

**Единый государственный экзамен
по МАТЕМАТИКЕ**

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий. Часть 1 содержит 13 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–13 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8															
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 14–20 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

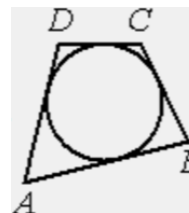
$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1

В четырёхугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $BC = 7$ и $AD = 11$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.



Ответ: _____.

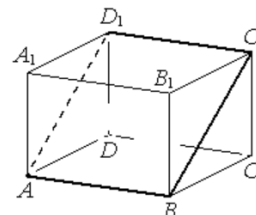
2

Даны векторы $\vec{a} (1; 2)$, $\vec{b} (-3; 6)$ и $\vec{c} (4; -2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

Ответ: _____.

3

В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины рёбер: $AB = 7$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .



Ответ: _____.





- 4 В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику **не достанется** вопрос про Александра Второго.

Ответ: _____.

- 5 Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,8. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа **не перегорит**.

Ответ: _____.

- 6 В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

Ответ: _____.

- 7 Найдите корень уравнения

$$(x + 9)^2 = 36x.$$

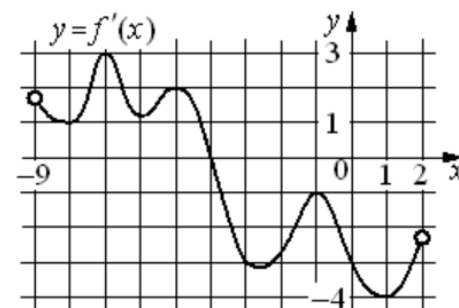
Ответ: _____.

- 8 Найдите значение выражения

$$\log_7 12,25 + \log_7 4.$$

Ответ: _____.

- 9 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-9; 2)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



Ответ: _____.

- 10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч²). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1,1 км, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км/ч².

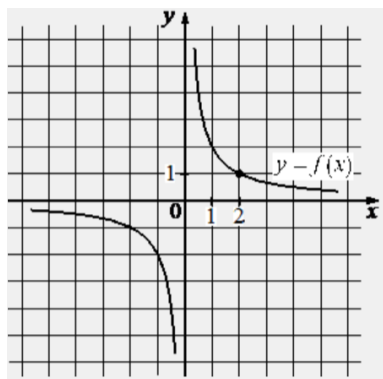
Ответ: _____.

- 11 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

Ответ: _____.



- 12 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.



Ответ: _____.

- 13 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год – 240 000 рублей.

Ответ: _____.

**Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

Часть 2

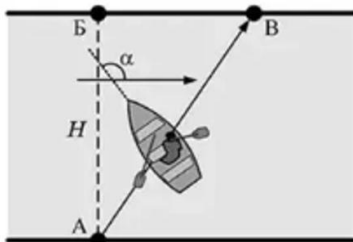
Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 14 а) Решите уравнение $\log_5(\cos x - \sin 2x + 25) = 2$.
б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$.
- 15 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1 .
а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.
б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .
- 16 Решите неравенство

$$\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - 1}{\log_7(x + 6)} \leq 0.$$



- 17 На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u .



При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v \cos \alpha}{v \sin \alpha},$$

где H — ширина реки, α — угол между вектором скорости лодки относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 60$ м, $u = 2$ м/с и $v = 1$ м/с.

- 18 В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM = BC$ и $CN = AC$. Отрезки CP и CQ — биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.

- а) Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.
б) Найдите PQ , если $BC = 3$, а $AC = 5$.

- 19 Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

- 20 Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое — трёхзначное и оба кратны 45.

- а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?
б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?
в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Составитель варианта — Евгений Пифагор

Результаты:	<u>Результаты моих учеников:</u> • 53 человека набрали 100 баллов • 789 человек набрали 90+ баллов
	Личные результаты: • Набрал <u>100 баллов</u> на ЕГЭ по математике профиль • Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014 • Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011 • 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
ВК:	 https://vk.ru/shkolapifagora
Ютуб:	 https://www.youtube.com/c/pifagor1



Ответы

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	5	
2	10	
3	35	
4	0,74	
5	0,488	
6	34,5	
7	9	
8	2	
9	-4	
10	5500	
11	18	
12	0,2	
13	20	
14	а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $\frac{13\pi}{6}; \frac{5\pi}{2}; \frac{17\pi}{6}; \frac{7\pi}{2}$	
15	$\sqrt{1,2}$	
16	$(-6; -5) \cup [3; 3,5) \cup (5; 5,5]$	
17	$60\sqrt{3}$	
18	$\frac{15}{4}$	
19	$(-1; 0) \cup (0; 1]$	
20	а) да б) нет в) 10035	

Решения

1 В четырёхугольнике $ABCD$ вписана окружность, $AB = 13$, $BC = 7$ и $AD = 11$. Найдите четвёртую сторону четырёхугольника.

ИСТОЧНИКИ
ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2026
Основная волна (Резерв) 2025
Основная волна (Резерв) 2023
Дисциплина волна 2022
Основная волна 2019
Дисциплина волна 2013

СВОЙСТВО ОПИСАННОГО ЧЕТЫРЁХУГОЛЬНИКА

31765C

$11 + 7 = 13 + CD$
 $18 = 13 + CD$
 $CD = 5$

ОТВЕТ | 5

2 Даны векторы $\vec{a}(1; 2)$, $\vec{b}(-3; 6)$ и $\vec{c}(4; -2)$. Найдите длину вектора $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$.

ИСТОЧНИКИ
Пересдачи 2024
Основная волна 2024
Демо 2024

$\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = (1 - (-3) + 4; 2 - 6 - 2) = (8; -6)$

$|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{100} = 10$

ОТВЕТ | 10

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины рёбер: $AB = 7$, $AD = 3$, $AA_1 = 4$. Найдите площадь сечения параллелепипеда плоскостью, проходящей через точки A , B и C_1 .

ИСТОЧНИКИ
ГПР (новый банк)
Основная волна (Резерв) 2022

$\triangle BCC_1$: $BC_1 = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

$S_{\text{сеч.}} = 7 \cdot 5 = 35$

ОТВЕТ | 35





4

В сборнике билетов по истории всего 50 билетов, в 13 из них встречается вопрос про Александра Второго. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном на экзамене билете школьнику не достанется вопрос про Александра Второго.



637 не верен.

89584F

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2026
Регулярная волна (Регуляр) 2025
Пересдача 2024
Основная волна 2024
Основная волна 2022
Основная волна 2021
Основная волна 2019
Основная волна 2013

$$P = \frac{37}{50} = 0,74$$

ОТВЕТ 0,74

5

Помещение освещается тремя лампами. Вероятность перегорания каждой лампы в течение года равна 0,8. Лампы перегорают независимо друг от друга. Найдите вероятность того, что в течение года хотя бы одна лампа не перегорит.



0ECCD04

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Пересдача 2026
Демо 2026
Основная волна 2025 (26 мая)
Досрочная волна 2025
Демо 2025
Основная волна 2024
Основная волна 2022
Досрочная волна 2022

$$① P(\text{все 3 лампы перегорят}) = 0,8 \cdot 0,8 \cdot 0,8 = 0,512$$

$$② P(\text{хотя бы одна не перегорит}) = 1 - 0,512 = 0,488$$

ОТВЕТ 0,488

6

В таблице показано количество билетов и возможные выигрыши беспроигрышной денежной лотереи. Цена билета лотереи равна 50 рублей. Всего билетов выпущено 1000 штук. Участник покупает один случайный билет. На сколько рублей цена билета выше, чем математическое ожидание выигрыша?

Выигрыш	10	50	100	5000
Количество билетов	990	6	3	1

$$① \text{Матем. ожидание } EX = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + x_3 \cdot p_3 + x_4 \cdot p_4 = 10 \cdot \frac{990}{1000} + 50 \cdot \frac{6}{1000} + 100 \cdot \frac{3}{1000} + 5000 \cdot \frac{1}{1000} = 9,9 + 0,3 + 0,3 + 5 = 15,5$$

$$② 50 - 15,5 = 34,5$$

ОТВЕТ 34,5

7

Найдите корень уравнения $(x+9)^2 = 36x$.



B632F0

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)

$$x^2 + 18x + 81 = 36x$$

$$x^2 - 18x + 81 = 0$$

$$(x-9)^2 = 0$$

$$x-9 = 0$$

$$x = 9$$

ОТВЕТ 9

8

Найдите значение выражения $\log_7 12,25 + \log_7 4$.



D27044

ИСТОЧНИКИ

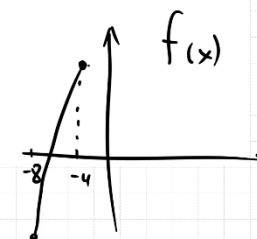
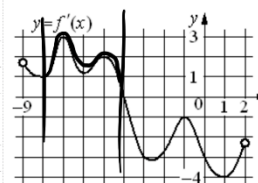
ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2023
Основная волна 2021
Основная волна 2017

$$\log_7 49 = 2$$

ОТВЕТ 2

9

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-9; 2)$. В какой точке отрезка $[-8; -4]$ функция $f(x)$ принимает наибольшее значение?



ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2024
Досрочная волна 2023
Основная волна 2018
Основная волна 2017

ОТВЕТ -4





- 10 Автомобиль разгоняется на прямолинейном участке шоссе с постоянным ускорением a (в км/ч²). Скорость v (в км/ч) вычисляется по формуле $v = \sqrt{2la}$, где l — пройденный автомобилем путь (в км). Найдите ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 1,1 км, приобрести скорость 110 км/ч. Ответ дайте в км/ч².

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна (Реквизит) 2026
Демо 2026
Основная волна 2025
Докторская волна 2024
Основная волна (Реквизит) 2023
Основная волна 2022
Основная волна 2020
Основная волна (Реквизит) 2019
Основная волна 2017
Докторская волна 2016
Основная волна 2014

$$110 = \sqrt{2 \cdot 1,1 \cdot a} \quad |^2$$

$$110^2 = 2 \cdot 1,1 \cdot a$$

$$a = \frac{110^2}{2 \cdot 1,1} = 5500$$

550/09

ОТВЕТ 5 5 0 0

- 11 Имеется два сплава. Первый сплав содержит 5% меди, второй — 14% меди. Масса второго сплава больше массы первого на 10 кг. Из этих двух сплавов получили третий сплав, содержащий 12% меди. Найдите массу третьего сплава. Ответ дайте в килограммах.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Докторская волна 2026
Основная волна (Реквизит) 2024
Основная волна (Реквизит) 2023
Докторская волна 2020
Докторская волна 2019
Основная волна 2016
Докторская волна 2013
СХЕМА ЗАДАЧ НА СПЛАВЫ И СМЕСИ
(Дополн. $m_1 + m_2 = m_3$; Дополн. $m_1 \cdot x_1 + m_2 \cdot x_2 = m_3 \cdot x_3$)

$$0,05 \cdot m + 0,14 \cdot (m + 10) = 0,12 \cdot (2m + 10)$$

671196

$$0,05m + 0,14m + 1,4 = 0,24m + 1,2$$

$$0,20 = 0,05m$$

$$m = 4 \text{ кг}$$

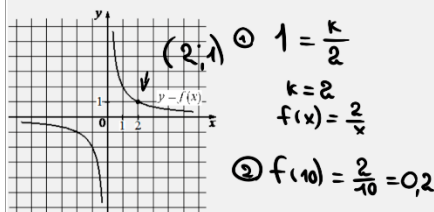
$$2m + 10 = 2 \cdot 4 + 10 = 18$$

ОТВЕТ 1 8

- 12 На рисунке изображен график функции вида $f(x) = \frac{k}{x}$. Найдите значение $f(10)$.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Пересдачи 2025
Основная волна 2026
Демо 2026
Реквизитная волна (Реквизит) 2025
Пересдачи 2024
Основная волна 2024
Основная волна 2022



08C3D9

ОТВЕТ 0 , 2

- 13 В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплачивать одним платежом часть долга.
Найдите r , если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причём в первый год будет выплачено 160 000 рублей, а во второй год — 240 000 рублей.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Основная волна 2026 (9 июля)
Докторская волна 2026
Основная волна 2020
Основная волна 2017
Основная волна 2015

Пусть m — ~~март~~ ^{март} — ~~месяц~~ ^{платеж}

$$\left(1 + \frac{r}{100}\right) = b$$

Дата	Сумма долга
1.20	300 тыс
1.21	300 · b
1.22	300 · b - 160
2.22	300 · b ² - 160b
2.22	300 · b ² - 160b - 240 = 0 :20

$$15 \cdot b^2 - 8 \cdot b - 12 = 0$$

$$D = (-8)^2 - 4 \cdot 15 \cdot (-12) = 784$$

$$b = \frac{8 \pm 28}{30}$$

$$b = \frac{36}{30}$$

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{12}{10}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{2}{10}$$

$$r = 20\%$$

$$b = \frac{-28}{30} = -\frac{2}{3}$$

Ответ: 20.



14 а) Решите уравнение $\log_5 (\cos x - \sin 2x + 25) = 2$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$.

а) $\cos x - \sin 2x + 25 = 25$

$$\cos x - 2 \sin x \cos x = 0$$

$$\cos x \cdot (1 - 2 \sin x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

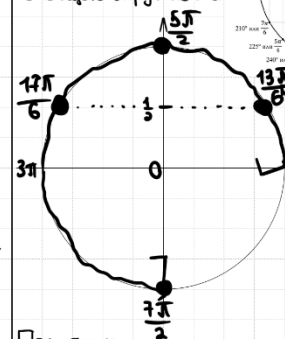
$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

б) Ответим корни с помощью окружности



Получим

$$x = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{7\pi}{6}$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

$$x = \frac{3\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{11\pi}{6}$$

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}, \frac{17\pi}{6}, \frac{7\pi}{2}$



ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
ФИПИ (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2025
Досрочная волна 2023
Досрочная волна (Резерв) 2022
Досрочная волна 2012

15 В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ все рёбра равны 2. Точка M – середина ребра AA_1 .

а) Докажите, что прямые MB и B_1C перпендикулярны.

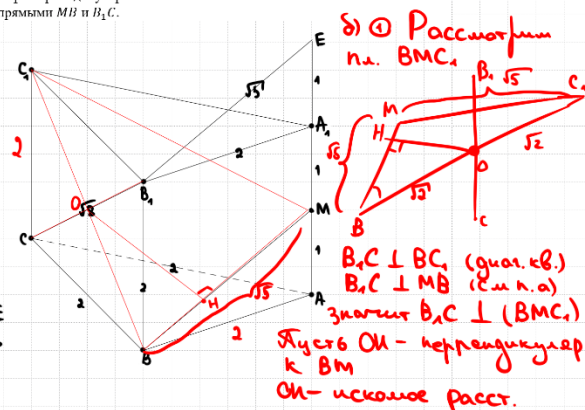
б) Найдите расстояние между прямыми MB и B_1C .

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2018

а) ① Построим AE
Такая, что $AE \perp A_1M$
Тогда $B_1E \parallel BM$
Тогда $\angle EB_1C$ – искомым

② $EB_1 = \sqrt{A_1B_1^2 + A_1E^2} = \sqrt{5}$
 $B_1C = \sqrt{BC^2 + BB_1^2} = \sqrt{8}$
 $CE = \sqrt{AC^2 + AE^2} = \sqrt{5}$
Заметим, что в $\triangle B_1CE$
вып. $\angle$ $13 = 5 + 5$
значит $\angle EB_1C = 90^\circ$
 $MB \perp B_1C$



РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ

Расстояние между скрещивающимися прямыми – это длина общего перпендикуляра, проведённого к этим прямым

Если одна из двух скрещивающихся прямых лежит в плоскости, а другая – параллельна этой плоскости, то расстояние между данными прямыми равно расстоянию между прямой и плоскостью

Если две скрещивающиеся прямые лежат в параллельных плоскостях, то расстояние между этими прямыми равно расстоянию между параллельными плоскостями

① $\triangle BMC_1$: по т. кос.

$$\cos B = \frac{5 + 8 - 5}{2 \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$\sin B = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{OM}{BO}$$

$$\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{10}} = \frac{OM}{\sqrt{2}} \quad OM = \sqrt{12}$$

Ответ: $\sqrt{12}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3



- 16 Решите неравенство

$$\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - 1}{\log_7(x + 6)} \leq 0.$$

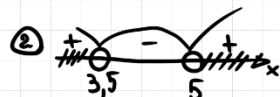
$$\frac{\log_2(2x^2 - 17x + 35) - \log_2 2}{\log_7(x + 6) - \log_7 1} \leq 0$$

$$\textcircled{1} \frac{(2-1)(2x^2 - 17x + 35 - 2)}{(7-1)(x+6-1)} \leq 0 \quad | :6$$

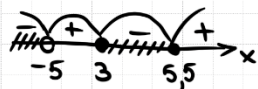
$$\textcircled{2} 2x^2 - 17x + 33 > 0$$

$$\textcircled{3} x + 6 > 0$$

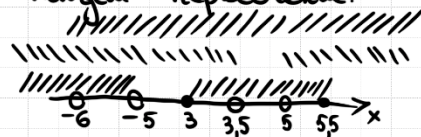
$$\textcircled{1} \frac{2x^2 - 17x + 33}{x + 5} \leq 0$$



$$\textcircled{3} x > -6$$



Найдём пересечение:



Ответ: $(-6; -5) \cup [3; 3.5) \cup (5; 5.5]$

ИСТОЧНИКИ

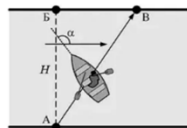
Основная волна (Резерв) 2024	
Основная волна (Резерв) 2017	
МЕТОД РАЦИОНАЛИЗАЦИИ	
БЫЛО	СТАЛО
$\log_a f - \log_a g$	$(a-1)(f-g)$
$a^f - a^g$	$(a-1)(f-g)$
$ f - g $	$(f-g)(f+g)$
$\sqrt{f} - \sqrt{g}$	$(f-g)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



17

На берегах прямого участка реки друг напротив друга находятся пристани А и Б. Лодка начинает переправу от пристани А. Собственная скорость лодки v меньше скорости течения реки u .



При переправе лодку сносит течением, и точка прибытия В находится от пристани Б на расстоянии, которое выражается формулой

$$L = H \cdot \frac{u + v \cos \alpha}{v \sin \alpha},$$

где H – ширина реки, α – угол между вектором скорости лодки относительно воды и вектором скорости течения. Найдите наименьшее возможное расстояние от точки В до пристани Б, если $H = 60$ м, $u = 2$ м/с и $v = 1$ м/с.

$L(d)_{\min} = ?$

$$L(d) = 60 \cdot \frac{2 + 1 \cdot \cos d}{1 \cdot \sin d} = \frac{120 + 60 \cdot \cos d}{\sin d}$$

$$L'(d) = \frac{-60 \sin d \cdot \sin d - (120 + 60 \cdot \cos d) \cdot \cos d}{\sin^2 d} = \frac{-60 \sin^2 d - 60 \cos^2 d - 120 \cos d}{\sin^2 d} = \frac{-120 \cos d - 60}{\sin^2 d}$$

Найдем нули:

$$-120 \cos d - 60 = 0$$

$$\cos d = -\frac{1}{2}$$

$$\sin^2 d \neq 0$$

$$\sin d \neq 0$$

d – это угол между вектором скорости лодки отн. воды и вектор скорости течения.
 d лежит в пределах от 0 до 180
 $d \in (0; 180)$ т.к. $\sin d \neq 0$
 $d = 120^\circ$ т.к. $\cos d = -\frac{1}{2}$ и $d \in (0; 180^\circ)$



$$\text{Если } d = 90^\circ, \text{ то } L'(d) = \frac{-120 \cdot 0 - 60}{1} = -60$$

$$d = 150^\circ, \text{ то } L'(d) > 0$$

$d = 120^\circ$ – точка min, значит $L(d)_{\min} = L(120^\circ)$

$$L(120^\circ) = \frac{120 + 60 \cdot (-\frac{1}{2})}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{90}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{180}{\sqrt{3}} = \frac{180\sqrt{3}}{3} = 60\sqrt{3} \text{ м}$$

Ответ: $60\sqrt{3}$.

Производные	
1	$C' = 0$
2	$x' = 1$
3	$(Cx)' = C$
4	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
5	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$(U \cdot V)' = U'V + UV'$
7	$(\frac{U}{V})' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$
8	$(U(V))' = (U(V))' \cdot V'$
9	$(\sin x)' = \cos x$
10	$(\cos x)' = -\sin x$
11	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
12	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
13	$(e^x)' = e^x$
14	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$
15	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$
16	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2



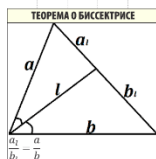
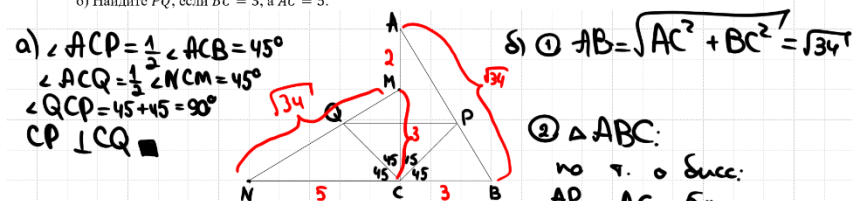
18

В прямоугольном треугольнике ABC точка M лежит на катете AC , а точка N лежит на продолжении катета BC за точку C , причём $CM = BC$ и $CN = AC$. Отрезки CP и CQ – биссектрисы треугольников ACB и NCM соответственно.

- а) Докажите, что CP и CQ перпендикулярны.
б) Найдите PQ , если $BC = 3$, а $AC = 5$.

ИСТОЧНИКИ

Основная волна 2019



③ $\cos \angle ABC = \frac{BC}{AB} = \frac{3}{\sqrt{34}}$
 по т. кос в $\triangle BPC$:
 $PC^2 = 3^2 + \frac{9}{64} \cdot 34 - 2 \cdot 3 \cdot \frac{3}{8} \sqrt{34} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}}$
 $PC = \frac{15}{4\sqrt{2}}$
 Аналогично в $\triangle CNM$:
 $CQ = \frac{15}{4\sqrt{2}}$
 $\triangle CQP$:
 $QP = \sqrt{CQ^2 + PC^2} = \frac{15}{4}$
 Ответ: $\frac{15}{4}$.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3





19

Найдите все значения a , при каждом из которых уравнение

$$2^x - a = \sqrt{4^x - a}$$

имеет единственный корень.

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)
ГПР (новый банк)
Досрочная волна (Резерв) 2022
Основная волна 2016

Пусть $2^x = t$ $t > 0$
 $x = \log_2 t$

$$t - a = \sqrt{t^2 - a}$$

Нужно, чтобы это уравнение имело единств. полож. корень t .

$$\begin{cases} t - a \geq 0 \\ (t - a)^2 = t^2 - a \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t^2 - 2at + a^2 = t^2 - a \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \cdot a \cdot t = a^2 + a \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$$

это линейное ур-е,
т.е. оно имеет
единств. реш. (только
если $a \neq 0$, т.к. при $a=0$
 $2 \cdot 0 \cdot t = 0^2 + 0$
 $0 \cdot t = 0$
 t - любое
значит решений ∞
бесконечное много
 $(a \neq 0)$

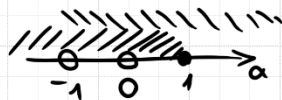
$$\begin{cases} t = \frac{a^2 + a}{2a} = \frac{a \cdot (a+1)}{2a} = \frac{a+1}{2} \\ a \neq 0 \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{a+1}{2} \\ a \neq 0 \\ t \geq a \\ t > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{a+1}{2} \\ a \neq 0 \\ \frac{a+1}{2} \geq a \quad | \cdot 2 \\ \frac{a+1}{2} > 0 \quad | \cdot 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{a+1}{2} \\ a \neq 0 \\ a+1 \geq 2a \\ a+1 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} t = \frac{a+1}{2} \\ a \neq 0 \\ a \leq 1 \\ a > -1 \end{cases}$$



Ответ: $(-1, 0) \cup (0, 1]$.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4



20 Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое – трёхзначное и оба кратны 45.

- а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?
 б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?
 в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

ИСТОЧНИКИ

ГПР (новый банк)
 Досрочная волна 2024

0 1 2 3 5 7 9

Чтобы число было кратно 45, оно должно оканчиваться на 0 или 5 и сумма цифр д.б. кратна 9

а)
$$\begin{array}{r} 270 \\ + 1935 \\ \hline 2205 \end{array}$$

Ответ: а) да, $270 + 1935 = 2205$

б)
$$\begin{array}{r} 270 \\ + 1935 \\ \hline 2205 \end{array}$$

в) Любая из 12 рассм. сумм не равна 3435

2 случай

Любая из 12 рассм. сумм не равна 3435

знают это невозможно

Ответ: б) нет.

2 способ

б) сумма двух чисел, кратных 45, также кратна 45, значит 3435 д.б. кратно 45, а оно не кратно 45

Ответ: б) нет.

20 Из набора цифр 0, 1, 2, 3, 5, 7 и 9 составляют пару чисел, используя каждую цифру ровно один раз. Оказалось, что одно из этих чисел четырёхзначное, другое – трёхзначное и оба кратны 45.

- а) Может ли сумма такой пары чисел равняться 2205?
 б) Может ли сумма такой пары чисел равняться 3435?
 в) Какое наибольшее значение может принимать сумма чисел в такой паре?

в) Если трёхзначное оканчивается на 0, а четырёхзначное на 5, то наибольшее значение это 720 и 9315 (см. п.б)

Если трёхзначное оканчивается на 5, а четырёхзначное на 0, то наибольшее значение это 315 и 9720

В обоих случаях сумма 10035

Большая сумма невозможна, т.к. на б.б. наиб. значение

б) 10035

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4