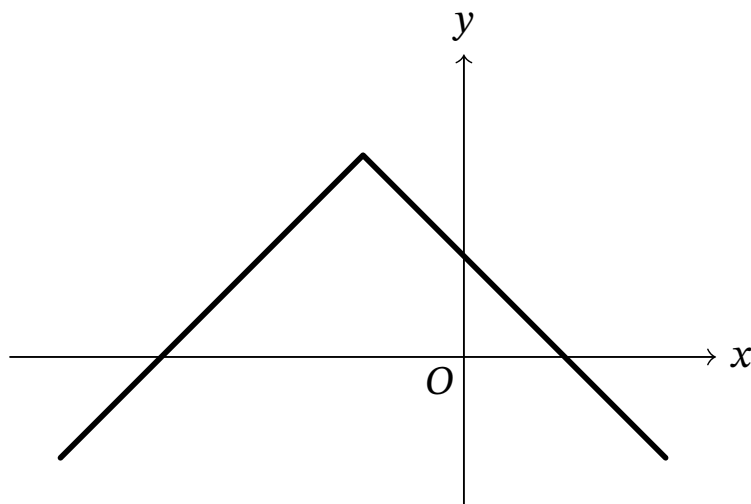
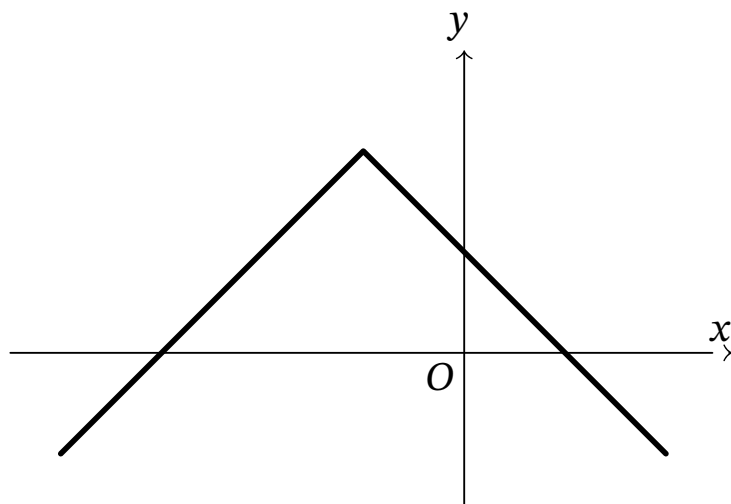


ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. 2026–2027 уч. г.
ШКОЛЬНЫЙ ЭТАП. 10 КЛАСС

Задача 1.1. На рисунке изображён график функции $y = a - |kx + b|$.



К задаче 1



К задаче 1.2

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Вариант 1.2.

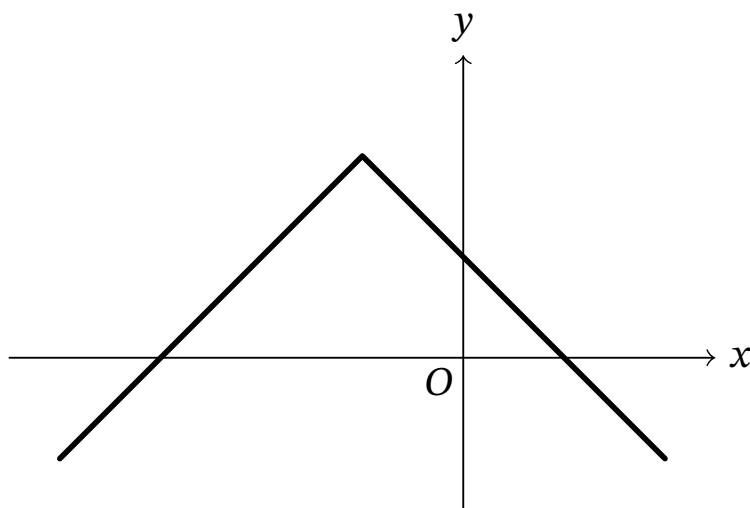
На рисунке изображён график функции $y = -a - |kx + b|$.

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

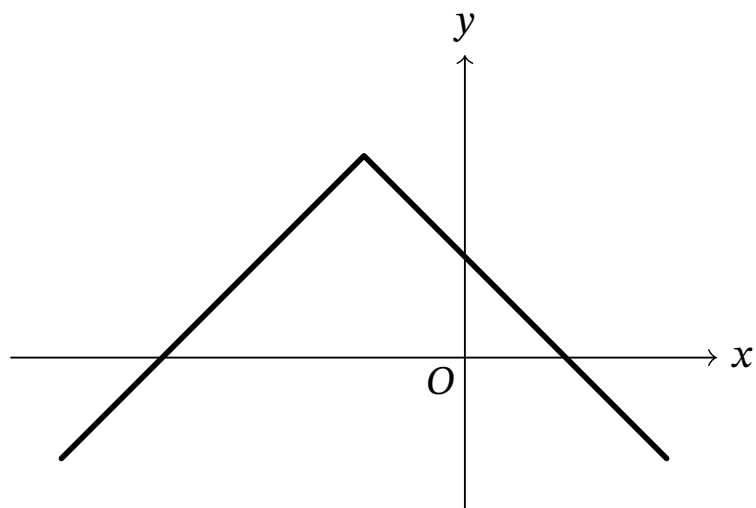
1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Вариант 1.3.

На рисунке изображён график функции $y = a - |kx - b|$.



К задаче 1.3



К задаче 1.4

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Вариант 1.4.

На рисунке изображён график функции $y = -a - |kx - b|$.

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Задача 2.1. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 18$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 24$.

(а) Какие значения может принимать b ?

(б) Какие значения может принимать a ?

Вариант 2.2. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 27$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 36$.

(а) Какие значения может принимать b ?

(б) Какие значения может принимать a ?

Вариант 2.3. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 8$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 54$.

(а) Какие значения может принимать b ?

(б) Какие значения может принимать a ?

Вариант 2.4. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 45$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 60$.

(а) Какие значения может принимать b ?

(б) Какие значения может принимать a ?

Задача 3.1. На окружности отмечены 20 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 20. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Вариант 3.2. На окружности отмечены 12 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 12. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Вариант 3.3. На окружности отмечены 14 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 14. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Вариант 3.4. На окружности отмечены 18 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 18. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Задача 4.1. Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $n + 12$ и $n + 45$ являются точными квадратами.

Вариант 4.2. Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $n + 20$ и $n + 59$ являются точными квадратами.

Вариант 4.3. Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $n + 5$ и $n + 32$ являются точными квадратами.

Вариант 4.4. Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $n + 6$ и $n + 61$ являются точными квадратами.

Задача 5.1. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$ и $AC = 4$ провели биссектрису AD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Вариант 5.2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ и $AC = 5$ провели биссектрису AD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Вариант 5.3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$ и $AC = 6$ провели биссектрису AD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Вариант 5.4. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $AC = 7$ провели биссектрису AD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Задача 6.1. Последовательность задана условиями $a_1 = 2$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n .

(а) Найдите a_{2026} .

(б) Найдите сумму первых 2026 членов последовательности.

Вариант 6.2. Последовательность задана условиями $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n .

(а) Найдите a_{2030} .

(б) Найдите сумму первых 2030 членов последовательности.

Вариант 6.3. Последовательность задана условиями $a_1 = 4$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n .

(а) Найдите a_{2018} .

(б) Найдите сумму первых 2018 членов последовательности.

Вариант 6.4. Последовательность задана условиями $a_1 = 5$, $a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n .

(а) Найдите a_{2002} .

(б) Найдите сумму первых 2002 членов последовательности.

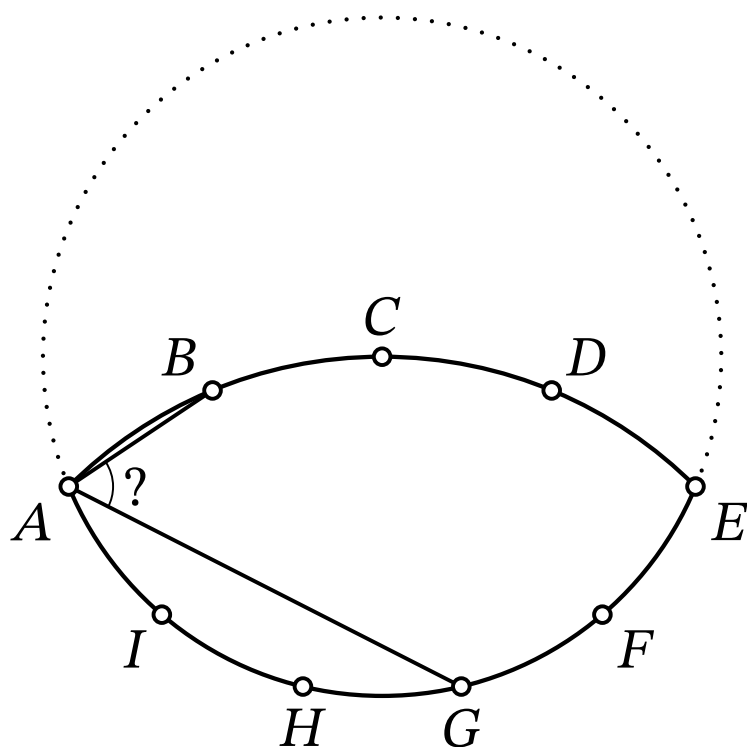
Задача 7.1. Имеется натуральное число N . Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N , не больших 100, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Вариант 7.2. Имеется натуральное число N . Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N , не больших 80, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

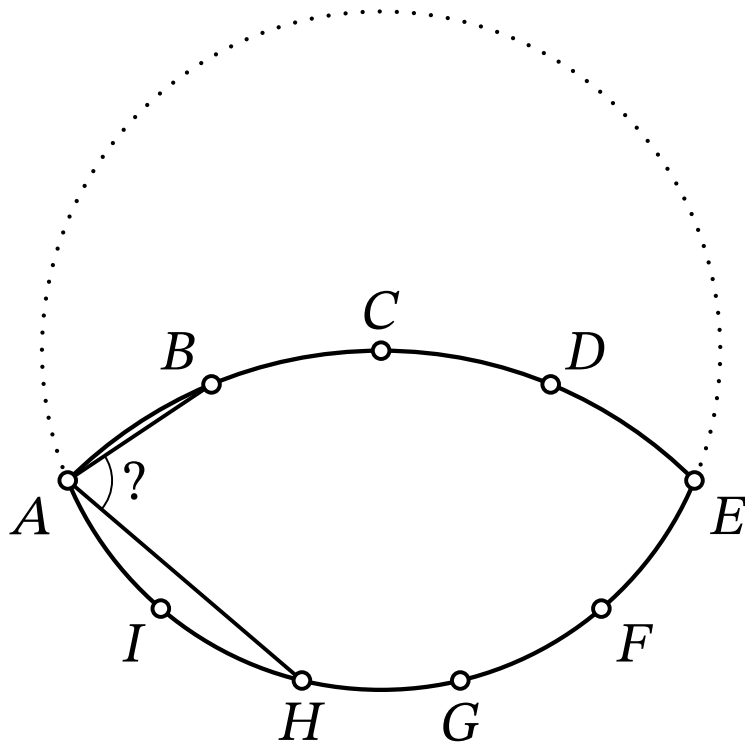
Вариант 7.3. Имеется натуральное число N . Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N , не больших 90, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Вариант 7.4. Имеется натуральное число N . Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N , не больших 110, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Задача 8.1. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 12° . Найдите градусную меру угла BAG .



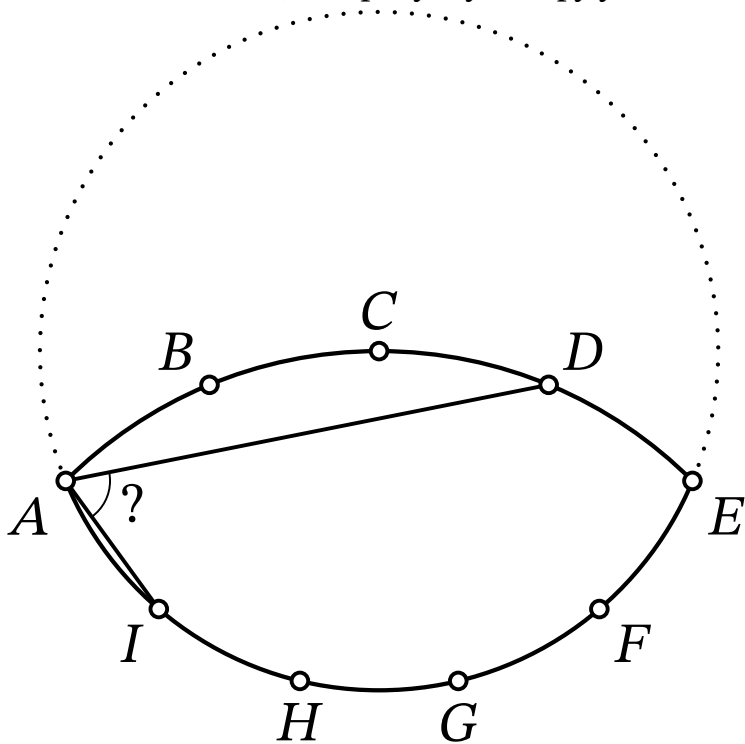
К задаче 8.1



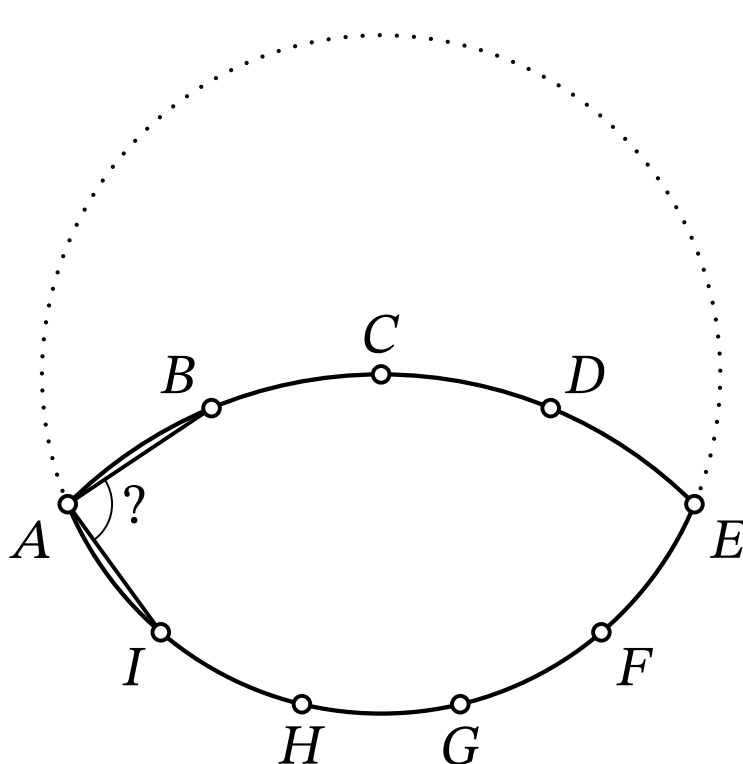
К задаче 8.2

Вариант 8.2. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 5° . Найдите градусную меру угла BAH .

Вариант 8.3. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 19° . Найдите градусную меру угла DAI .



К задаче 8.3



К задаче 8.4

Вариант 8.4. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 9° . Найдите градусную меру угла BAI .

ОТВЕТЫ

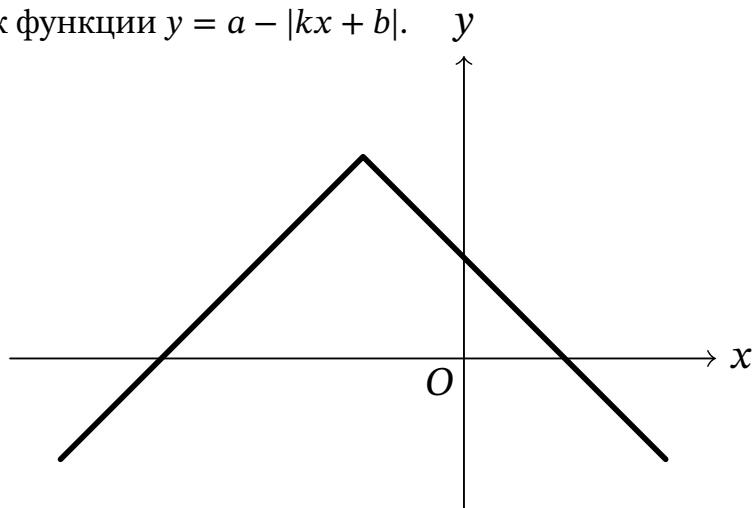
Максимальный балл за задание — 7. Максимальный балл за олимпиаду — 56

Задача 1

Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 3 балла.

Задача 1.1.

На рисунке изображён график функции $y = a - |kx + b|$.



К задаче 1.1

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Ответ: 1; 4.

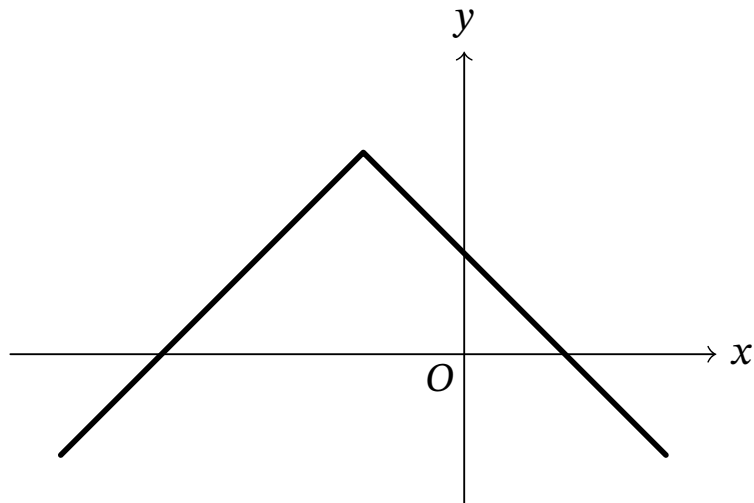
Решение. Так как $|kx + b|$ – величина неотрицательная, наибольшее значение функция $y = a - |kx + b|$ принимает, когда модуль равен 0, и это значение равно a . Значит, у вершины графика абсцисса находится из условия $kx + b = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{k}$, а ордината вершины равна a . Значит, $a > 0$ и $-\frac{b}{k} < 0$, то есть b и k – одного знака. Ясно, что оба соответствующих варианта подходят (например, указанный вид имеют графики функций $y = 2 - |x + 1|$ и $y = 2 - |-x - 1|$).

Вариант 1.2.

На рисунке изображён график функции $y = -a - |kx + b|$.

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;



К задаче 1.2

3. $a > 0, k < 0, b > 0$;

4. $a > 0, k < 0, b < 0$;

5. $a < 0, k > 0, b > 0$;

6. $a < 0, k > 0, b < 0$.

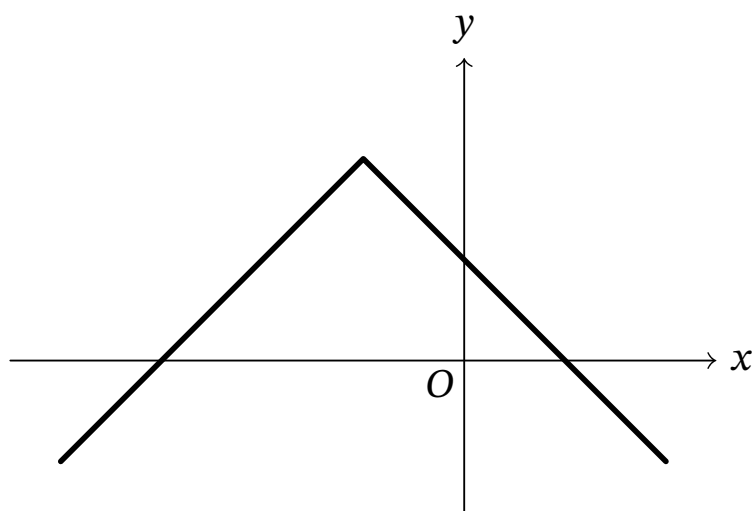
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;

8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Ответ: 5; 8.

Вариант 1.3.

На рисунке изображён график функции $y = a - |kx - b|$.



К задаче 1.3

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;

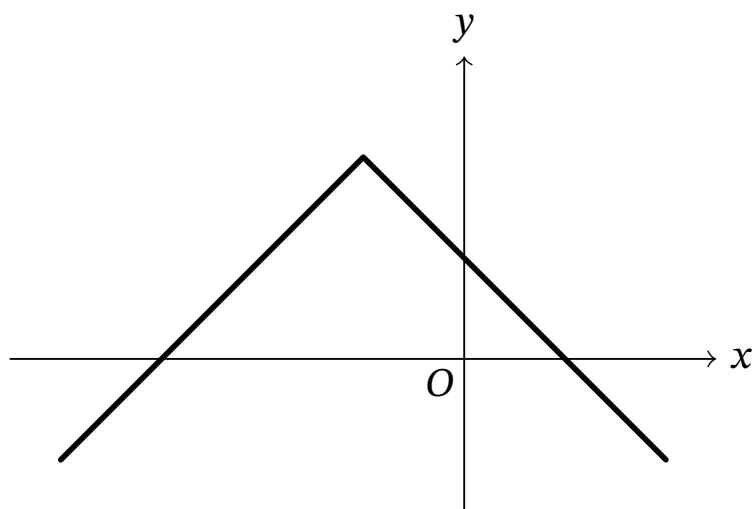
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;

3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Ответ: 2; 3.

Вариант 1.4.

На рисунке изображён график функции $y = -a - |kx - b|$.



К задаче 1.4

Выберите те утверждения, которые могут быть верны:

1. $a > 0, k > 0, b > 0$;
2. $a > 0, k > 0, b < 0$;
3. $a > 0, k < 0, b > 0$;
4. $a > 0, k < 0, b < 0$;
5. $a < 0, k > 0, b > 0$;
6. $a < 0, k > 0, b < 0$.
7. $a < 0, k < 0, b > 0$;
8. $a < 0, k < 0, b < 0$.

Ответ: 6; 7.

Задача 2

Всего 7 баллов. а) 2 балла за правильный ответ; б) 5 баллов за верный ответ; если не указан один из ответов, то 2 балла.

Задача 2.1.

Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 18$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 24$.

(а) Какие значения может принимать b ?

(б) Какие значения может принимать a ?

Ответ: (а) 8; (б) 4; 28.

Решение. (а) Характеристическое свойство арифметической прогрессии позволяет записать, что $a + c = 2b$. Подставляя в равенство для суммы чисел, имеем $a + b + c = 3b = 24$, откуда $b = \frac{24}{3} = 8$.

(б) Характеристическое свойство геометрической прогрессии позволяет записать, что $c^2 = 18b$, то есть $c^2 = 18 \cdot 8 = 144$, откуда $c = 12$ или $c = -12$. Тогда $a = 24 - b - c = 24 - 8 - 12 = 4$ в первом случае и $a = 24 - 8 - (-12) = 28$ во втором случае. Обе тройки чисел $(4; 8; 12)$ и $(28; 8; -12)$ удовлетворяют условию задачи. (Суммы чисел в них равны 24. В первом случае арифметическая прогрессия 4, 8, 12 имеет разность 4, а геометрическая прогрессия 8, 12, 18 имеет знаменатель $\frac{3}{2}$. Во втором случае арифметическая прогрессия 28, 8, -12 имеет разность (-20) , а геометрическая прогрессия 8, -12 , 18 имеет знаменатель $(-\frac{3}{2})$.)

Вариант 2.2. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 27$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 36$.

(а) Какие значения может принимать b ?

(б) Какие значения может принимать a ?

Ответ: (а) 12; (б) 6; 42.

Вариант 2.3. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 8$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 54$.

(а) Какие значения может принимать b ?

(б) Какие значения может принимать a ?

Ответ: (а) 18; (б) 24; 48.

Вариант 2.4. Числа a, b, c образуют арифметическую прогрессию (в таком порядке), числа $b, c, 45$ – геометрическую прогрессию (в таком порядке), и при этом $a + b + c = 60$.

(а) Какие значения может принимать b ?

(б) Какие значения может принимать a ?

Ответ: (а) 20; (б) 10; 70.

Задача 3.1. На окружности отмечены 20 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 20. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Ответ: $\frac{4}{19}$.

Решение. Первый способ. Будем выбирать вершины по очереди. Первая вершина задаёт чётность номеров вершин. Вторая вершина будет иметь такую же чётность с вероятностью $\frac{9}{19}$ (всего вершин без первой – 19, из них той же чётности – 9). При условии, что вторая вершина имеет нужную чётность, третья вершина будет иметь её с вероятностью $\frac{8}{18}$ (всего вершин без первой и второй – 18, из них той же чётности – 8). Искомая вероятность равна $\frac{9}{19} \cdot \frac{8}{18} = \frac{4}{19}$.

Второй способ. Всего треугольников с вершинами в отмеченных точках $C_{20}^3 = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18}{3 \cdot 2} = 1140$. Треугольников с вершинами одной чётности: $C_{10}^3 = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2} = 120$ с нечётными вершинами и столько же с чётными, итого 240. Так как выбор каждого треугольника равновероятен, искомая вероятность равна отношению числа «удачных» исходов ко всем возможным, то есть $\frac{240}{1140} = \frac{4}{19}$.

Вариант 3.2. На окружности отмечены 12 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 12. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Ответ: $\frac{2}{11}$.

Вариант 3.3. На окружности отмечены 14 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 14. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Ответ: $\frac{5}{26}$.

Вариант 3.4. На окружности отмечены 18 точек. Они пронумерованы по часовой стрелке последовательно целыми числами от 1 до 18. Какова вероятность, что у случайно выбранного треугольника с вершинами в этих точках все вершины будут одной чётности?

Ответ: $\frac{7}{34}$.

Задача 4

Всего 7 баллов. Если не указан один из ответов, то 3 балла.

Задача 4.1.

Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $n + 12$ и $n + 45$ являются точными квадратами.

Ответ: 4; 244.

Решение. Пусть $n + 45 = a^2$ и $n + 12 = b^2$, где a и b – целые числа. Тогда

$$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2 = (n + 45) - (n + 12) = 33.$$

Число $33 = 3 \cdot 11$ можно разложить в произведение двух целых множителей двумя принципиально разными способами (без учёта знаков и порядка):

$$(a + b)(a - b) = 33 = 3 \cdot 11 = 1 \cdot 33.$$

А с учётом знаков и порядка – восемью способами:

$$33 = 3 \cdot 11 = 1 \cdot 33 = 11 \cdot 3 = 33 \cdot 1 = (-3) \cdot (-11) = (-1) \cdot (-33) = (-11) \cdot (-3) = (-33) \cdot (-1),$$

из которых получим следующие восемь вариантов для значений a и b :

$$(a; b) = (\pm 7; \pm 4), (\pm 17; \pm 16).$$

(Например, для случая $3 \cdot 11$ имеем $a + b = 3, a - b = 11$, откуда

$$a = \frac{(a+b) + (a-b)}{2} = \frac{3+11}{2} = 7 \text{ и } b = \frac{(a+b) - (a-b)}{2} = \frac{3-11}{2} = -4,$$

остальные случаи рассматриваются аналогично.) Первые четыре варианта соответствуют значению $n = 7^2 - 45 = 4$, другие четыре варианта – значению $n = 17^2 - 45 = 244$.

Вариант 4.2. Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $n+20$ и $n+59$ являются точными квадратами.

Ответ: 5; 341.

Вариант 4.3. Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $n+5$ и $n+32$ являются точными квадратами.

Ответ: 4; 164.

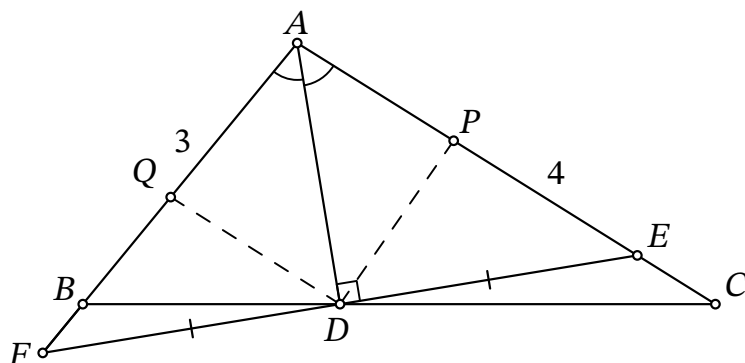
Вариант 4.4. Найдите все натуральные числа n , для которых оба числа $n+6$ и $n+61$ являются точными квадратами.

Ответ: 3; 723.

Задача 5.1. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 3$ и $AC = 4$ провели биссектрису AD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Ответ: $\frac{1}{7}$.

Решение. Так как $AC > AB$, ясно, что $\angle ADC = \angle ABD + \frac{\angle BAC}{2} > \angle ACD + \frac{\angle BAC}{2} = \angle ADB$, следовательно, $\angle ADC > 90^\circ > \angle ADB$, то есть точка E лежит на стороне AC , а точка F – на продолжении стороны AB за точку B . В треугольнике AFE биссектриса AD является также и высотой, поэтому этот треугольник равнобедренный ($AF = AE$), и AD является также медианой, то есть $ED = FD$. Далее можно действовать по-разному.



Первый способ. Проведём через точку D прямые, параллельные AB и AC , до пересечения с AC и AB в точках P и Q соответственно. Так как в треугольнике AEF отрезок DP параллелен стороне AF и выходит из середины стороны EF , – это средняя линия, откуда $AP = PE$. По свойству биссектрисы треугольника имеем $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$, а по теореме о пропорциональных отрезках имеем $\frac{AP}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{3}{3+4} = \frac{3}{7}$. Следовательно, $\frac{EC}{AC} = 1 - \frac{2AP}{AC} = 1 - 2 \cdot \frac{3}{7} = \frac{1}{7}$. Аналогично, $\frac{AQ}{AB} = \frac{CD}{CB} = \frac{4}{4+3} = \frac{4}{7}$ и $\frac{FB}{AB} = \frac{2AQ}{AB} - 1 = 2 \cdot \frac{4}{7} - 1 = \frac{1}{7}$. Наконец, $EC - FB = \frac{1}{7} \cdot (AC - AB) = \frac{1}{7} \cdot (4 - 3) = \frac{1}{7}$.

Второй способ. Пусть $EC = x, FB = y$. Используем теорему Менелая для треугольника AEF и прямой, содержащей точки B, D, C на прямых, содержащих его стороны:

$$\frac{AB}{BF} \cdot \frac{FD}{DE} \cdot \frac{EC}{CA} = 1 \Leftrightarrow \frac{3}{y} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{x}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3}.$$

Используем теорему Менелая для треугольника ABC и прямой, содержащей точки E, D, F на прямых, содержащих его стороны (с учётом соотношения $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{3}{4}$):

$$\frac{AE}{EC} \cdot \frac{CD}{DB} \cdot \frac{BF}{FA} = 1 \Leftrightarrow \frac{4-x}{x} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{y}{3+y} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4-x}{3+y}.$$

Итак, $\frac{x}{y} = \frac{4}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{4-x}{3+y}$, откуда $4-x = 3+y \Leftrightarrow y = 1-x$. Подставляя в $\frac{x}{y} = \frac{4}{3}$, получим $x = \frac{4}{7}$, тогда $y = \frac{3}{7}$ и $EC - FB = x - y = \frac{1}{7}$.

Вариант 5.2. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 4$ и $AC = 5$ провели биссектрису AD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Вариант 5.3. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 5$ и $AC = 6$ провели биссектрису AD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Ответ: $\frac{1}{11}$.

Вариант 5.4. В треугольнике ABC со сторонами $AB = 6$ и $AC = 7$ провели биссектрису AD . Прямая, проходящая через точку D перпендикулярно этой биссектрисе, пересекает прямые AB и AC в точках F и E соответственно. Найдите $EC - FB$.

Ответ: $\frac{1}{13}$.

Задача 6.1. Последовательность задана условиями $a_1 = 2, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n .

(а) (5 баллов) Найдите a_{2026} .

(б) (2 балла) Найдите сумму первых 2026 членов последовательности.

Ответ: (а) $\frac{1}{3}$; (б) -588 .

Решение. Посчитав первые несколько членов последовательности непосредственно, легко видеть, что она периодична с периодом 4: $2, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, -3, 2, \frac{1}{3}$ и т. д. (а) Так как $2026 = 4 \cdot 506 + 2$, член a_{2026} будет равен $a_2 = \frac{1}{3}$. (б) Сумма членов последовательности внутри одного цикла длины 4 равна $2 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} - 3 = -\frac{7}{6}$. Сумма первых 2026 членов — это сумма 506 полных циклов и ещё двух следующих членов (2 и $\frac{1}{3}$), то есть $\left(-\frac{7}{6}\right) \cdot 506 + 2 + \frac{1}{3} = -588$.

Вариант 6.2. Последовательность задана условиями $a_1 = 3, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n .

(а) (5 баллов) Найдите a_{2030} .

(б) (2 балла) Найдите сумму первых 2030 членов последовательности.

Ответ: (а) $\frac{1}{2}$; (б) 595.

Вариант 6.3. Последовательность задана условиями $a_1 = 4, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n .

(а) (5 баллов) Найдите a_{2018} .

(б) (2 балла) Найдите сумму первых 2018 членов последовательности.

Ответ: (а) $\frac{3}{5}$; (б) 1357.

Вариант 6.4. Последовательность задана условиями $a_1 = 5, a_{n+1} = \frac{a_n - 1}{a_n + 1}$ при всех натуральных n .

(а) (5 баллов) Найдите a_{2002} .

(б) (2 балла) Найдите сумму первых 2002 членов последовательности.

Ответ: (а) $\frac{2}{3}$; (б) 1989.

Задача 7.1. Имеется натуральное число N . Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N , не больших 100, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Ответ: 35.

Решение. Покажем, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы тогда и только тогда, когда N — простое число или (натуральная) степень простого числа. Действительно, рассмотрим три случая.

I случай: $N = 1$. Тогда Алиса выписывает 1, и у Маруси нет хода.

II случай: $N = p^a$, где p – простое, $a \geq 1$. Тогда есть всего два вида возможных ходов: 1 и какая-то натуральная степень p . Один из таких ходов делает Алиса, второй – Маруся, и третий ход Алиса сделать не сможет.

III случай: N имеет хотя бы два различных простых делителя. Покажем, что Алиса сможет выиграть. Пусть Алиса выпишет произведение всех простых делителей числа N без какого-то одного p_i . Тогда останется всего два вида возможных ходов: 1 и какая-то натуральная степень p_i . Значит, следующим ходом Маруся сделает один из таких ходов, Алиса – другой, после чего Маруся сделать ход не сможет.

Осталось посчитать, сколько натуральных чисел, не превосходящих 100, являются простыми или натуральными степенями простых. Простых чисел – 25, квадратов простых – 4 ($2^2, 3^2, 5^2, 7^2$), кубов – 2 ($2^3, 3^3$), четвёртых степеней – 2 ($2^4, 3^4$), а также по одной пятой и шестой степени ($2^5, 2^6$). Всего $25+4+2+2+1+1=35$ возможных значений N .

Вариант 7.2. Имеется натуральное число N . Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N , не больших 80, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Ответ: 31.

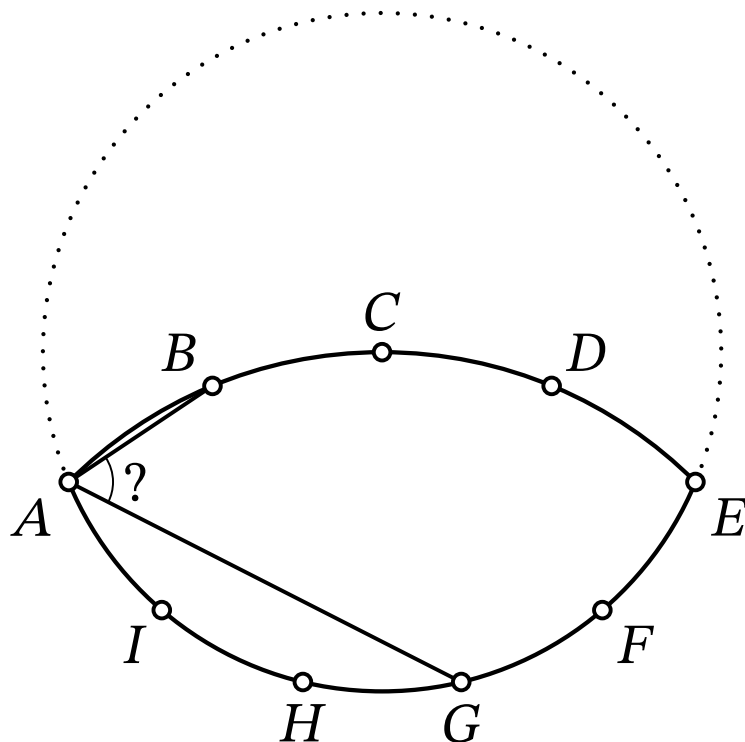
Вариант 7.3. Имеется натуральное число N . Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N , не больших 90, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Ответ: 34.

Вариант 7.4. Имеется натуральное число N . Алиса и Маруся по очереди выписывают на доску различные натуральные числа по следующему правилу: каждое выписанное число должно быть делителем N и при этом быть взаимно просто со всеми числами, уже выписанными на доске. Алиса ходит первая. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Сколько существует натуральных N , не больших 110, таких, что Маруся имеет возможность выиграть независимо от действий Алисы?

Ответ: 39.

Задача 8.1. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 12° . Найдите градусную меру угла BAG .



К задаче 8.1

Ответ: 58.

Решение. Пусть градусные меры дуг первой окружности $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = x$ и градусные меры дуг второй окружности $\widehat{EF} = \widehat{FG} = \widehat{GH} = \widehat{HI} = \widehat{IA} = y$. Вычисляя величины вписанных углов ABD и AHG через градусные меры дуг, на которые они опираются, получим уравнение

$$\frac{360^\circ - 3x}{2} - \frac{360^\circ - 3y}{2} = 12^\circ,$$

откуда $y = x + 8^\circ$. Теперь заметим, что угол ACE является вписанным в первой окружности и центральным – во второй, что позволяет вычислить его величину двумя способами:

$$\angle ACE = \frac{360^\circ - 4x}{2} = 5y,$$

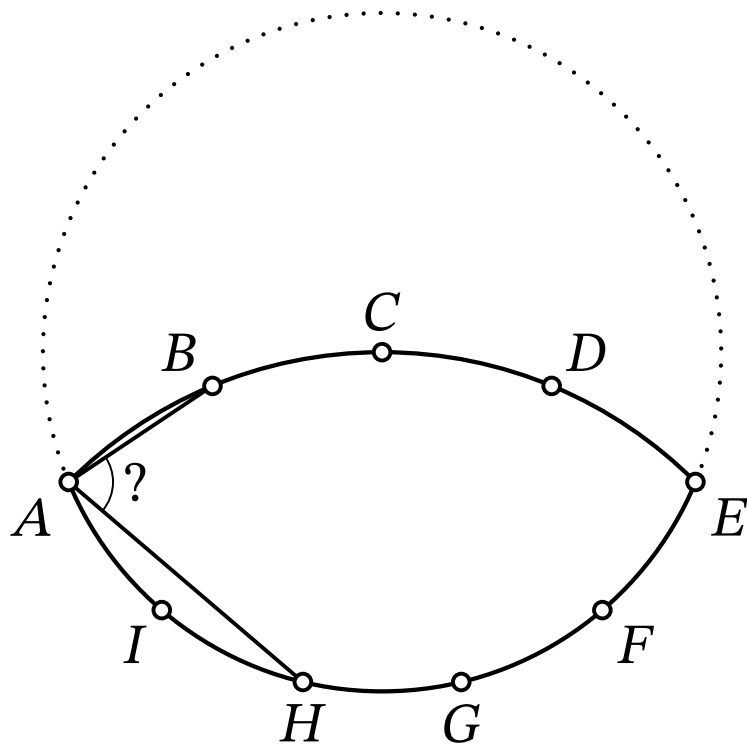
откуда $2x + 5y = 180^\circ$. Получили систему двух линейных уравнений:

$$\begin{cases} y = x + 8^\circ, \\ 2x + 5y = 180^\circ. \end{cases}$$

Решая её, находим $x = 20^\circ$, $y = 28^\circ$. Наконец,

$$\angle BAG = \angle BAE + \angle EAG = \frac{3x}{2} + \frac{2y}{2} = \frac{3}{2} \cdot 20^\circ + 28^\circ = 58^\circ.$$

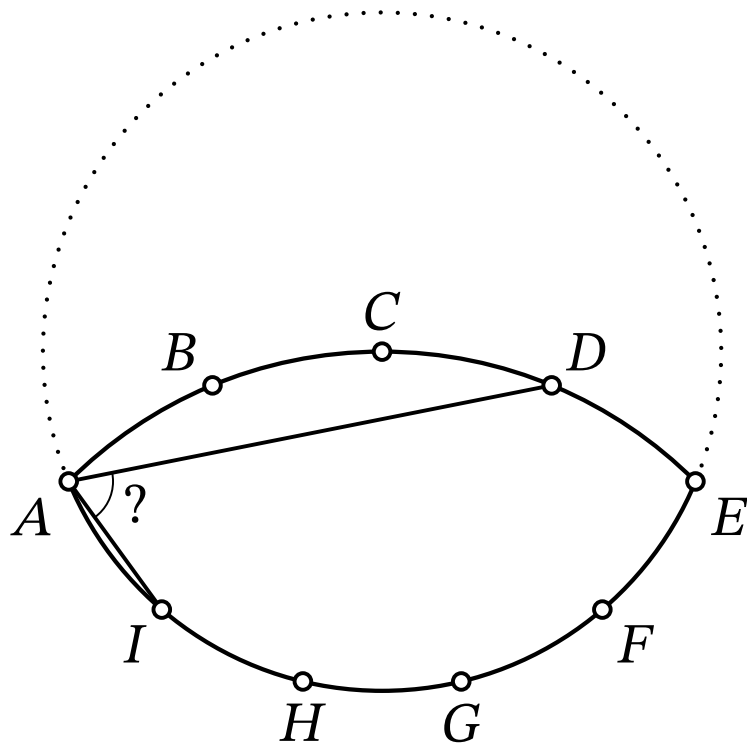
Вариант 8.2. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 5° . Найдите градусную меру угла BAH .



К задаче 8.2

Ответ: 75.

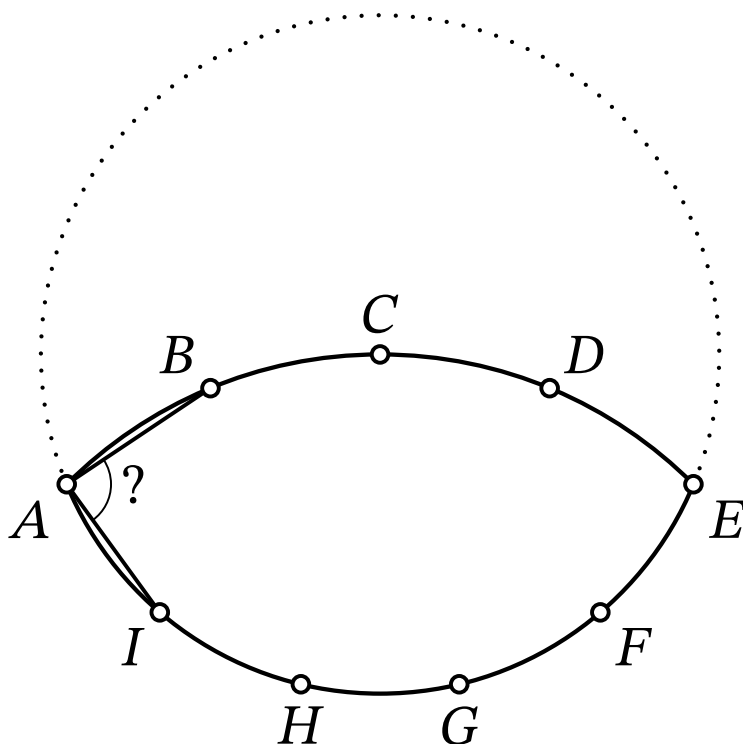
Вариант 8.3. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 19° . Найдите градусную меру угла DAI .



К задаче 8.3

Ответ: 67.

Вариант 8.4. Точки A, B, C, D и E последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой окружности. Точки E, F, G, H, I и A последовательно отмечены на равном расстоянии на дуге некоторой другой окружности с центром C (см. рис.). Известно, что угол ABD больше угла AHG на 9° . Найдите градусную меру угла BAI .



К задаче 8.4

Ответ: 87.