

Отборочный тур (27 баллов)

Внимание! При вычислениях следует использовать приближённые равенства: $\sqrt{7} \approx 2,65$, $\sqrt{5} \approx 2,24$, $\sqrt{3} \approx 1,73$, $\sqrt{2} \approx 1,41$. Ускорение свободного падения g считайте равным 10 м/с^2 .

1. Ортогональные скорости (3 балла)

Обруч катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Плоскость обруча при этом всё время остаётся вертикальной. Ось обруча движется равномерно и прямолинейно со скоростью $v_0 = 1,73 \text{ м/с}$. В некоторый момент векторы скоростей двух точек обруча 1 и 2 оказываются ортогональны (векторы скоростей лежат на перпендикулярных прямых), при этом отношение абсолютных величин скоростей этих точек оказывается равно $\frac{v_1}{v_2} = \sqrt{3}$.

а) (1 балл) Определите по этим данным величину скорости v_1 . Ответ дайте в м/с, округлите до десятых.

б) (1 балл) Определите величину скорости v_2 . Ответ дайте в м/с, округлите до десятых.

в) (1 балл) Найдите скорость точки 2 относительно системы отсчёта, движущейся поступательно со скоростью точки 1. Ответ дайте в м/с, округлите до десятых.

2. Маленькие шарики из пушки (6 баллов)

Из специального аппарата, находящегося на большой высоте над Землёй, одновременно вылетают три одинаковых маленьких шарика A , B и C с одинаковой по модулю начальной скоростью v_0 . Векторы начальных скоростей шариков лежат в одной вертикальной плоскости, при этом вектор начальной скорости шарика A , $\vec{v}_{A0}$, направлен вертикально вверх; вектор $\vec{v}_{B0}$ образует угол 60° с $\vec{v}_{A0}$; вектор $\vec{v}_{C0}$ направлен противоположно $\vec{v}_{B0}$. Через время $\tau = 1 \text{ с}$ после вылета расстояние между шариками A и B стало равно $S_{AB} = 5 \text{ м}$. Сопротивлением воздуха, а также зависимостью ускорения свободного падения g от высоты можно пренебречь. Найдите следующие величины.

а) (1 балл) Модуль начальной скорости v_0 . Ответ дайте в м/с, округлите до десятых.

б) (2 балла, по 1 баллу за каждое значение) Расстояние S_{AC} между шариками A и C , а также расстояние S_{BC} между шариками B и C в момент времени t . Ответы дайте в метрах, округлите до десятых.

в) (3 балла, по 1 баллу за каждое значение) Модули скоростей шариков в момент времени t . Ответы дайте в м/с, округлите до десятых.

3. Блок и соскальзывающие грузы (6 баллов)

Блоки в системе, изображённой на рис. 1, идеальные, нить невесомая и нерастяжимая. К подвижному блоку присоединён груз массой $2m = 200$ г. Каждый из одинаковых грузов массой $m = 100$ г представляет собой цилиндр, по оси которого просверлено отверстие небольшого диаметра, через которое пропущена нить, обработанная специальной смазкой, так что трение между грузом и нитью можно считать вязким. Сила вязкого трения даётся формулой $F = \alpha u$, где u — скорость нити относительно груза, коэффициента пропорциональности $\alpha = 0,25$ кг/с. В начальный момент времени грузы удерживаются, при этом крайние грузы находятся на одинаковой высоте над Землёй, нить не натянута и не провисает. В некоторый момент времени грузы отпускают. Длина нити достаточно велика, так что можно считать, что в процессе движения грузы массой m не соскальзывают с нити. Отрезки нити, не лежащие на блоках при движении всё время остаются вертикальными.

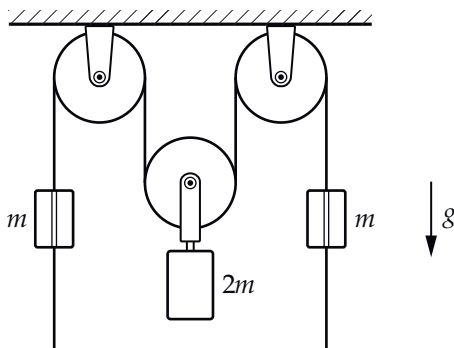


Рисунок 1

а) (1 балла) Чему равна сила натяжения нити в момент, когда крайний левый груз движется с ускорением $\frac{g}{2} = 5$ м/с². Ответ дайте в Ньютонах, округлите до десятых.

а) (2 балла) На какое расстояние относительно начального положения опускается груз массой $2m$ к тому моменту, когда крайний левый груз проходит 10 см от начального положения? Ответ дайте в см, округлите до целого.

б) (3 балла) До какой максимальной скорости разгоняется груз массой $2m$ в процессе движения? Ответ дайте в м/с, округлите до целого.

4. Столкновение шайб (5 баллов)

Две гладкие шайбы одинакового размера, но разных масс могут двигаться по горизонтальной поверхности без трения (см. рис. 2, вид сверху). Шайба массой m_2 изначально покоится. Скорость шайбы массой m_1 в тот же момент равна $v = 8$ м/с. Прицельный параметр d — расстояние между линией, вдоль которой движется центр шайбы m_1 и центром шайбы m_2 , — равен $r\sqrt{2}$. В некоторый момент шайбы сталкиваются, при этом столкновение можно считать упругим в том смысле, что потери энергии при столкновении не происходит. Известно, что после столкновения скорость шайбы массой m_2 становится равна $\frac{v\sqrt{2}}{4}$.

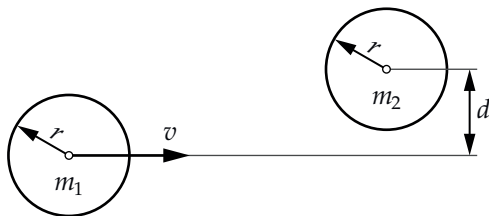


Рисунок 2

а) (2 балла) Чему равно отношение масс шайб $\frac{m_2}{m_1}$? Ответ округлите до целого.

б) (3 балла) С какой скоростью движется шайба массой m_1 после столкновения? Ответ дайте в м/с, округлите до десятых.

5. Связанные цепи (7 баллов)

В электрической цепи, схема которой представлена на рис. 3, величина сопротивления R равна 1 кОм, напряжение U на выводах идеального источника равно 6 В.

а) (1 балл) К клеммам A и B подключают идеальный амперметр. Определите его показания. Ответ дайте в мА, округлите до целого.

б) (1 балл) Вместо идеального амперметра к клеммам A и B подключают идеальный вольтметр. Чему равно измеренное им напряжение? Ответ дайте в вольтах, округлите до целого.

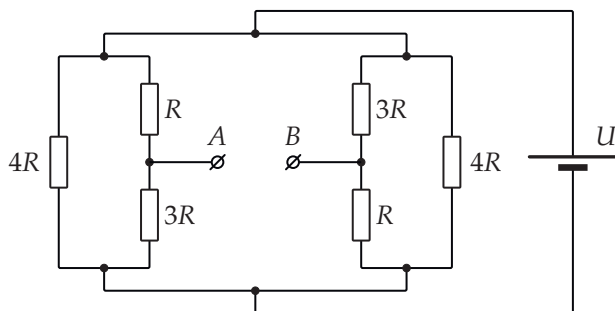


Рисунок 3

В цепи, схема которой представлена на рис. 4, значения параметров U и R такие же, как в предыдущей цепи ($U = 6$ В, $R = 1$ кОм). Цифры в кружках обозначают номер идеального источника (1 или 2).

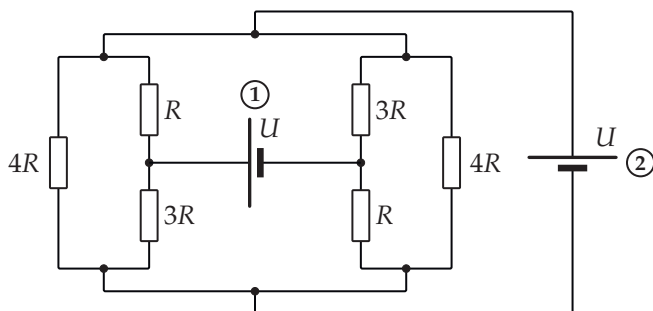


Рисунок 4

в) (2 балла) Определите ток, текущий через источник 1. Ответ дайте в мА, округлите до целого.

г) (3 балла) Определите ток, текущий через источник 2. Ответ дайте в мА, округлите до целого.

Отборочный тур

Ответы

1. Обозначим через C точку, в которой обруч касается горизонтальной поверхности. Эта точка является мгновенным центром скоростей. Поскольку векторы $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ ортогональны, отрезки $C1$ и $C2$ перпендикулярны. Пусть точка O — центр обруча, обозначим $\angle OC1$ за φ , тогда $\angle OC2 = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Отсюда имеем соотношение для определения угла φ :

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{2\omega R \cos \varphi}{2\omega R \sin \varphi} = \operatorname{ctg} \varphi.$$

Произведение ωR есть скорость оси обруча v_0 , поэтому искомые скорости равны:

$$v_1 = 2\omega R \cos \varphi = 2v_0 \cos \varphi = 2v_0 \frac{\operatorname{ctg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \varphi}} = v_0 \sqrt{3}, \quad v_2 = v_0.$$

Вектор относительной скорости $\mathbf{v}_{21}$ равен разности векторов $\mathbf{v}_2$ и $\mathbf{v}_1$. Поскольку эти два вектора ортогональны, абсолютная величина относительной скорости находится по теореме Пифагора: $v_{21} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 2v_0$.

Ответ: а) $v_1 = v_0 \sqrt{3} = 3$ м/с; б) $v_2 = v_0 \approx 1,7$ м/с; в) $v_{21} = 2v_0 \approx 3,5$ м/с.

2. Ответы на вопросы, поставленные в первых двух пунктах этой задачи, можно получить устно, если рассмотреть движение шариков в системе отсчёта, падающей вниз с ускорением g . Для ответа на вопросы, поставленные в последнем пункте, можно найти горизонтальные и вертикальные проекции скоростей и далее вычислить модули.

Ответ: а) $v_0 = \frac{S_{AB}}{\tau} = 5$ м/с; б) $S_{AC} = S_{AB} \sqrt{3} \approx 8,7$ м, $S_{BC} = 2S_{AB} = 10$ м; в) $v_A = v_0 = 5$ м/с, $v_B = v_0 \sqrt{3} \approx 8,7$ м/с, $v_C = v_0 \sqrt{7} \approx 13,2$ м/с.

3. Следует записать уравнения второго закона Ньютона для одного из крайних грузов, для среднего груза, а также для участка нити, находящегося внутри одного из крайних грузов. Следует учесть, что скорость

любого конца нити равна по модулю скорости подвижного блока. Из полученной системы уравнений следует равенство ускорений блока и крайних грузов в любой момент времени, а также равенство силы натяжения нити и силы вязкого трения.

Ответ: а) $T = \frac{mg}{2} = 0,5 \text{ Н}$; б) $S = 10 \text{ см}$; в) $v_A = \frac{mg}{2\alpha} = 2 \text{ м/с}$.

4. При абсолютно упругом столкновении гладких шайб разность нормальных компонент скоростей шайб меняет знак. Нормалью в данном случае является перпендикуляр к общей касательной в точке соприкосновения шайб. Этот факт может быть получен из законов сохранения импульса и энергии.

Ответ: а) $\frac{m_2}{m_1} = 3$; б) $v'_1 = \frac{v\sqrt{10}}{4} \approx 6,3 \text{ м/с}$.

5. Ответы на последние два вопроса наиболее просто, на наш взгляд, получаются при помощи метода эквивалентного источника: двухполюсник с выводами A и B можно заменить на идеальный источник с $\mathcal{E} = \frac{U}{2}$ и внутренним сопротивлением $r = \frac{3R}{2}$.

Ответ: а) $I_{AB} = \frac{U}{3R} = 2 \text{ мА}$; б) $U_{AB} = \frac{U}{2} = 3 \text{ В}$; в) $I_1 = \frac{U}{3R} = 2 \text{ мА}$;
г) $I_2 = \frac{U}{2R} + \frac{U}{3R} = \frac{5U}{6R} = 5 \text{ мА}$.