

**1. Тонны песка (4 баллов)**

В пустой контейнер засыпают песок с помощью двух конвейерных лент. Длина каждой ленты составляет $L = 30$ м. Первая лента движется со скоростью $v_1 = 3$ м/с, с неё в контейнер каждую секунду сыпается $m_1 = 20$ кг песка. Вторая лента движется со скоростью $v_2 = 2$ м/с, с неё в контейнер каждую секунду поступает $m_2 = 10$ кг песка. Ленты включают одновременно, в начальный момент они пусты. Песок начинают подавать на ленты на расстоянии L от контейнера сразу после их включения.

- За какое наименьшее время после включения лент в контейнер будет загружено $M = 4$ т песка?
- Сколько килограммов песка поступит в контейнер с каждой ленты к моменту окончания загрузки?

2. Радиус Шварцшильда (5 баллов)

При решении задачи могут понадобиться следующие справочные данные: гравитационная постоянная $G = 6,7 \cdot 10^{-11} \frac{\text{м}^3}{\text{кг} \cdot \text{с}^2}$; скорость света в вакууме $c = 3 \cdot 10^8$ м/с; радиус Земли $R_3 = 6,4 \cdot 10^6$ м; ускорение свободного падения на поверхности Земли $g = G \frac{M_3}{R_3^2} = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$ (здесь M_3 — масса Земли). Приведённые обозначения физических констант остаются неизменными на протяжении всей задачи.

Согласно общей теории относительности, если сжать сферическое тело равномерной плотности до радиуса, меньшего некоторого критического значения R_g , то гравитация на его поверхности станет настолько сильной, что даже свет не сможет покинуть это тело — оно превратится в чёрную дыру. Этот критический радиус, называемый гравитационным, или радиусом Шварцшильда, вычисляется по формуле:

$$R_g = 2 \cdot m^\alpha \cdot G^\beta \cdot c^\gamma,$$

где m — масса тела, α , β и γ — некоторые безразмерные постоянные. Никакие другие характеристики тела (плотность, химический состав и т.п.) на значение R_g не влияют.

- Пользуясь соображениями размерности, определите значения постоянных α , β и γ .
- До какого радиуса необходимо сжать Землю, согласно приведённой теории, чтобы она превратилась в чёрную дыру?

3. Система с поджатыми пружинами (8 баллов)

В системе, изображённой на рисунке 1, невесомая и нерастяжимая нить перекинута через два подвижных невесомых блока. Её правый конец прикреплен к неподвижной горизонтальной стенке, а левый конец — к поджатой пружине жёсткостью $k_1 = k$. Ось правого блока прикреплена к поджатой пружине жёсткостью $k_2 = 4k$. Пороговые значения сил поджатия обеих пружин одинаковы и равны F_0 . Верхние концы пружин жёстко закреплены. В начальный момент времени левый блок начинают равномерно опускать, так что его ось движется с постоянной скоростью v . Известно, что величина силы, прикладываемой к оси блока, в начальный момент равна F_0 . Считайте, что нить не проскальзывает по блокам, трение в осях блоков отсутствует.

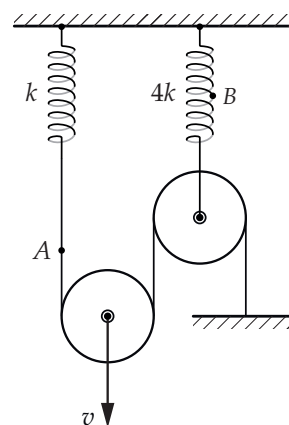


Рис. 1

- Определите скорости точки A нити и точки B (середины правой пружины) через время t после начала движения.
- Найдите зависимость от времени силы F , которую необходимо прикладывать к оси левого блока, чтобы он двигался вниз с постоянной скоростью v .

Примечание. Обе поджатые пружины устроены так: они не деформируются, пока приложенная к ним сила не превысит пороговое значение F_0 . Как только сила становится больше F_0 , пружина начинает растягиваться (или сжиматься), причём её жёсткость k_i определяет связь между изменением силы упругости и деформацией:

$$k_i = \frac{F - F_0}{x_i}, \quad i = 1, 2,$$

где x_i — абсолютная величина деформации (изменение длины) пружины.

Продолжение задания см. на листе 2

4. Определение плотности (6 баллов)

В лаборатории имеется ареометр, который позволяет измерять плотность только в диапазоне от $0,90 \text{ г/см}^3$ до $1,20 \text{ г/см}^3$. Для определения плотности ρ_x неизвестной жидкости, которая легче воды, используется метод смешивания. Готовят три смеси с объёмными долями воды: $0,40$, $0,50$ и $0,60$ (эти значения известны точно). Измерения дают следующие значения плотности смесей: $\rho_1 = 0,912 \text{ г/см}^3$, $\rho_2 = 0,926 \text{ г/см}^3$ и $\rho_3 = 0,938 \text{ г/см}^3$. Абсолютная погрешность каждого измерения $\Delta\rho = 0,005 \text{ г/см}^3$. Плотность воды принята равной $\rho = 1,000 \text{ г/см}^3$ точно (эталонное значение).

- Для каждой смеси вычислите плотность исходной жидкости ρ_x и определите абсолютную погрешность каждого полученного значения. Считайте, что объём смеси равен сумме объёмов смешиваемых жидкостей.
- Оцените, в каком интервале может находиться истинное значение ρ_x по результатам трёх измерений с учётом их погрешностей.
- Если бы у вас была возможность провести только одно измерение, какую объёмную долю воды α нужно было бы выбрать, чтобы погрешность определения ρ_x была наименьшей? Учтите, что плотность смеси должна попадать в рабочий диапазон ареометра. Чему равна эта минимальная погрешность? Считайте абсолютную погрешность определения плотности ареометром равной $\Delta\rho$ для любого значения объёмной доли воды.

Критерии оценивания

1. Тонны песка (4 балла)

№	Критерий	Балл
1.1	Правильно определено время начала поступления песка от каждой ленты: $t_1 = 10$ с, $t_2 = 15$ с.	1,0
1.2	Составлено верное уравнение для общего времени загрузки: $m_1(T - t_1) + m_2(T - t_2) = M$.	1,0
1.3	Уравнение решено правильно, получено $T = 145$ с.	1,0
1.4	Найдены массы песка от каждой ленты: $M_1 = 2700$ кг, $M_2 = 1300$ кг.	1,0

Примечание. Если участник не учёл время доставки песка по ленте (т.е. использовал $m_1T + m_2T = M$), задача оценивается в **0 баллов**.

2. Радиус Шварцшильда (5 баллов)

№	Критерий 1	Балл
1. α, β, γ		
1.1	Указано, что размерность массы содержится только в m и G , поэтому их произведение позволяет исключить массу.	1,0
1.2	Верно вычислена размерность произведения mG : L^3T^{-2} .	1,0
1.3	Указано, что для получения размерности длины необходимо разделить mG на величину с размерностью L^2T^{-2} (например, на c^2).	1,5
1.4	Из соотношения $R_g \sim \frac{mG}{c^2}$ найдены значения $\alpha = 1$, $\beta = 1$, $\gamma = -2$.	0,5
2. Радиус Земли		
2.1	Использована связь $g = \frac{GM_3}{R_3^2}$ для выражения $R_g = \frac{2gR_3^2}{c^2}$.	0,5
2.2	Произведены верные арифметические вычисления с учётом порядков величин, получен ответ $R_g \approx 9,1$ мм. Допускается отклонение в пределах 0,1 мм из-за округления.	0,5

№	Критерий 2	Балл
1. α, β, γ		
1.1	Правильно записаны размерности всех величин: $[m] = M$, $[G] = L^3M^{-1}T^{-2}$, $[c] = LT^{-1}$ (или единицы измерения).	0,6

1.2	На основе условия равенства размерностей левой и правой частей выражения для радиуса Шварцшильда получена система уравнений: $3\beta + \gamma = 1, \alpha - \beta = 0, -2\beta - \gamma = 0$ (каждое уравнение — 0,8 балла).	2,4
1.3	Система решена верно, получены значения: $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = -2$.	1,0
2. Радиус Земли		
2.1	Правильно выражена масса Земли из формулы $g = GM_3/R_3^2$, выполнены необходимые подстановки численных значений и получен верный ответ.	1,0

Примечание.

- Если задача решена верно любым способом, выставляется полный балл.
- Если при верном ходе решения допущена арифметическая ошибка (например, неверно перемножены степени десятки), то снимается **1,5 балла** (т. е. максимум можно получить **3,5 балла**).
- Если использованы не все справочные данные, но ход решения верен, баллы не снижаются.
- Если размерностный анализ выполнен верно, но во второй части допущена грубая ошибка (например, неправильно найдена масса), то за вторую часть ставится **0 баллов**, но первая часть оценивается полностью.

3. Система с поджатыми пружинами (8 баллов)

№	Критерий	Балл
1. Скорости точек A и B.		
1.1	Получена верная связь скоростей осей блоков и скорости нижнего конца левой пружины.	2,0
1.2	Получена верная связь скорости точки B середины пружины и скорости оси правого блока.	1,0
1.3	Получен верный ответ на первый вопрос задачи.	1,0
2. Зависимость силы $F(t)$		
2.1	Указано, что в начальный момент времени левая пружина не начнёт деформироваться.	1,0
2.2	Верно определён момент времени, после которого начнёт растягиваться левая пружина.	2,0
2.3	Получен верный ответ на второй вопрос задачи.	1,0

4. Определение плотности (6 баллов)

№	Критерий	Балл
1. Определение ρ_x и $\Delta\rho_x$.		
1.1	Правильно записана формула для расчёта плотности неизвестной жидкости: $\rho_x = \frac{\rho_i - \alpha\rho}{1 - \alpha}.$	0,4
1.2	Правильно записана формула для абсолютной погрешности: $\Delta\rho_x = \frac{\Delta\rho}{1 - \alpha}.$	0,4
1.3	Для каждой из трёх смесей ($\alpha = 0,40; 0,50; 0,60$) верно вычислено численное значение ρ_x .	0,6
1.4	Для каждой смеси верно вычислена абсолютная погрешность $\Delta\rho_x$.	0,6
2. Интервал для истинного значения ρ_x		
2.1	Для каждого измерения записан интервал возможных значений $\rho_x \in [\rho_{xi} - \Delta\rho_{xi}; \rho_{xi} + \Delta\rho_{xi}]$ (или эквивалентная запись).	0,5
2.2	Правильно найдены границы этих интервалов (численные значения).	0,5
2.3	Найден правильный интервал с учётом допустимых округлений.	1,0
3. Выбор оптимальной объёмной доли		
3.1	Обосновано, что погрешность $\Delta\rho_x = \Delta\rho/(1 - \alpha)$ убывает с уменьшением α , поэтому следует выбирать наименьшее возможное α .	0,5
3.2	Учтено ограничение рабочего диапазона ареометра: плотность смеси $\rho = \alpha \cdot 1 + (1 - \alpha)\rho_x$ должна быть не ниже $0,90 \text{ г/см}^3$.	0,5
3.3	Использована оценка ρ_x (например, среднее арифметическое $\bar{\rho}_x \approx 0,850$ или середина интервала, полученного во втором пункте) и решено неравенство, найдено $\alpha_{\min} = 1/3$ (или $0,33$).	0,5
3.4	Вычислена минимальная погрешность $\Delta\rho_{x,\min} = \frac{0,005}{1 - 1/3} = 0,0075 \text{ г/см}^3$, ответ приведён с единицами измерения.	0,5