

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

Задача 1.1. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2 + 5n)^\circ) \cdot \cos((n^2 + 5n)^\circ) < 0?$$

Вариант 1.2. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2 + 3n)^\circ) \cdot \cos((n^2 + 3n)^\circ) < 0?$$

Вариант 1.3. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2 + 7n)^\circ) \cdot \cos((n^2 + 7n)^\circ) < 0?$$

Вариант 1.4. При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2 + 11n)^\circ) \cdot \cos((n^2 + 11n)^\circ) < 0?$$

Задача 2.1. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{100} .

Вариант 2.2. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{200} .

Вариант 2.3. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{250} .

Вариант 2.4. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{150} .

Задача 3.1. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 15, а их медиана равна 18. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Вариант 3.2. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 20, а их медиана равна 23. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Вариант 3.3. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 17, а их медиана равна 20. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Вариант 3.4. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 22, а их медиана равна 25. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Задача 4.1. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 4, а $SC = 2$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS . Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP .

Вариант 4.2. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 10, а $SC = 5$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS . Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP .

Вариант 4.3. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 2, а $SC = 1$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS . Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP .

Вариант 4.4. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 8, а $SC = 4$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS . Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP .

Задача 5.1. Для каких натуральных значений t уравнение $x^2 - (t + 5)x + 3t = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Вариант 5.2. Для каких натуральных значений t уравнение $x^2 - (t + 6)x + 4t = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Вариант 5.3. Для каких натуральных значений t уравнение $x^2 - (t + 7)x + 5t = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Вариант 5.4. Для каких натуральных значений t уравнение $x^2 - (t + 9)x + 7t = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Задача 6.1. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×100 . Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 99 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Вариант 6.2. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×120 . Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 119 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Вариант 6.3. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×80 . Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 79 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Вариант 6.4. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×140 . Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 139 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Задача 7.1. В треугольнике ABC $\angle ABC = 53^\circ$, $\angle BAC = 66^\circ$. Точка M является серединой стороны BC . Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM , пересекает сторону AB в точке P . Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM , пересекает сторону AC в точке Q . Найдите угол APQ . Ответ выразите в градусах.

Вариант 7.2. В треугольнике ABC $\angle ABC = 57^\circ$, $\angle BAC = 65^\circ$. Точка M является серединой стороны BC . Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM , пересекает сторону AB в точке P . Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM , пересекает сторону AC в точке Q . Найдите угол APQ . Ответ выразите в градусах.

Вариант 7.3. В треугольнике ABC $\angle ABC = 54^\circ$, $\angle BAC = 67^\circ$. Точка M является серединой стороны BC . Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM , пересекает сторону AB в точке P . Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM , пересекает сторону AC в точке Q . Найдите угол APQ . Ответ выразите в градусах.

Вариант 7.4. В треугольнике ABC $\angle ABC = 55^\circ$, $\angle BAC = 63^\circ$. Точка M является серединой стороны BC . Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM , пересекает сторону AB в точке P . Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM , пересекает сторону AC в точке Q . Найдите угол APQ . Ответ выразите в градусах.

Задача 8.1. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 1, 2, 3, 4$. Найдите $P(1)$.

Вариант 8.2. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 2, 3, 4$. Найдите $P(1)$.

Вариант 8.3. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 1, 2, 4$. Найдите $P(1)$.

Вариант 8.4. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 1, 2, 5$. Найдите $P(1)$.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ

МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.

ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 11 КЛАСС

ОТВЕТЫ

Максимальный балл за задание — 7. Максимальный балл за олимпиаду — 56**Задача 1.1.** При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2 + 5n)^\circ) \cdot \cos((n^2 + 5n)^\circ) < 0?$$

Ответ: 8.**Решение.** Неравенство выполнено тогда и только тогда, когда $\sin((n^2 + 5n)^\circ)$ и $\cos((n^2 + 5n)^\circ)$ имеют разные знаки, то есть когда

$$90 + 360k < n^2 + 5n < 180 + 360k$$

или

$$270 + 360k < n^2 + 5n < 360 + 360k$$

при некотором целом k . При монотонном увеличении n от 1 до бесконечности значение выражения $n^2 + 5n$ монотонно увеличивается от 6 до бесконечности. Так как $0 < 7^2 + 5 \cdot 7 = 84 < 90$ и $90 < 8^2 + 5 \cdot 8 = 104 < 180$, искомое минимальное натуральное n равно 8.**Вариант 1.2.** При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2 + 3n)^\circ) \cdot \cos((n^2 + 3n)^\circ) < 0?$$

Ответ: 9.**Вариант 1.3.** При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2 + 7n)^\circ) \cdot \cos((n^2 + 7n)^\circ) < 0?$$

Ответ: 7.**Вариант 1.4.** При каком наименьшем натуральном n выполняется неравенство

$$\sin((n^2 + 11n)^\circ) \cdot \cos((n^2 + 11n)^\circ) < 0?$$

Ответ: 6.**Задача 2.1.** Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{100} .**Ответ:** $1/298$ **Решение.** Докажем по индукции, что $a_n = \frac{1}{3n-2}$. База для $n = 1$ верна. Пусть $a_k = \frac{1}{3k-2}$. Тогда

$$a_{k+1} = \frac{a_k}{1 + 3a_k} = \frac{\frac{1}{3k-2}}{1 + \frac{3}{3k-2}} = \frac{1}{3k-2+3} = \frac{1}{3(k+1)-2}, \quad \text{— переход доказан. Тогда } a_{100} = 1/(3 \cdot 100 - 2) = 1/298.$$

Вариант 2.2. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{200} .

Ответ: 1/598

Вариант 2.3. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{250} .

Ответ: 1/748

Вариант 2.4. Последовательность задана условиями

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{1 + 3a_n} \quad \text{для всех натуральных } n.$$

Найдите a_{150} .

Ответ: 1/448

Задача 3.1. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 15, а их медиана равна 18. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Ответ: 35

Решение. Пусть в нашем наборе числа $a < b < 18 < c < d$. Т.к. их среднее арифметическое 15, то сумма равна $15 \cdot 5 = 75$. Также $a \geq 1, b \geq 2, c \geq 19$. Тогда $d = 75 - a - b - 18 - c \leq 75 - 1 - 2 - 18 - 19 = 35$. Набор чисел $\{1; 2; 18; 19; 35\}$ даёт нужный пример.

Вариант 3.2. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 20, а их медиана равна 23. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Ответ: 50

Вариант 3.3. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 17, а их медиана равна 20. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Ответ: 41

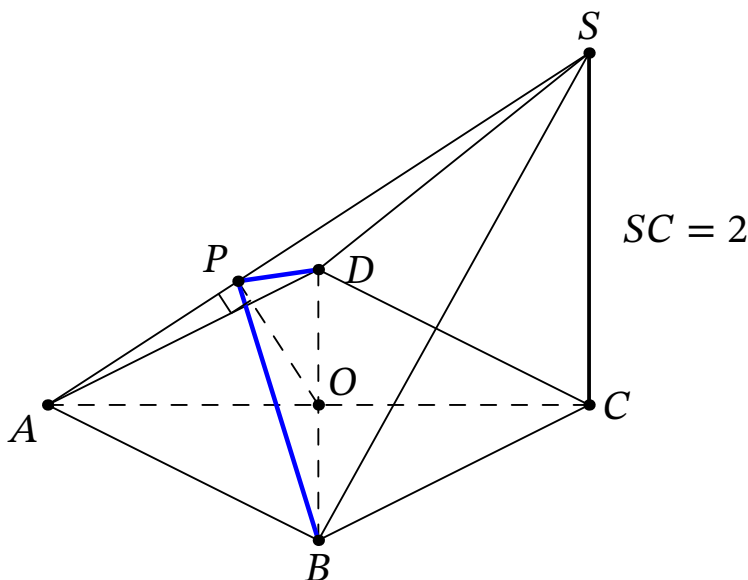
Вариант 3.4. Пять *различных* натуральных чисел имеют среднее арифметическое 22, а их медиана равна 25. Найдите наибольшее возможное значение наибольшего из этих пяти чисел.

Ответ: 56

Задача 4.1. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 4, а $SC = 2$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS . Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP .

Ответ: $8/3$

Решение. Пусть O — центр квадрата $ABCD$. Т.к. SC — высота пирамиды, то $\angle SCB = \angle SCD = 90^\circ$, поэтому $\triangle SCB = \triangle SCD$ по двум сторонам и углу между ними. Тогда $SB = SD$. Теперь треугольники SBA и SDA равны по трём сторонам, поэтому $\angle BSA = \angle DSA$. Наконец, $\triangle SBP = \triangle SDP$ по двум сторонам и углу, поэтому $BP = DP$. Т.к. треугольник BDP — равнобедренный, то его медиана PO является также и высотой, поэтому площадь $S_{BDP} = \frac{1}{2}PO \cdot BD$ принимает наименьшее значение, когда PO принимает наименьшее значение, т.е. PO — расстояние от O до AS .



К решению задачи 4.1

Значит, P — основание перпендикуляра, опущенного из O на AS . Тогда треугольники OPA и SCA подобны по двум углам, и $\frac{OP}{SC} = \frac{OA}{SA}$, $PO = \frac{SC \cdot OA}{SA}$. Сделаем расчёты: $AC = AB\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$, $SA = \sqrt{SC^2 + AC^2} = 6$, $OA = \frac{1}{2}BD = 2\sqrt{2}$. Итак, наименьшая площадь $S_{BDP} = \frac{1}{2}PO \cdot BD = \frac{SC \cdot OA \cdot BD}{2SA} = \frac{2 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2}}{2 \cdot 6} = \frac{8}{3}$.

Вариант 4.2. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 10, а $SC = 5$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS . Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP .

Ответ: $50/3$

Вариант 4.3. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 2, а $SC = 1$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS . Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP .

Ответ: $2/3$

Вариант 4.4. Основание $ABCD$ четырёхугольной пирамиды $SABCD$ — квадрат со стороной 8, а $SC = 4$ — её высота. Точка P лежит на прямой AS . Найдите наименьшее возможное значение площади треугольника BDP .

Ответ: $32/3$

Задача 5

Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 3 балла.

Задача 5.1.

Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m + 5)x + 3m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Ответ: $m = 2, m = 6$

Решение. Пусть натуральные корни уравнения — a и b . По теореме Виета

$$a + b = m + 5, \quad ab = 3m.$$

Умножим первое равенство на 3 и воспользуемся вторым:

$$3a + 3b = 3m + 15 = ab + 15.$$

Отсюда

$$(a - 3)(b - 3) = ab - 3a - 3b + 9 = -6.$$

Так как a и b — натуральные числа, оба множителя не меньше -2 . Их произведение отрицательно, поэтому один множитель отрицателен, а другой положителен. Считая, что $a \leq b$, получаем два варианта:

$$a - 3 = -2, \quad b - 3 = 3, \quad \text{или} \quad a - 3 = -1, \quad b - 3 = 6.$$

Значит, корни могут быть только $(a, b) = (1, 6)$ или $(a, b) = (2, 9)$.

Для пары $(1, 6)$ сумма корней равна 7, поэтому $m + 5 = 7$ и $m = 2$. Для пары $(2, 9)$ сумма равна 11, поэтому $m + 5 = 11$ и $m = 6$.

Оба значения подходят.

Вариант 5.2. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m + 6)x + 4m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Ответ: $m = 4, m = 9$

Вариант 5.3. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m + 7)x + 5m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Ответ: $m = 6, m = 12$

Вариант 5.4. Для каких натуральных значений m уравнение $x^2 - (m + 9)x + 7m = 0$ имеет два различных натуральных корня?

Ответ: $m = 10, m = 18$

Задача 6.1. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×100 . Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 99 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Ответ: 396

Решение. В каждом двухклеточном столбике закрашено не более одной клетки. Всего столбиков 100, а клеток закрашено 99, поэтому один столбик пустой, а в остальных ровно по одной закрашенной клетке. Если пустой столбик — один из двух крайних, то в оставшемся прямоугольнике 2×99 есть два способа закрасить клетки. Действительно, как только мы закрашиваем клетку в одном из столбиков (верхнюю или нижнюю), в соседних столбиках закрашенная клетка определяется однозначно (она должна лежать в другой строке, чтобы не быть соседней с первой), потом однозначно определяются закрашенные клетки в столбиках через один и т.д. Если же пустой столбик один из 98 некрайних, то наш прямоугольник разбивается на два меньших вида $2 \times k$, каждый из которых снова может быть закрашен двумя способами. Тогда всего способов $2 \cdot 2 + 98 \cdot 2 \cdot 2 = 99 \cdot 4 = 396$.

Вариант 6.2. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×120 . Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 119 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Ответ: 476

Вариант 6.3. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×80 . Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 79 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

Ответ: 316

Вариант 6.4. На доске нарисован клетчатый прямоугольник 2×140 . Будем считать две клетки соседними, если они имеют общую сторону. Сколькими способами можно закрасить ровно 139 клеток так, чтобы среди них не было соседних?

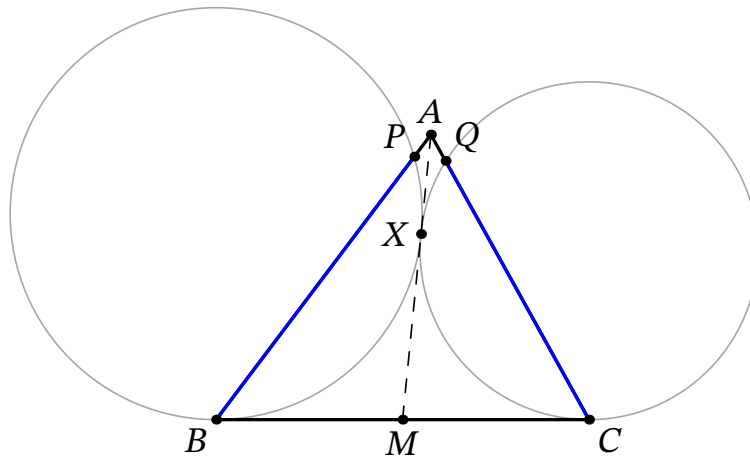
Ответ: 556

Задача 7.1. В треугольнике ABC $\angle ABC = 53^\circ$, $\angle BAC = 66^\circ$. Точка M является серединой стороны BC . Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM , пересекает сторону AB в точке P . Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM , пересекает сторону AC в точке Q . Найдите угол APQ . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 61°

Решение. Если первая окружность касается отрезка AM в точке X , а вторая — в точке Y , то $MX = MB$ и $MY = MC$ как равные отрезки касательных, а значит $MX = MY$ и, точки X, Y совпадают.

По теореме о секущей и касательной для первой окружности $AP \cdot AB = AX^2$, а для второй — $AQ \cdot AC = AX^2$, т.е. $AP \cdot AB = AQ \cdot AC$, откуда следует, что четырёхугольник $PQCB$ вписан. Значит, $\angle APQ = \angle QCB = 180^\circ - \angle ABC - \angle BAC = 61^\circ$.



К решению задачи 7.1

Вариант 7.2. В треугольнике ABC $\angle ABC = 57^\circ$, $\angle BAC = 65^\circ$. Точка M является серединой стороны BC . Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM , пересекает сторону AB в точке P . Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM , пересекает сторону AC в точке Q . Найдите угол APQ . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 58°

Вариант 7.3. В треугольнике ABC $\angle ABC = 54^\circ$, $\angle BAC = 67^\circ$. Точка M является серединой стороны BC . Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM , пересекает сторону AB в точке P . Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM , пересекает сторону AC в точке Q . Найдите угол APQ . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 59°

Вариант 7.4. В треугольнике ABC $\angle ABC = 55^\circ$, $\angle BAC = 63^\circ$. Точка M является серединой стороны BC . Окружность, касающаяся BC в точке B и отрезка AM , пересекает сторону AB в точке P . Окружность, касающаяся BC в точке C и отрезка AM , пересекает сторону AC в точке Q . Найдите угол APQ . Ответ выразите в градусах.

Ответ: 62°

Задача 8.1. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 1, 2, 3, 4$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 1025

Решение. Заметим, что многочлен $Q(x) = (x - 1)^3 + 1$ удовлетворяет условию $Q(2^n + 1) = 8^n + 1$ для любого n . Тогда в точках 3, 5, 9, 17 многочлен $P(x) - Q(x)$ принимает значение 0. Значит, эти числа — его корни, и $P(x) - Q(x)$ имеет вид $(x - 3)(x - 5)(x - 9)(x - 17)T(x)$, где $T(x)$ — некоторый многочлен. Учитывая, что $P(x)$ четвёртой степени и приведённый, получаем, что $P(x) - Q(x) = (x - 3)(x - 5)(x - 9)(x - 17)$ и $P(x) = (x - 1)^3 + 1 + (x - 3)(x - 5)(x - 9)(x - 17)$. Тогда $P(1) = 1 + (-2)(-4)(-8)(-16) = 1025$.

Вариант 8.2. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 2, 3, 4$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 513

Вариант 8.3. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 1, 2, 4$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 129

Вариант 8.4. Приведённый многочлен четвертой степени $P(x)$ удовлетворяет условиям $P(2^n + 1) = 8^n + 1$ для $n = 0, 1, 2, 5$. Найдите $P(1)$.

Ответ: 257