

Верно составлена система неравенств – 1 балл;

Получен итоговый ответ $F < 9000$ – 1 балл.

5. Верно найдена стоимость варианта б при $F = 18\,000$ – 1 балл;

Верно записано двойное неравенство $4500r < 72000 < 5000s$ – 1 балл;

Верно получены условия $r < 16$и $s > 14{,}4$ – 1 балл.

6. Верно найдена стоимость варианта а при $r = 12$ – 1 балл;

Верно записано двойное неравенство $54000 < 54000 + F < 5000s$ – 1 балл;

Верно получено условие $F > 0$ – 1 балл;

Верно получено условие $s > 10{,}8 + \frac{F}{5000}$и отмечен строгий порядок – 1 балл.

Задача 3 (20 баллов)

Мастерская настольных игр «Грань кубика» успешно завершила расширение производства и приобрела новое оборудование. Теперь друзья готовятся к выпуску своей первой настольной игры.

Проведенное маркетинговое исследование показало, что спрос на продукцию составляют две группы потребителей6 со стороны семей он описывается функцией

$$Q_f = 120 - P,$$

а спрос со стороны школьников

$$Q_s = 300 - 5P,$$

где P – цена одной игры, а Q_fи Q_s – количество игр, которое готовы приобрести соответственно семьи и школьники.

Себестоимость производства одной игры постоянна и составляет 20 денежных единиц.

1. Постройте функцию совокупного спроса на игру. (4 балла)
2. Постройте функцию прибыли мастерской в зависимости от цены игры. (4 балла)
3. Какую цену следует установить мастерской, чтобы получить наибольшую прибыль? Найдите величину этой прибыли. (4 балла)
4. После обзора игры популярным блогером в TikTok спрос со стороны школьников увеличился и стал описываться функцией

$$Q_s = a - 5P,$$

где $a > 0$. Спрос семей не изменился. Для значений a, при которых оптимальная цена действительно позволяет продавать игру и семьям, и школам, найдите эту цену $P(a)$. (4 балла)

5. В зависимости от значения параметра a мастерская может придерживаться одной из двух ценовых стратегий:

- установить цену, при которой игру покупают только семьи;
- установить цену, при которой игру покупают и семьи, и школьники.

Исследуйте, при каких значениях параметра a оптимальной является каждая из этих стратегий. Считайте, что $0 < a \leq 350$. (4 балла)

Решение

1. Семьи покупают игру, если

$$120 - P > 0.$$

Отсюда

$$P < 120.$$

Школы покупают игру, если

$$300 - 5P > 0.$$

Отсюда

$$P < 60.$$

Значит, при $0 \le P < 60$игру покупают и семьи, и школы:

$$Q(P) = (120 - P) + (300 - 5P) = 420 - 6P.$$

При $60 \le P < 120$игру покупают только семьи:

$$Q(P) = 120 - P.$$

При $P \ge 120$спрос равен нулю.

Итак,

$$Q(P) = \begin{cases} 420 - 6P, & 0 \le P < 60, \\ 120 - P, & 60 \le P < 120, \\ 0, & P \ge 120. \end{cases}$$

2. Прибыль равна разности между ценой и себестоимостью, умноженной на объем продаж:

$$\pi(P) = (P - 20)Q(P).$$

Следовательно,

$$\pi(P) = \begin{cases} (P - 20)(420 - 6P), & 0 \le P < 60, \\ (P - 20)(120 - P), & 60 \le P < 120. \end{cases}$$

3. Рассмотрим участок, где игру покупают обе группы:

$$\pi_1(P) = (P - 20)(420 - 6P).$$

Раскроем скобки:

$$\pi_1(P) = -6P^2 + 540P - 8400.$$

Это парабола ветвями вниз. Ее вершина находится при

$$P = \frac{540}{12} = 45.$$

Цена $P = 45$ действительно лежит на участке $0 \le P < 60$.

Объем продаж при этой цене:

$$Q = 420 - 6 \cdot 45 = 150.$$

Прибыль:

$$\pi_1 = (45 - 20) \cdot 150 = 25 \cdot 150 = 3750.$$

Теперь рассмотрим участок, где игру покупают только семьи:

$$\pi_2(P) = (P - 20)(120 - P).$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$\pi_2(P) = -P^2 + 140P - 2400.$$

Вершина этой параболы находится при

$$P = \frac{140}{2} = 70.$$

Цена $P = 70$действительно лежит на участке $60 \le P < 120$.

Объем продаж:

$$Q = 120 - 70 = 50.$$

Прибыль:

$$\pi_2 = (70 - 20) \cdot 50 = 50 \cdot 50 = 2500.$$

Сравним прибыли:

$$3750 > 2500.$$

Значит, наибольшая прибыль достигается при цене

$$P = 45.$$

Ответ: оптимальная цена равна 45, максимальная прибыль равна 3750.

4. После роста спроса школ:

$$Q_s = a - 5P.$$

Если игру покупают обе группы, совокупный спрос равен

$$Q(P) = (120 - P) + (a - 5P) = a + 120 - 6P.$$

Прибыль:

$$\pi(P) = (P - 20)(a + 120 - 6P).$$

Раскроем скобки:

$$\pi(P) = -6P^2 + (a + 240)P - 20a - 2400.$$

Это парабола ветвями вниз. Ее вершина находится при

$$P(a) = \frac{a + 240}{12}.$$

Однако эта цена действительно позволяет продавать игру школьникам только если

$$a - 5P(a) > 0.$$

То есть

$$P(a) < \frac{a}{5}.$$

Подставим найденную цену:

$$\frac{a + 240}{12} < \frac{a}{5}.$$

Отсюда

$$5a + 1200 < 12a,$$
$$a > \frac{1200}{7}.$$

Следовательно, для значений

$$a > \frac{1200}{7}$$

оптимальная цена в режиме продажи обеим группам равна

$$P(a) = \frac{a + 240}{12}.$$

Ответ:

$$P(a) = \frac{a + 240}{12} \text{ при } a > \frac{1200}{7}.$$

5. Если мастерская ориентируется только на семьи, максимальная прибыль не зависит от a. Из пункта 3:

$$\pi_{\text{семьи}}^{max} = 2500.$$

Если мастерская устанавливает цену, при которой покупают обе группы, то при

$$a > \frac{1200}{7}$$

оптимальная цена равна

$$P(a) = \frac{a + 240}{12}.$$

Найдем максимальную прибыль при продаже обеим группам.

Сначала:

$$P(a) - 20 = \frac{a + 240}{12} - 20 = \frac{a}{12}.$$

Далее:

$$Q(P(a)) = a + 120 - 6 \cdot \frac{a + 240}{12}.$$
$$Q(P(a)) = a + 120 - \frac{a + 240}{2}.$$

$$Q(P(a)) = \frac{a}{2}.$$

Тогда

$$\pi_{\text{оба}}^{max} = \frac{a}{12} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{24}.$$

Продажа обеим группам выгоднее, если

$$\frac{a^2}{24} > 2500.$$

Отсюда

$$a^2 > 60000,$$
$$a > 100\sqrt{6}.$$

При

$$a = 100\sqrt{6}$$

две стратегии дают одинаковую прибыль.

Осталось проверить, что найденные значения действительно соответствуют режиму, где обе группы покупают игру. Так как

$$100\sqrt{6} > \frac{1200}{7},$$

то при

$$a > 100\sqrt{6}$$

условие продажи обеим группам выполнено автоматически.

С учетом условия

$$0 < a \leq 350$$

получаем:

- при

$$0 < a < 100\sqrt{6}$$

оптимально ориентироваться только на семьи;

- при

$$a = 100\sqrt{6}$$

обе стратегии дают одинаковую прибыль;

- при

$$100\sqrt{6} < a \leq 350$$

оптимально установить цену, при которой игру покупают и семьи, и школьники.

Критерии оценивания

1. Верно определено, что школы покупают только при $P < 60$, – 1 балл.
Верно определено, что семьи покупают при $P < 120$, – 1 балл.
Верно найден совокупный спрос на участке, где покупают обе группы: $Q(P) = 420 - 6P$ – 1 балл.
Верно записана кусочная функция совокупного спроса – 1 балл.
2. Верно записан общий принцип: $\pi(P) = (P - 20)Q(P)$ – 1 балл.
Верно записана прибыль на участке, где покупают обе группы:
$\pi(P) = (P - 20)(420 - 6P)$ – 1 балл.
Верно записана прибыль на участке, где покупают только семьи:
$\pi(P) = (P - 20)(120 - P)$ – 1 балл.
Корректно указаны интервалы цен для двух участков – 1 балл.
3. Верно найден максимум прибыли на участке, где покупают обе группы
$P = 45$ – 1 балл.
Верно найдена прибыль на этом участке: $\pi = 3750$ – 1 балл.
Верно найден максимум прибыли на участке семейного спроса:
$P = 70, \pi = 2500$ – 1 балл.
Верно проведено сравнение и сделан вывод, что оптимальна цена $P = 45$ – 1 балл.
4. Верно записан совокупный спрос при продаже обеим группам:
$Q(P) = a + 120 - 6P$ – 1 балл.
Верно записана функция прибыли:
$\pi(P) = (P - 20)(a + 120 - 6P)$ – 1 балл.

Верно найдена оптимальная цена: $P(a) = \frac{a+240}{12}$ – 1 балл.

Верно указано условие, при котором эта цена действительно позволяет продавать обеим группам: $a > \frac{1200}{7}$ – 1 балл.

5. Верно указано, что максимальная прибыль при ориентации только на семьи равна 2500 – 1 балл.

Верно найдена максимальная прибыль при продаже обеим группам

$\pi_{\text{оба}}^{max} = \frac{a^2}{24}$ – 1 балл.

Верно составлено и решено неравенство:

$\frac{a^2}{24} > 2500, a > 100\sqrt{6}$ – 1 балл.

Корректно описаны все случаи:

$0 < a < 100\sqrt{6}, a = 100\sqrt{6}, 100\sqrt{6} < a \leq 350$ – 1 балл.