



1. Wideröe linac (7 баллов)

Один из первых ускорителей заряженных частиц — линейный ускоритель Видероз на дрейфовых трубках — состоит из последовательности полых проводящих трубок, разделённых узкими зазорами. Электрическое поле может существовать только в зазорах. Внутри трубок поле отсутствует, и ускоряемая частица движется по инерции

Поле в зазорах меняется периодически: в течение времени τ оно направлено вдоль движения частицы (режим ускорения), а в течение следующего интервала времени τ — противоположно этому направлению (режим торможения). В момент $t = 0$ покоящаяся частица массы m начинает движение в первом зазоре. Известно, что в этом зазоре её скорость равномерно увеличивается в течение всего первого интервала τ , так что к моменту входа в первую трубку частица приобретает кинетическую энергию E . Все последующие зазоры считаются настолько узкими, что частица пролетает их практически мгновенно; при этом в каждом из них её кинетическая энергия также увеличивается на величину E .

Для эффективной работы ускорителя необходимо, чтобы каждый следующий зазор частица проходила точно в момент начала режима ускорения.

- Найдите расстояние x_0 , которое частица проходит в первом зазоре до входа в первую трубку.
- Каким должно быть отношение длин трубок $L_1 : L_2 : \dots : L_n$, если требуется, чтобы при заданном числе этапов ускорения общая длина установки была минимальной?

2. Цилиндры (14 баллов)

Есть два цилиндрических геометрически подобных сосуда, изготовленных из одного и того же материала, плотность которого больше плотности воды. Сосуды тонкостенные, но с массивным дном. Их линейные размеры относятся как 2 : 1. Большой сосуд стоит на горизонтальном столе и заполнен водой; в нём плавает (естественно, не касаясь дна) меньший сосуд, также заполненный водой. Известно, что объём воды в каждом сосуде составляет одну и ту же долю его внутреннего объёма. Толщина дна каждого сосуда равна $\frac{1}{k}$ его высоты, где $k > 1$. Плотность воды равна 1000 кг/м^3 .

- Пусть $k = 4$. Определите диапазон возможных значений плотности ρ материала сосудов.
- При каких значениях k не существует ответа на вопрос предыдущего пункта?

- Предположим, что число сосудов увеличилось до N . N -й сосуд стоит на столе и заполнен водой; в нём плавает $(N - 1)$ -й сосуд, в нём — $(N - 2)$ -й и так далее. Линейные размеры сосудов относятся как $N : (N - 1) : (N - 2) : \dots : 2 : 1$. Объём воды в каждом сосуде составляет одну и ту же долю его внутреннего объёма.

Утверждается, что при заданном значении k ($k > 2$) и некотором значении ρ ($\rho > \rho_0$) такая система сосудов может существовать в равновесии (возможно, неустойчивом) для любого $N \geq 3$.

Верно ли это утверждение?

Примечание. При решении может оказаться полезной формула для суммы кубов натуральных чисел

$$1 + 8 + 27 + \dots + n^3 = \sum_{a=1}^n a^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

3. Кризис кипения (9 баллов)

В обычном (пузырьковом) режиме кипения тепло отводится от поверхности нагревателя за счёт парообразования и интенсивного перемешивания жидкости, возникающего при росте и отрыве пузырьков. Однако при достаточно большой мощности нагревателя режим кипения меняется: образование пара становится столь интенсивным, что пузырьки сливаются друг с другом, формируя на поверхности нагревателя сплошную паровую плёнку. Такая смена режима кипения называется кризисом кипения.

Поскольку коэффициент теплоотдачи через паровой слой на два порядка меньше, чем при пузырьковом кипении, стационарный режим теплопередачи нарушается: при неизменной мощности нагрева температура нагревательного элемента начинает неконтролируемо расти. Это приводит к его разрушению — так называемому «пережогу стенки».

Согласно гидродинамической теории С. С. Кутателадзе, критическое состояние наступает, когда интенсивный поток образующегося пара начинает препятствовать доступу жидкости к поверхности нагревателя. Проще говоря, этот поток действует на воду подобно сильному встречному ветру.

Динамическое давление такого «пара-ветра» определяется формулой:

$$P = \frac{\rho u^2}{2},$$

где u — скорость пара, образующегося у поверхности нагревателя, а ρ — его плотность.

Продолжение задания см. на листе 2

Кризис кипения наступает, когда динамическое давление пара достигает некоторого значения $P_{\text{крит}}$, при котором оно сравнивается с давлением, обусловленным силами поверхностного натяжения и тяжести, стремящимися «протолкнуть» воду обратно к поверхности нагревателя сквозь поток пара. Величину критического динамического давления для воды можно считать равной $P_{\text{крит}} \approx 20$ Па.

Рассмотрим сосуд с плоским нагревательным элементом площадью 80 см^2 (похожий на электрочайник). Вода в сосуде нагрета до температуры, близкой к 100°C ; плотность пара при этой температуре и нормальном атмосферном давлении $\rho = 0,6 \text{ кг/м}^3$. Удельная теплота парообразования $L = 2,26 \text{ МДж/кг}$.

- При какой мощности W_0 , подводимой к нагревателю, наступает кризис кипения?
- Пусть к нагревателю подводится мощность $1,1W_0$. До какой температуры теоретически (!) может разогреться нагреватель, если коэффициент теплоотдачи от стенки к воде через паровой слой равен $\alpha = 200 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$? Мощность теплопередачи определяется формулой

$$W = \alpha \cdot S \cdot \Delta T,$$

где S — площадь нагревателя, а ΔT — так называемый «перегрев стенки», то есть разность температур нагревательного элемента и воды в сосуде.

- Теперь к нагревателю подводится мощность W , значительно меньшая W_0 . За какое время выкипит электрический чайник с таким нагревателем и сломанным терморегулятором, содержащий 1 кг воды при температуре кипения, если перегрев стенки составляет 5°C ? Коэффициент теплопередачи для воды при развитии пузырькового кипения равен $\alpha = 5 \cdot 10^4 \text{ Вт/(м}^2\cdot^\circ\text{C)}$.

4. Нелинейная верёвка (10 баллов)

В лаборатории исследуют свойства особой многожильной верёвки, сплетённой из волокон разных типов. Для описания свойств такой верёвки удобно использовать *дифференциальную жёсткость* k , которая определяется как отношение малого изменения силы упругости ΔF к вызванному им малому изменению удлинения Δx :

$$k = \frac{\Delta F}{\Delta x}.$$

В лаборатории имеется большое количество образцов — отрезков исследуемой верёвки одинаковой длины. Всякий раз эксперимент проводят с новым образцом.

В опытах первого типа образец закрепляют и плавно увеличивают его растяжение x , измеряя

возникающую силу натяжения F . Полученные данные свидетельствуют, что при достижении пороговых значений удлинения (в моменты разрыва внутренних волокон того или иного типа) сила натяжения скачкообразно уменьшается. Разорванные волокна при снятии нагрузки не восстанавливаются. На рис. 1 приведён график зависимости k от силы натяжения F (полу жирные линии чёрного цвета), построенный по результатам этого исследования.

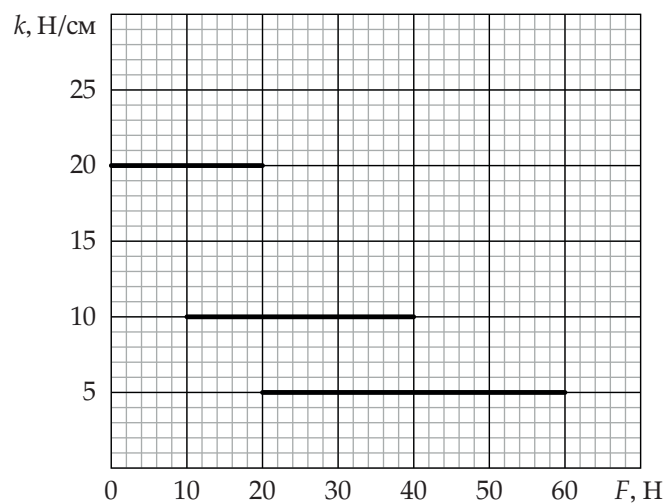


Рис. 1

- Используя график $k(F)$, восстановите зависимость силы от удлинения $F(x)$ для процесса *растяжения* образца. Постройте график $F(x)$, отметив на осях значения в характерных точках.

В опытах второго типа один конец образца закрепляют, а к другому подвешивают лёгкое ведро. В ведро начинают равномерно подсыпать песок, так что его вес увеличивается линейно со временем. Через 30 мин вес достигает 50 Н , после чего песок начинают так же равномерно удалять до полного опустошения ведра (что занимает ещё 30 мин). Установка оснащена специальным демпфером, который мгновенно гасит колебания ведра при разрывах волокон.

- Изобразите идеализированный график зависимости удлинения образца x от времени t на протяжении всех 60 мин эксперимента, полагая, что система в любой момент времени находится в положении равновесия.

Критерии оценивания

1. Wideröe linac (7 баллов)

№	Критерий	Балл
1.1	Записана связь скорости v_1 в конце первого зазора с кинетической энергией E ($E = mv_1^2/2$).	0,5
1.2	Использована связь расстояния x_0 со скоростью v_1 и временем τ для равноускоренного движения (через среднюю скорость или площадь под графиком).	1,0
1.3	Получен верный ответ для первого зазора: $x_0 = \tau\sqrt{E/2m}$.	0,5
1.4	Указано, что время пролёта первой трубки должно составлять нечётное число интервалов τ .	0,5
1.5	Сформулировано условие синхронизма для всех последующих трубок: время пролёта должно быть кратно 2τ .	1,0
1.6	Обосновано, что для минимальной длины время пролёта первой трубки должно быть τ , а всех последующих — 2τ .	1,0
1.7	Записано выражение для скорости частицы в n -й трубке $v_n = \sqrt{2nE/m}$ через номер этапа ускорения.	0,5
1.8	Указана связь длины трубки со скоростью: $L_1 = v_1\tau$, а для последующих $L_n = v_n \cdot 2\tau$ (при $n \geq 2$).	1,0
1.9	Получен верный ответ для отношения длин трубок: $1 : 2\sqrt{2} : 2\sqrt{3} : \dots : 2\sqrt{n}$.	1,0

Примечания.

- *Ошибка в коэффициенте:* в случае, если в п. 1.2 допущена ошибка в коэффициенте (например, использована формула для равномерного движения $x_0 = v_1\tau$), баллы по пунктам 1.2 и 1.3 не выставляются.
- *Арифметические ошибки:* ошибки в арифметических расчётах в пунктах 1.7, 1.8 при верном физическом ходе решения приводят к снижению оценки за соответствующий пункт на 50%.

2. Цилиндры (14 баллов)

№	Критерий	Балл
1. Диапазон плотностей ($k = 4$) (8,0 баллов)		8,0
1.1	Записано базовое условие плавания меньшего сосуда (равенство силы Архимеда и суммы сил тяжести материала и воды).	0,7
1.2	Получено выражение для отношения объёма погружённой части к полному объёму: $V'_1/V_1 = x/k + \alpha(k-1)/k$, где $x = \rho/\rho_0$.	0,8
1.3	Сформулировано условие плавания «не погружаясь целиком», записано неравенство $V'_1 \leq V_1$ или аналогичное.	0,7
1.4	Получено аналитическое ограничение на плотность из условия плавания: $\rho \leq \rho_0[k - \alpha(k-1)]$.	1,3

1.5	Обоснована необходимость условия «некасания дна» (сравнение глубины погружения h'_1 и итогового уровня воды h_2 в большем сосуде).	0,7
1.6	Верно выражен объём воды в большем сосуде $V_{в2}$ и итоговый уровень воды h_2 с учётом объёма погружённой части V'_1 .	0,8
1.7	Проведены алгебраические преобразования неравенства $h'_1 < h_2$ с использованием соотношения площадей $S_2 = 4S_1$.	0,5
1.8	Получено второе аналитическое ограничение на плотность: $x < \frac{5}{3}\alpha(k-1)$ (или эквивалентное для ρ).	1,0
1.9	Найдена точка пересечения ограничений (α^*, x^*) и обосновано, что искомому максимуму соответствует $\rho^* = x^* \rho_0$.	0,5
1.10	Получен верный численный диапазон плотностей: $1000 \text{ кг/м}^3 < \rho < 2500 \text{ кг/м}^3$ (по 0,5 балла за каждую границу).	1,0
2. Анализ параметра k (2,5 балла)		2,5
2.1	Указано, что диапазон исчезает, когда минимально возможная плотность для плавания $\rho^* \leq \rho_0$.	0,5
2.2	Записано уравнение или неравенство для критического случая через параметры k и ρ_0 .	0,5
2.3	Проведены корректные алгебраические выкладки по нахождению критического значения.	0,5
2.4	Получен верный численный ответ для критического значения: $k \leq 1,6$.	1,0
3. Система из N сосудов (3,5 балла)		3,5
3.1	Записано рекуррентное соотношение для массы стенок и дна сосудов.	1,0
3.2	Обоснована зависимость общей массы «матрёшки» от числа сосудов $M(N) \propto N^4$.	0,5
3.3	Показано, что объём растёт медленнее массы: $V(N) \propto N^3$, из чего следует неизбежная потеря плавучести.	1,0
3.4	Сделан верный вывод о том, что утверждение ложно.	1,0

Примечания.

- **Математические ошибки:** ошибки в математических преобразованиях при верно записанных физических уравнениях снижают балл за соответствующий пункт на 50%.
- **Логика в части 3:** если в пункте 3.4 дан верный ответ при полностью неверных физических рассуждениях в пунктах 3.1–3.3, выставляется полный балл за этот пункт.

3. Кризис кипения (9 баллов)

№	Критерий	Балл
1. Расчет критической мощности (5,0 баллов)		5,0
1.1	Записана связь массы пара с подводимой энергией через теплоту парообразования: $\Delta m = W\Delta t/L$.	1,0
1.2	Выражена скорость пара u через изменение объёма: $Su\Delta t = \Delta m/\rho$.	1,0

1.3	Получена явная зависимость скорости от мощности: $u = W/(\rho SL)$.	0,5
1.4	Использовано равенство динамического давления пара критическому значению P для определения точки смены режима.	1,0
1.5	Получена итоговая формула для критической мощности: $W_0 = SL\sqrt{2\rho P_{\text{крит}}}$.	0,5
1.6	Получен верный численный ответ для критической мощности: $W_0 \approx 89$ кВт.	1,0
2. Теоретический перегрев стенки (2,5 балла)		2,5
2.1	Записана уравнение теплового баланса для стационарного режима при наличии паровой пленки: $1,1W_0 = \alpha S\Delta T$.	1,5
2.2	Получен верный численный ответ для температуры: $\Delta T \approx 61\,000$ °С.	1,0
3. Время выкипания чайника (1,5 балла)		1,5
3.1	Записана мощность в режиме пузырькового кипения через заданный перегрев и связь со временем выкипания.	1,0
3.2	Получен верный численный ответ: $t \approx 1130$ с (или ≈ 19 мин).	0,5

Примечания.

- **Размерности:** ошибки в степенях десятки (*перевод МДж или см²*) или другие ошибки в вычислениях по верной формуле снижают балл за численный ответ в п. 2.2 на 50%.
- **Преобразования:** верные физические рассуждения, не приводящие к правильным итоговым формулам вследствие ошибок в математических преобразованиях, приводят к снижению балла за соответствующий пункт на 50%.

4. Нелинейная верёвка (10 баллов)

№	Критерий	Балл
1. Построение графика $F(x)$ (4,0 балла)		4,0
1.1	Из решения следует понимание того, что дифференциальная жёсткость на линейных участках эквивалентна обычной жёсткости ($\Delta F/\Delta x = F/x$ или что-то подобное).	0,5
1.2	Рассчитаны характерные точки перегибов/скачков: $x_1 = 1$ см, $x_2 = 4$ см, $x_3 = 12$ см (по 0,5 балла за каждую верно найденную точку).	1,5
1.3	На рисунке верно отображены скачки силы (вертикальные линии вниз или разрывы) при $x = 1$ см и $x = 4$ см.	0,5
1.4	График представлен в виде ломаной (линейные участки между разрывами) с верным качественным соотношением наклонов.	1,0
1.5	На осях графика $F(x)$ подписаны численные значения в ключевых узловых точках.	0,5
2. График $x(t)$: Фаза нагружения (5,0 баллов)		5,0
2.1	Найдены моменты времени разрывов: $t_1 = 12$ мин и $t_2 = 24$ мин.	1,0
2.2	Рассчитаны значения x сразу после скачков (переход на новую ветвь): 2 см и 8 см (по 1,0 балла за каждое верно найденное значение).	2,0

2.3	Рассчитано пиковое значение удлинения $x(30) = 10$ см (для силы 50 Н).	0,5
2.4	На графике $x(t)$ явно выделены вертикальные участки (мгновенность разрыва).	1,0
2.5	Участки между скачками изображены как отрезки прямых (линейный рост из начала координат).	0,5
3. График $x(t)$: Фаза разгрузки (1,0 балл)		1,0
3.1	График разгрузки представлен в виде прямой линии, соединяющей точки (30 мин; 10 см) и (60 мин; 0 см), без обратных скачков.	1,0

Примечания.

- *Ошибки в вычислениях:* арифметические ошибки при правильном ходе решения и верном виде графиков приводят к снижению баллов за соответствующие расчетные пункты на 50%.
- *Оформление графиков:* масштаб по осям может быть любым, в том числе не пропорциональным или сбитым, но если значения в особых точках найдены верно, это к снижению баллов не приводит.