

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий. Часть 1 содержит 13 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–13 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 14–20 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

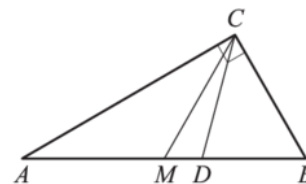
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

Острый угол B прямоугольного треугольника равен 66° . Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM , проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



Ответ: _____.

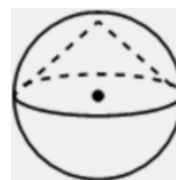
2

Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 5, а угол между ними равен 60° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: _____.

3

Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса. Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.



Ответ: _____.



- 4 Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Протор», «Ротор» и «Мотор». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую и последнюю игры.

Ответ: _____.

- 5 При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

Ответ: _____.

- 6 В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX – математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

Ответ: _____.

- 7 Найдите корень уравнения

$$3^{2x-16} = \frac{1}{81}.$$

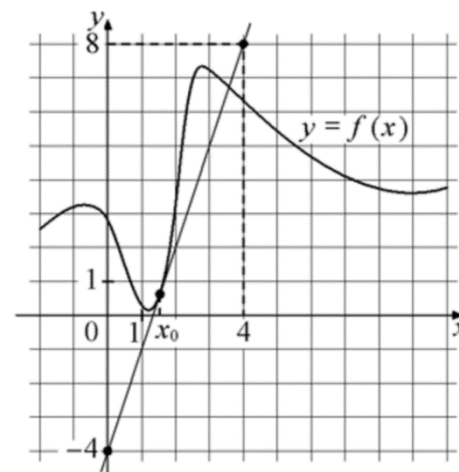
Ответ: _____.

- 8 Найдите значение выражения

$$21\sqrt{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: _____.

- 9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



Ответ: _____.

- 10 К источнику с ЭДС $\varepsilon = 180$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R (в Ом). Напряжение (в В) на этой нагрузке вычисляется по формуле $U = \frac{\varepsilon R}{R+r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 170 В? Ответ дайте в омах.

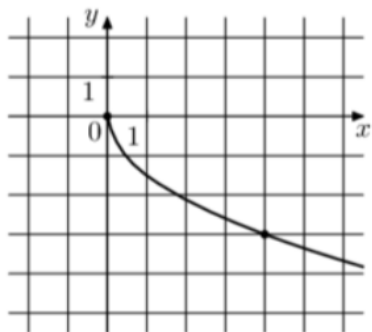
Ответ: _____.

- 11 Заказ на 176 деталей первый рабочий выполняет на 5 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 5 деталей больше, чем второй?

Ответ: _____.



- 12 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(2,56)$.



Ответ: _____.

- 13 В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 1050 тыс. рублей;
- выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
- к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой.

Ответ: _____.

Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 14 а) Решите уравнение

$$3\operatorname{tg}^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi\right]$.

- 15 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 6$. Через точки B_1 и D параллельно прямой AC проведена плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке K .

- а) Докажите, что K – середина CC_1 .
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

- 16 Решите неравенство

$$\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}.$$

- 17 Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ – постоянная Больцмана, ε – кинетическая энергия молекулы в джоулях, T – температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε , при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T = 300 \text{ К}$.

- 18** В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L .

- а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.
 б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$.

- 19** Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ x^2 + y = |a + 1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

- 20** На доске написано несколько различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4.

- а) Может ли их сумма составлять 282?
 б) Может ли их сумма составлять 390?
 в) Какое наибольшее количество чисел могло быть на доске, если их сумма равна 2226?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор

Результаты:	<u>Результаты моих учеников:</u> • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов
	Личные результаты: • Набрал <u>100 баллов</u> на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	https://vk.ru/shkolapifagora 
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1 



Ответы

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	21	
2	7,5	
3	20	
4	0,125	
5	0,78	
6	0,5	
7	6	
8	21	
9	3	
10	17	
11	16	
12	-2,4	
13	500000	
14	а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $-\frac{7\pi}{3}$	
15	$\frac{24}{\sqrt{41}}$	
16	$(-\infty; \log_7 4) \cup (1; \log_7 9]$	
17	$2,07 \cdot 10^{-21}$	
18	$\frac{25}{36}$	
19	$\left(-\frac{1}{2}; 1 - \sqrt{2}\right) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$	
20	а) да б) нет в) 9	

Решения

- 1 Острый угол B прямоугольного треугольника равен 66° . Найдите угол между биссектрисой CD и медианой CM , проведёнными из вершины прямого угла. Ответ дайте в градусах.



ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Пересдача 2026
Осложная задача 2025
Докладная задача 2023
Осложная задача (Решари) 2022
Осложная задача 2021
Осложная задача 2017

ОТВЕТ | 2, 4

- 2 Длины векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны 3 и 5, а угол между ними равен 60° . Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 3 \cdot 5 \cdot \cos 60^\circ = 15 \cdot \frac{1}{2} = 7,5$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)

238861

ОТВЕТ | 7, 5

- 3 Около конуса описана сфера (сфера содержит окружность основания конуса и его вершину). Центр сферы совпадает с центром основания конуса.



Радиус сферы равен $10\sqrt{2}$. Найдите образующую конуса.

$$\begin{aligned} \rho^2 &= (10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2 \\ \rho^2 &= 200 + 200 = 400 \\ \rho &= 20 \end{aligned}$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Осложная задача 2025
Осложная задача 2013

F4AA43

ОТВЕТ | 2, 0





- 4 Перед началом волейбольного матча капитаны команд тянут честный жребий, чтобы определить, какая из команд начнёт игру с мячом. Команда «Стартер» по очереди играет с командами «Протор», «Ротор» и «Мотор». Найдите вероятность того, что «Стартер» будет начинать только вторую и последнюю игры.

В В В П П П П
В В П П П В
В П В П В П
В П П П В В

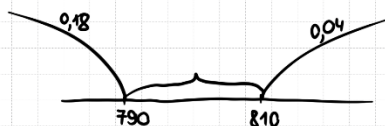
$$P = \frac{1}{8} = 0,125$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (новый банк)
Основная волна (Ресурсы) 2026
Основная волна (Ресурсы) 2024
Досрочная волна 2023
Досрочная волна 2019

ОТВЕТ 0, 1 2 5

- 5 При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,96. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,82. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.



$$x = 1 - 0,96 - 0,04 = 0,00$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Демо 2026
Основная волна 2025
Основная волна (Ресурсы) 2024
Основная волна (Ресурсы) 2023

ОТВЕТ 0, 7 8

- 6 В таблице показано распределение случайной величины X . Найдите EX — математическое ожидание этой случайной величины.

Значения X	-4	0	1	3
Вероятности	0,2	0,1	0,4	0,3

Матем. ожидание $EX = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4$
 $= -4 \cdot 0,2 + 0 \cdot 0,1 + 1 \cdot 0,4 + 3 \cdot 0,3 = 0,5$

ОТВЕТ 0, 5

- 7 Найдите корень уравнения $3^{2x-16} = \frac{1}{81}$.

$$3^{2x-16} = 3^{-4}$$

$$2x - 16 = -4$$

$$2x = -4 + 16$$

$$2x = 12$$

$$x = 6$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Демо 2025
Досрочная волна 2024
Основная волна 2019
Досрочная волна (Ресурсы) 2018
Основная волна 2017

ОТВЕТ 6

- 8 Найдите значение выражения

$$21\sqrt{6} \tan \frac{\pi}{6} \sin \frac{\pi}{4}$$

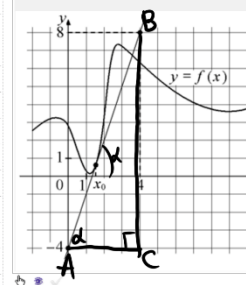
$$21\sqrt{6} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{21 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3} \cdot 2} = 21$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Демо 2020
Досрочная волна (Ресурсы) 2018

ОТВЕТ 2 1

- 9 На рисунке изображены график функции $y = f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0 . Найдите значение производной функции $f(x)$ в точке x_0 .



$$f'(x_0) = \tan \alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{12}{4} = 3$$

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная 2026
Демо 2026
Основная волна 2025
Основная волна (Ресурсы) 2024
Основная волна (Ресурсы) 2023
Основная волна 2022
Досрочная волна 2020
Досрочная волна 2017
Основная волна (Ресурсы) 2017
Основная волна 2013

ОТВЕТ 3





- 10 К источнику с ЭДС $\mathcal{E} = 180$ В и внутренним сопротивлением $r = 1$ Ом хотят подключить нагрузку с сопротивлением R (в Ом). Напряжение (в В) на этой нагрузке вычисляется по формуле $U = \frac{\mathcal{E}R}{R+r}$. При каком значении сопротивления нагрузки напряжение на ней будет равно 170 В? Ответ дайте в омах.

$$170 = \frac{180 \cdot R}{R+1}$$

$$180 \cdot R = 170 \cdot (R+1)$$

$$180R = 170R + 170$$

$$10 \cdot R = 170$$

$$R = 17$$

ОТВЕТ 17

- 11 Заказ на 176 деталей первый рабочий выполняет на 5 часов быстрее, чем второй. Сколько деталей в час делает первый рабочий, если известно, что он за час делает на 5 деталей больше, чем второй?

Ответ: _____

	Пр-б	Время	Кол-во дет.
I	x	$\frac{176}{x}$	176
II	x-5	$\frac{176}{x-5}$	176

$$t_{\text{мод}} - t_{\text{бис}} = 5$$

$$\frac{176}{x-5} - \frac{176}{x} = 5$$

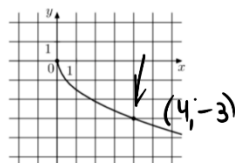
$$\frac{176x - 176x + 176 \cdot 5}{x^2 - 5x} = \frac{5}{1} \quad | :5$$

$$x^2 - 5x - 176 = 0$$

$$x = 16 \quad x = -11$$

ОТВЕТ 16

- 12 На рисунке изображён график функции $f(x) = k\sqrt{x}$. Найдите $f(2,56)$.



$$\textcircled{1} -3 = k \cdot \sqrt{4}$$

$$-3 = 2k$$

$$k = -1,5$$

$$f(x) = -1,5\sqrt{x}$$

$$\textcircled{2} f(2,56) = -1,5 \cdot \sqrt{2,56} = -1,5 \cdot 1,6 = -2,4$$

ОТВЕТ -2,4

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Пересдача 2024
Основная воля 2023
Основная воля 2021

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная воля 2013

ИСТОЧНИКИ

Основная воля 2026

13

В июле 2026 года планируется взять кредит на пять лет в размере 1050 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
- в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг останется равным 1050 тыс. рублей;
- выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
- к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

На сколько рублей последняя выплата будет больше первой?

Пусть x - сумма платежа в июле 2030 г. и в июле 2031 г.

$$1050 \cdot \frac{11^2}{10^2} = 2,1 \cdot x$$

$$\frac{105 \cdot 11 \cdot 11}{10} = \frac{2,1 \cdot x}{10}$$

$$x = \frac{105 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 10}{10 \cdot 2,1} = 605 \text{ тыс.}$$

Дата Сумма долга

и 26	1050 тыс.
и 27	1050 · 1,1 = 1155
и 28	1050
и 29	1050 · 1,1 = 1155
и 30	1050
и 31	1050 · 1,1 = 1155
и 32	1050
и 33	1050 · 1,1 = 1155
и 34	1050
и 35	1050 · 1,1 = 1155
и 36	1050
и 37	1050 · 1,1 = 1155
и 38	1050
и 39	1050 · 1,1 = 1155
и 40	1050
и 41	1050 · 1,1 = 1155
и 42	1050
и 43	1050 · 1,1 = 1155
и 44	1050
и 45	1050 · 1,1 = 1155
и 46	1050
и 47	1050 · 1,1 = 1155
и 48	1050
и 49	1050 · 1,1 = 1155
и 50	1050
и 51	1050 · 1,1 = 1155
и 52	1050
и 53	1050 · 1,1 = 1155
и 54	1050
и 55	1050 · 1,1 = 1155
и 56	1050
и 57	1050 · 1,1 = 1155
и 58	1050
и 59	1050 · 1,1 = 1155
и 60	1050
и 61	1050 · 1,1 = 1155
и 62	1050
и 63	1050 · 1,1 = 1155
и 64	1050
и 65	1050 · 1,1 = 1155
и 66	1050
и 67	1050 · 1,1 = 1155
и 68	1050
и 69	1050 · 1,1 = 1155
и 70	1050
и 71	1050 · 1,1 = 1155
и 72	1050
и 73	1050 · 1,1 = 1155
и 74	1050
и 75	1050 · 1,1 = 1155
и 76	1050
и 77	1050 · 1,1 = 1155
и 78	1050
и 79	1050 · 1,1 = 1155
и 80	1050
и 81	1050 · 1,1 = 1155
и 82	1050
и 83	1050 · 1,1 = 1155
и 84	1050
и 85	1050 · 1,1 = 1155
и 86	1050
и 87	1050 · 1,1 = 1155
и 88	1050
и 89	1050 · 1,1 = 1155
и 90	1050
и 91	1050 · 1,1 = 1155
и 92	1050
и 93	1050 · 1,1 = 1155
и 94	1050
и 95	1050 · 1,1 = 1155
и 96	1050
и 97	1050 · 1,1 = 1155
и 98	1050
и 99	1050 · 1,1 = 1155
и 100	1050

$$\textcircled{2} \text{ Последняя выпл.} - \text{Первая выпл.} = 605000 - 105000 = 500000 \text{ р.}$$

Ответ: 500000

14 а) Решите уравнение $3\lg^2 x - \frac{5}{\cos x} + 1 = 0$.
 б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[-\frac{7\pi}{2}; -2\pi]$.

а) $\frac{3\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{5}{\cos x} + \frac{1}{1} = 0$
 $\frac{3\sin^2 x - 5\cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$
 $\frac{3(1 - \cos^2 x) - 5\cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$
 $\frac{3 - 3\cos^2 x - 5\cos x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$
 $\frac{-2\cos^2 x - 5\cos x + 3}{\cos^2 x} = 0$
 $\cos x = -3$ нет р-н.
 $\cos x = \frac{1}{2}$
 $x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 Ответ: а) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$
 б) $-\frac{7\pi}{3}$

б) Отберём корни с помощью окружности.
 Получим $x = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = -\frac{7\pi}{3}$

ИСТОЧНИКИ
 ЕГЭ (старый банк)
 Основная волна (Резерв) 2024
 Основная волна (Резерв) 2013

15 В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известно, что $AB = 3$, $AD = 4$ и $AA_1 = 6$. Через точки B_1 и D параллельно прямой AC проведена плоскость, пересекающая ребро CC_1 в точке K .

а) Докажите, что K — середина CC_1 .
 б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения.

а) Пусть $A_1 F = A_1 D_1$
 $(\tau F \in A_1 D_1)$
 $C_1 E \in C_1 D_1$
 $(\tau E \in C_1 D_1)$
 Получаем $EF \parallel AC$
 $ED \cap CC_1 = K$
 $FD \cap AA_1 = K$
 $B_1 K D_1$ — сечение
 $\Delta E D D_1$:
 C_1 — середина ED_1
 $C_1 K \parallel DD_1$ (по усл.)
 тогда $C_1 K$ — ср. лин.
 $C_1 K = \frac{1}{2} DD_1 = \frac{1}{2} CC_1$
 K — середина CC_1 .

б) Найдём $S_{B_1 K D_1}$.
 $B_1 M = \sqrt{A_1 B_1^2 + A_1 D_1^2} = 3\sqrt{2}$
 $DM = \sqrt{A_1 D_1^2 + A_1 D_1^2} = 5$
 $BD = \sqrt{AB^2 + AD^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$
 $\cos \angle = \frac{3^2 + 5^2 - 5^2}{2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5} = \frac{9}{5\sqrt{2}}$
 $\sin \angle = \frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{2}}$
 $S = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{11}}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{11}}{2}$
 $h = \frac{9 \cdot 4 \cdot 2}{3\sqrt{11}} = \frac{24}{\sqrt{11}}$
 Ответ: $\frac{24}{\sqrt{11}}$

ИСТОЧНИКИ
 Досрочная волна 2024

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

16

Решите неравенство $\frac{2}{7^x - 7} \geq \frac{5}{7^x - 4}$.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2025 (на дому)
Основная волна 2022
Основная волна 2021
Основная волна 2015

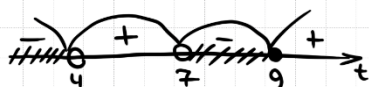
Пусть $7^x = t$

$$\frac{2^{(t-4)}}{t-7} - \frac{5^{(t-7)}}{t-4} \geq 0$$

$$\frac{2t-8-5t+35}{(t-7)(t-4)} \geq 0$$

$$\frac{-3t+27}{(t-7)(t-4)} \geq 0 \quad | :(-3)$$

$$\frac{t-9}{(t-7)(t-4)} \leq 0$$



$$\begin{cases} t < 4 \\ 7 \leq t \leq 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7^x < 4 \\ 7^x \leq 7 \log_7 9 \\ x < \log_7 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7 < 7^x \leq 9 \\ 7^x \leq 7 \log_7 9 \\ 1 < x \leq \log_7 9 \end{cases}$$

Ответ: $(-\infty; \log_7 4) \cup (1; \log_7 9]$.

17

Распределение кинетической энергии молекул гелия при тепловом движении имеет функцию плотности

$$f(\varepsilon) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}} \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}},$$

где $k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{Дж}}{\text{К}}$ — постоянная Больцмана, ε — кинетическая энергия молекулы в джоулях, T — температура газа в кельвинах. Найдите значение кинетической энергии ε , при котором функция плотности $f(\varepsilon)$ принимает наибольшее значение, если $T = 300 \text{ К}$.

① $\frac{2}{\sqrt{\pi}} \cdot \left(\frac{1}{kT} \right)^{\frac{3}{2}}$ — это постоянный множитель, который на поиск макс. $f(\varepsilon)$ не влияет, поэтому можно искать максимум $f(\varepsilon) = \sqrt{\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon}{kT}}$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} g'(\varepsilon) &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} + \sqrt{\varepsilon} \cdot \left(e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \right)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} + \sqrt{\varepsilon} \cdot e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \left(-\frac{1}{kT} \right) = \\ &= e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} \cdot \left(\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{kT} \right) \end{aligned}$$

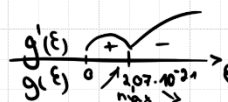
Найдём нули:
 $e^{-\frac{\varepsilon}{kT}} = 0$
нет рещ.

$$\frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{kT} = 0$$

$$\frac{kT - 2\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\varepsilon} \cdot kT} = 0$$

$$kT - 2\sqrt{\varepsilon} = 0$$

$$\varepsilon = \frac{kT}{2} = \frac{1,38 \cdot 10^{-23} \cdot 300}{2} = 2,07 \cdot 10^{-21}$$



$\varepsilon = 2,07 \cdot 10^{-21}$ — точка макс, значит $f(\varepsilon)_{\text{макс}} = f(2,07 \cdot 10^{-21})$

Ответ: $\varepsilon = 2,07 \cdot 10^{-21}$.

Производные	
1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$\left(\frac{U}{V} \right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\lg x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\text{ctg } x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a b)' = \frac{1}{b \cdot \ln a}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

- 18 В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L .

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2026 (9 июня)
Досрочная волна 2026
Основная волна 2016

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos \angle BAC = \frac{7}{25}$.

а) ① MN — ср. лин. $\triangle ABC$

значит $MN \parallel AC$

значит $\angle CAL = \angle ALM$
(накрест. лежащие)

значит $\triangle AML \sim \triangle BLC$

$AM = ML$

② $\triangle ABC$:

см-мед. в ф. медиан

тр.

$CM = AM = BM = ML$

Опишем окр. с радиусом

окр. $ABLC$

③ $\angle CL = 2\angle CAL = 2\alpha$

$\angle BL = 2\angle BAL = 2\alpha$

$\angle BCL = \frac{1}{2}\angle BL = \alpha$

$\angle CBL = \frac{1}{2}\angle CL = \alpha$

Получаем $\triangle AML \sim \triangle BLC$ по 2 углам
($\angle BCL = \alpha = \angle MAL$)
($\angle CBL = \alpha = \angle MLA$)

$$\frac{S_{BLC}}{S_{AML}} = k^2$$

$$k = \frac{BL}{AM} = \frac{BL}{\frac{1}{2}AB} = 2 \cdot \frac{BL}{AB} = 2 \sin \angle BAL = 2 \sin \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \frac{7}{25}$$

$$1 - 2\sin^2 \alpha = \frac{7}{25}$$

$$\frac{18}{25} = 2\sin^2 \alpha$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{9}{25}$$

$$\sin \alpha = \frac{3}{5}$$

$$k = 2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

$$\frac{S_{BLC}}{S_{AML}} = \frac{36}{25}$$

$$\frac{S_{AML}}{S_{BLC}} = \frac{25}{36}$$

$$\text{Ответ: } \frac{25}{36}$$

- 19 Найдите все значения a , при каждом из которых система уравнений

$$\textcircled{1} \begin{cases} x^4 + y^2 = a^2, \\ \textcircled{2} \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{cases} x^2 + y = |a + 1| \end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

Возьмем $y = |a+1| - x^2$

Подставим в $\textcircled{1}$

$$x^4 + (a+1)^2 - 2|a+1|x^2 + x^4 = a^2$$

$$x^4 + a^2 + 2a + 1 - 2|a+1|x^2 + x^4 = a^2$$

$$2x^4 - 2|a+1|x^2 + 2a + 1 = 0$$

$$\text{Пусть } x^2 = t \quad t \geq 0, \text{ но чтобы было 4 разл. реш. } x, \text{ нужно } \begin{cases} t_1 > 0 \\ t_2 > 0 \\ t_1 \neq t_2 \end{cases}$$

$$2t^2 - 2|a+1|t + 2a + 1 = 0$$

$$\text{по т. Виета } \begin{cases} t_1 + t_2 = |a+1| \\ t_1 \cdot t_2 = \frac{2a+1}{2} = a + \frac{1}{2} \end{cases}$$

Если мы потребуем $a + \frac{1}{2} > 0$, то это гарантирует, что t_1, t_2 положительны

Чтобы было 2 различных корня нужно, чтобы $D > 0$

Получаем $\textcircled{3} a + \frac{1}{2} > 0$

$\textcircled{4} D > 0$

$$\textcircled{3} a > -\frac{1}{2}$$

$$\textcircled{4} 4(a+1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (2a+1) > 0$$

$$4a^2 + 8a + 4 - 16a - 8 > 0$$

$$4a^2 - 8a - 4 > 0 \quad | :4$$

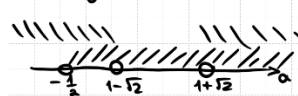
$$a^2 - 2a - 1 > 0$$

$$D_0 = 4 + 4 = 8$$

$$a = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2}$$

$$a = 1 \pm \sqrt{2}$$

Найдём пересек:



$$\text{Ответ: } (-\frac{1}{2}; 1 - \sqrt{2}) \cup (1 + \sqrt{2}; +\infty)$$

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



20 На доске написано несколько различных натуральных чисел, которые делятся на 3 и оканчиваются на 4. **ИСТОЧНИКИ**
Основная волна 2020

а) Может ли их сумма составлять 282?
б) Может ли их сумма составлять 390?
в) Какое наибольшее количество чисел могло быть на доске, если их сумма равна 2226?

На доске могут быть:

24
54
84
114
144
174
204
234
264
294
324
354
384
...

а) Да, $204 + 54 + 24 = 282$

б) Если на доске 2 числа, то сумма оканчивается на 8
3 числа ... на 2
4 числа ... на 6
5 чисел ... на 0
...
10 чисел ... на 0
т.е. нужно взять кратное 5 кол-во чисел

в) 1) Может ли быть 5 чисел?
тогда $S \geq 24 + 54 + 84 + 114 + 144$
 $S \geq 5 \cdot 24 + 10 \cdot 30$
 $S \geq 420$
 $S \neq 390$
значит 5 чисел быть не могло тем более не могло быть 10, 15 и т.д. т.к. сумма была бы еще больше.

2) Может ли быть 14 чисел?
тогда $S \geq 14 \cdot 24 + \frac{1+13}{2} \cdot 13 \cdot 30$
 $S \geq 14 \cdot 24 + 14 \cdot 195$
 $S \geq 219 \cdot 14$
 $219 \cdot 14 > 2226$
 $\Rightarrow 14$ и более чисел быть не могло, т.к. тогда сумма чисел > 2226

3) Может ли быть 9 чисел?
тогда $S \geq 9 \cdot 24 + \frac{1+8}{2} \cdot 8 \cdot 30$
 $S \geq 9 \cdot 24 + 8 \cdot 120$
 $S \geq 144 \cdot 9$
 $1296 < 2226$
 $\Rightarrow 9$ чисел быть могло
 $\Rightarrow$ кол-во чисел на доске ≤ 9

4) Покажем, что 9 чисел можно было:

24
54
84
114
144
174
204
234
1194

тогда $S = 8 \cdot 24 + \frac{1+7}{2} \cdot 7 \cdot 30 + 1194 =$
 $= 8 \cdot 24 + 8 \cdot 105 + 1194 =$
 $= 129 \cdot 8 + 1194 =$
 $= 2226 \checkmark$

Ответ: б) 9.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

