

**Единый государственный экзамен  
по МАТЕМАТИКЕ**

**Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 20 заданий. Часть 1 содержит 13 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–13 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8.

|    |   |   |   |   |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| 10 | - | 0 | , | 8 |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
|----|---|---|---|---|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|

Бланк

При выполнении заданий 14–20 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

При выполнении работы разрешается использовать линейку.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

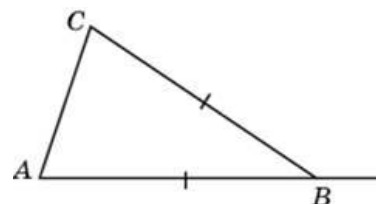
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

*Ответом к заданиям 1–13 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.*

- 1** В треугольнике  $ABC$   $AB = BC$ . Внешний угол при вершине  $B$  равен  $94^\circ$ . Найдите угол  $C$ . Ответ дайте в градусах.

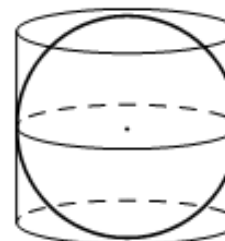


Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2** Даны векторы  $\vec{a}(-13; 4)$  и  $\vec{b}(-6; 1)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3** Цилиндр описан около шара. Объём шара равен 50. Найдите объём цилиндра.



Ответ: \_\_\_\_\_.



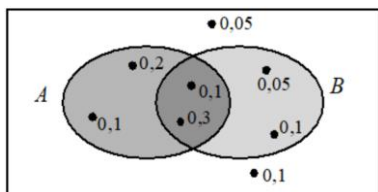
- 4 В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 6 На рисунке изображена диаграмма Эйлера для случайных событий  $A$  и  $B$  в некотором случайном опыте. Точками показаны все элементарные события и около каждого указана его вероятность. Найдите вероятность события  $A$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите корень уравнения

$$7^{-6-x} = 343.$$

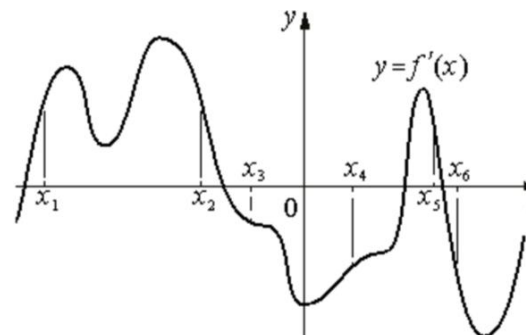
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 Найдите значение выражения

$$4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{3}.$$

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9 На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ . На оси абсцисс отмечены шесть точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ . Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции  $f(x)$ ?



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения  $P$  (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:  $P = \sigma ST^4$ , где  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$  — постоянная, площадь поверхности  $S$  измеряется в квадратных метрах, а температура  $T$  — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности  $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21} \text{ м}^2$ , а излучаемая ею мощность  $P$  равна  $4,104 \cdot 10^{27} \text{ Вт}$ . Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

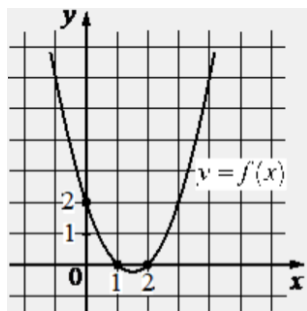
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

Ответ: \_\_\_\_\_.



- 12 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Найдите значение  $f(-2)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 13 15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

- 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r$  процентов по сравнению с концом предыдущего месяца, где  $r$  – **целое** число;
- со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
- 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата                | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Долг (в млн рублей) | 1     | 0,6   | 0,4   | 0,3   | 0,2   | 0,1   | 0     |

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.**

**Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

## Часть 2

**Для записи решений и ответов на задания 14–20 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (14, 15 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.**

- 14 а) Решите уравнение

$$36^{\sin 2x} = 6^{2 \sin x}.$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[-\frac{7\pi}{2}; -\frac{5\pi}{2}\right]$ .

- 15 Основанием прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является параллелограмм. На рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно, причём  $B_1 K : K C_1 = 1 : 2$ , а  $AMKN$  – равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 6.

- а) Докажите, что  $N$  – середина  $BC$ .  
б) Найдите площадь трапеции  $AMKN$ , если объём призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 72, а её высота равна 2.

- 16 Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3(3x)} \cdot \left( \frac{2}{\log_3 x + 4} - 1 \right) \leq 0.$$

- 17 При подключении последовательного контура к источнику переменного тока амплитуда силы тока  $I$  (в амперах) в цепи зависит от циклической частоты  $\omega$  (в рад/с) и выражается формулой:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}},$$

где  $U = 220$  В – амплитуда напряжения источника,  $R = 44$  Ом – активное сопротивление цепи,  $L = 0,2$  Гн – индуктивность катушки, а  $C = 20$  мкФ =  $20 \cdot 10^{-6}$  Ф – ёмкость конденсатора. Найдите наибольшую возможную силу тока (в амперах) в этой цепи.

- 18** В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно так, что  $AM:MB = CN:NB = 2:3$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается отрезка  $MN$  в точке  $L$ .

- а) Докажите, что  $AB + BC = 4AC$ .  
 б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если  $ML = \frac{9}{5}$ ,  $LN = 3$ .

- 19** Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

- 20** Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 1 и 6, либо только одну из этих цифр.

- а) Может ли сумма всех чисел быть равной 173?  
 б) Может ли сумма всех чисел быть равной 109?  
 в) Какое наименьшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 1021?

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*

### Составитель варианта — Евгений Пифагор

|             |                                                                                                                                                                                                                                                                                                         |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Результаты: | <u>Результаты моих учеников:</u> <ul style="list-style-type: none"> <li>• 53 человека набрали 100 баллов</li> <li>• 789 человек набрали 90+ баллов</li> </ul>                                                                                                                                           |
|             | Личные результаты: <ul style="list-style-type: none"> <li>• Набрал <u>100 баллов</u> на ЕГЭ по математике профиль</li> <li>• Высшее образование — ТГУ (Тольятти), 2009-2014</li> <li>• Занял 1 место в трёх олимпиадах по высшей математике, 2009-2011</li> <li>• 15 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ</li> </ul> |
| ВК:         | <a href="https://vk.ru/shkolapifagora">https://vk.ru/shkolapifagora</a>                                                                                                                                              |
| Ютуб:       | <a href="https://www.youtube.com/c/pifagor1">https://www.youtube.com/c/pifagor1</a>                                                                                                                                  |



Ответы

| Номер задания | Правильный ответ                                                                 | Видео решение |
|---------------|----------------------------------------------------------------------------------|---------------|
| 1             | 47                                                                               |               |
| 2             | 82                                                                               |               |
| 3             | 75                                                                               |               |
| 4             | 0,25                                                                             |               |
| 5             | 0,0009                                                                           |               |
| 6             | 0,7                                                                              |               |
| 7             | -9                                                                               |               |
| 8             | 2                                                                                |               |
| 9             | 3                                                                                |               |
| 10            | 6000                                                                             |               |
| 11            | 14                                                                               |               |
| 12            | 12                                                                               |               |
| 13            | 7                                                                                |               |
| 14            | а) $\pi n, \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$<br>б) $-3\pi$           |               |
| 15            | $5\sqrt{5}$                                                                      |               |
| 16            | $\left(\frac{1}{81}; \frac{1}{27}\right] \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$ |               |
| 17            | 5                                                                                |               |
| 18            | 3                                                                                |               |
| 19            | $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$                                                     |               |
| 20            | а) да<br>б) нет<br>в) 6                                                          |               |

Решения

1

В треугольнике  $ABC$   $AB = BC$ . Внешний угол при вершине  $B$  равен  $94^\circ$ . Найдите угол  $C$ .  
Ответ дайте в градусах.

①  $\angle B_{\text{вн}} = 180 - 94 = 86$

②  $\angle C = \frac{180 - 86}{2} = 47$

ОТВЕТ

47

2

Даны векторы  $\vec{a}(-13; 4)$  и  $\vec{b}(-6; 1)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

$\vec{a} \cdot \vec{b} = -13 \cdot (-6) + 4 \cdot 1 = 82$

ОТВЕТ

82

ИСТОЧНИКИ

Основная волна (Резерв) 2026  
Досрочная волна 2024  
Основная волна (Резерв) 2023  
Досрочная волна (Резерв) 2018

ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Пересдача 2026  
Деся 2026  
Пересдача 2025  
Основная волна 2025  
Пересдача 2024  
Основная волна 2024  
Досрочная волна (Резерв) 2024  
Досрочная волна 2024



3

Цилиндр описан около шара. Объем шара равен 50. Найдите объем цилиндра.



FCCBC9

## ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Досрочная волна 2024  
Основная волна 2023  
Основная волна 2021  
Основная волна 2017  
Досрочная волна 2016

$$\textcircled{1} V_{\text{ш}} = 50 = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\pi R^3 = \frac{25 \cdot 50}{4} = \frac{75}{2}$$

$$\textcircled{2} V_{\text{ц}} = \pi R^2 \cdot 2R = 2\pi R^3 = 2 \cdot \frac{75}{2} = 75$$

ОТВЕТ 75

4

В случайном эксперименте симметричную монету бросают дважды. Найдите вероятность того, что решка выпала больше раз, чем орёл.

454B44

## ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Досрочная волна 2023  
Досрочная волна 2013

OO  
OP  
PO  
PP

$$P = \frac{1}{4} = 0,25$$

ОТВЕТ 0,25

5

Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,9. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в первую мишень и не попадёт в три последние.

F3F0DF

## ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Основная волна 2026  
Основная волна (Резерв) 2025  
Основная волна 2024  
Основная волна 2023  
Основная волна 2022

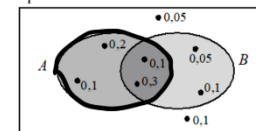
$$\textcircled{1} \begin{cases} P(\text{попасть}) = 0,9 \\ P(\text{промах}) = 0,1 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \begin{matrix} \textcircled{V} & \textcircled{X} & \textcircled{X} & \textcircled{X} \end{matrix}$$

$$P = 0,9 \cdot 0,1 \cdot 0,1 \cdot 0,1 = 0,0009$$

ОТВЕТ 0,0009

6

На рисунке изображена диаграмма Эйлера для случайных событий  $A$  и  $B$  в некотором случайном опыте. Точками показаны все элементарные события и около каждого указана его вероятность. Найдите вероятность события  $A$ .

$$P(A) = 0,1 + 0,1 + 0,2 + 0,3 = 0,7$$

ОТВЕТ 0,7



7 Найдите корень уравнения  $7^{-6-x} = 343$ .

$$\begin{aligned} 7^{-6-x} &= 7^3 \\ -6-x &= 3 \\ -6-3 &= x \\ x &= -9 \end{aligned}$$

7377CE

## ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Демо 2024  
Демо 2023  
Демо 2022  
Демо 2021  
Демо 2020  
Демо 2019  
Демо 2018  
Демо 2017  
Демо 2016  
Демо 2015  
Основная волна 2026  
Основная волна 2025  
Основная волна 2023  
Основная волна 2022  
Основная волна 2021  
Основная волна 2020  
Основная волна 2019  
Основная волна 2017  
Основная волна 2016  
Основная волна 2013  
Досрочная волна 2024

ОТВЕТ | -9

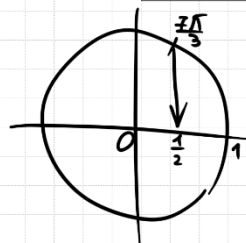
8 Найдите значение выражения

$$4\sqrt{2} \cos \frac{\pi}{4} \cos \frac{7\pi}{3}$$

$$4\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4 \cdot \sqrt{4}}{2} = 2$$

## ИСТОЧНИКИ

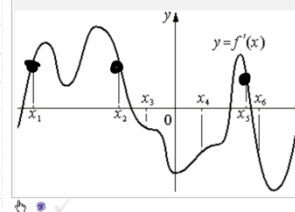
ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Резервная волна (Резерв) 2025  
Основная волна 2020



ОТВЕТ | 2

9

На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ .  
На оси абсцисс отмечены шесть точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$ .  
Сколько из этих точек лежит на промежутках возрастания функции  $f(x)$ ?



A9FB0A

## ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Основная волна 2026  
Демо 2026  
Основная волна 2025 (26 мая)  
Демо 2025  
Основная волна (Резерв) 2024  
Основная волна 2023  
Основная волна (Резерв) 2022  
Основная волна 2017  
Досрочная волна 2016  
Основная волна 2014

ОТВЕТ | 3

10

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому мощность излучения  $P$  (в ваттах) нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:  $P = \sigma ST^4$ , где  $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$  — постоянная, площадь поверхности  $S$  измеряется в квадратных метрах, а температура  $T$  — в градусах Кельвина. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности  $S = \frac{1}{18} \cdot 10^{21}$  м<sup>2</sup>, а излучаемая ею мощность  $P$  равна  $4,104 \cdot 10^{27}$  Вт. Определите температуру этой звезды. Дайте ответ в градусах Кельвина.

C24CBD

## ИСТОЧНИКИ

ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Основная волна 2026 (9 июня)  
Основная волна 2026  
Досрочная волна 2024  
Пересдача 2024  
Основная волна 2024  
Основная волна (Резерв) 2019  
Основная волна (Резерв) 2017  
Досрочная волна 2014

$$\begin{aligned} T^4 &= \frac{P}{\sigma \cdot S} \\ T^4 &= \frac{4,104 \cdot 10^{27}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{18} \cdot 10^{21}} = 6^4 \cdot 10^{12} \quad |^{\frac{1}{4}} \\ T &= 6 \cdot 10^3 = 6000 \end{aligned}$$

ОТВЕТ | 6000

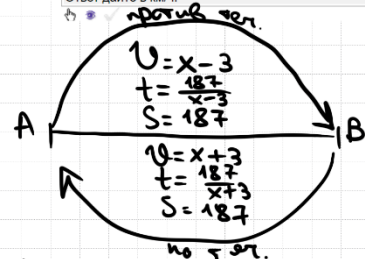


11

Моторная лодка прошла против течения реки 187 км и вернулась в пункт отправления, затратив на обратный путь на 6 часов меньше. Найдите скорость лодки в неподвижной воде, если скорость течения равна 3 км/ч. Ответ дайте в км/ч.

ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)  
ГРП (новый банк)  
Демо 2025  
Основная волна 2022



$$\frac{187 \cdot 6}{x^2 - 9} = \frac{6}{1} \quad | :6$$

$$x^2 - 9 = 187$$

$$x^2 = 196$$

$$x = 14 \quad x = -14$$

$$t_{\text{мед}} - t_{\text{быстр}} = 6$$

$$\frac{187}{x-3} - \frac{187}{x+3} = 6$$

$$\frac{187x + 187 \cdot 3 - 187x + 187 \cdot 3}{x^2 - 9} = \frac{6}{1}$$

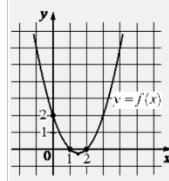
ОТВЕТ 14

12

На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = ax^2 + bx + c$ . Найдите значение  $f(-2)$ .

ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)  
ГРП (новый банк)  
Досрочная волна 2026  
Досрочная волна (Резерв) 2024  
Основная волна (Резерв) 2023



$$① a = 1$$

$$c = 2$$

$$y = 1 \cdot x^2 + b \cdot x + 2$$

$$② \text{Найдём } b:$$

$$x_0 = \frac{-b}{2a}$$

$$1,5 = \frac{-b}{2 \cdot 1}$$

$$-b = 3 \quad b = -3$$

$$f(x) = 1 \cdot x^2 - 3 \cdot x + 2$$

$$f(-2) = 1 \cdot 4 - 3 \cdot (-2) + 2 = 12$$

ОТВЕТ 12

13

15-го января планируется взять кредит в банке на шесть месяцев в размере 1 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– 1-го числа каждого месяца долг увеличивается на  $r\%$  процентов независимо от конца предыдущего месяца, где  $r$  – целое число; со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей.

| Дата                | 15.01 | 15.02 | 15.03 | 15.04 | 15.05 | 15.06 | 15.07 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| Долг (в млн рублей) | 1     | 0,6   | 0,4   | 0,3   | 0,2   | 0,1   | 0     |

Найдите наибольшее значение  $r$ , при котором общая сумма выплат будет меньше 1,2 млн рублей.

ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)  
ГРП (новый банк)  
Основная волна (Резерв) 2023  
Досрочная волна 2021  
Основная волна 2016  
Демо 2023  
Демо 2022  
Демо 2021  
Демо 2020  
Демо 2019  
Демо 2018  
Демо 2017

Пусть  $T$  – долг на начало

Дата Сумма долга

15 я 1 млн = 1000 тыс.

1 1000 · (1 +  $\frac{r}{100}$ ) = 1000 + 10r

7 Ф 1000 · (1 +  $\frac{r}{100}$ ) = 1000 + 10r

15 600 тыс

1 600 · (1 +  $\frac{r}{100}$ ) = 600 + 6r

7 М 600 · (1 +  $\frac{r}{100}$ ) = 600 + 6r

15 400

1 400 + 4r

7 А 400 + 4r

15 300

1 300 + 3r

7 М 300 + 3r

15 200

1 200 + 2r

7 У 200 + 2r

15 100

1 100 + r

7 У 100 + r

15 0

ОТВЕТ: 7.

$$O.C.B. < 1200 \text{ тыс.}$$

$$400 + 10r + 200 + 6r + 100 + 4r + 100 + 3r + 100 + 2r + 100 + r < 1200$$

$$1000 + 26r < 1200$$

$$26r < 200$$

$$r < \frac{200}{26}$$

$$r < \frac{100}{13}$$

$$r < 7 \frac{9}{13}$$

$$r_{\text{наиб. целое}} = 7$$









**15** Основанием прямой призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  является параллелограмм. На рёбрах  $A_1 B_1$ ,  $B_1 C_1$  и  $BC$  отмечены точки  $M$ ,  $K$  и  $N$  соответственно, причём  $B_1 K : KC_1 = 1 : 2$ , а  $AMKN$  – равнобедренная трапеция с основаниями 4 и 6.

**ИСТОЧНИКИ**  
ГПР (старый банк)  
ГПР (новый банк)  
Основная волна 2023

а) Докажите, что  $N$  – середина  $BC$ .

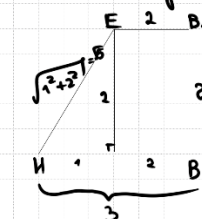
б) Найдите площадь трапеции  $AMKN$ , если объём призмы  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  равен 72, а её высота равна 2.

а)  $MK \parallel AN$  (т.к.  $AMKN$  – трап.)  
 $\Delta B_1MK \sim \Delta ABN$  по 2 углам (...)  
 $\frac{4}{6} = \frac{B_1K}{BN} = \frac{B_1M}{AB}$   
 Пусть  $B_1K = x$   
 Тогда  $B_1C_1 = 3x$   
 $\frac{4}{6} = \frac{x}{BN}$   
 $BN = \frac{3}{2}x = \frac{1}{2}BC$   
 значит  $N$  – середина  $BC$

б) 1)  $V_{пр} = 72 = 2 \cdot S_{ABCD}$   
 $S_{ABCD} = 36$   
 2) Рассмотрим  $AMKN$  – п/б трап.  
 3) Рассмотрим  $ABCD$   
 Пусть  $BN$  – перп. к  $AN$   
 $S_{ABCD} = 36$   
 $S_{ABC} = 18$   
 $S_{ABN} = 9$  (т.к.  $AN$  – мед.  $\Delta ABC$ )  
 $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot BN = 9$   
 $BN = 3$   
 4)  $S_{\Delta B_1MK} = \frac{4}{9} \cdot S_{\Delta ABN}$   
 (т.к.  $k = \frac{2}{3}$ )  
 $S_{\Delta B_1MK} = \frac{4}{9} \cdot 9 = 4 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot B_1E$   
 $B_1E = 2$

5)  $BK$  – медиана  $\perp AN$   
 $KE$  – высота по ТП  
 значит  $KE$  – искомая высота.

6) Рассмотрим  $BNEB_1$  – прямоуг. трап.



$$S_{AMKN} = \frac{4+6}{2} \cdot \sqrt{5} = 5\sqrt{5}$$

Ответ:  $5\sqrt{5}$ .

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                                                                                                                | Баллы |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> и обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i>                                                                                                                                                                                                     | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте <i>b</i><br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> , но при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                                  | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта <i>a</i> ,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта <i>b</i> получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте <i>b</i> с использованием утверждения пункта <i>a</i> , при этом пункт <i>a</i> не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше                                                                                                                                                                                                                                                  | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3     |





16

Решите неравенство

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3(3x)} \cdot \left( \frac{2}{\log_3 x + 4} - 1 \right) \leq 0.$$

ИСТОЧНИКИ

Досрочная волна (Резерв) 2025  
Досрочная волна 2021

$$\frac{1}{\log_3 x + 4} + \frac{2}{\log_3 3 + \log_3 x} \cdot \left( \frac{2}{\log_3 x + 4} - \frac{1}{1} \right) \leq 0$$

$$\text{Пусть } \log_3 x = t$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{1+t} \cdot \left( \frac{2}{t+4} - \frac{1}{1} \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{1+t} \cdot \left( \frac{2-t-4}{t+4} \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{2}{1+t} \cdot \left( \frac{-t-2}{t+4} \right) \leq 0$$

$$\frac{1}{t+4} + \frac{-2t-4}{(t+1)(t+4)} \leq 0$$

$$\frac{t+1-2t-4}{(t+1)(t+4)} \leq 0$$

$$\frac{-t-3}{(t+1)(t+4)} \leq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$\frac{t+3}{(t+1)(t+4)} \geq 0$$



$$\begin{cases} -4 \leq t \leq -3 \\ t > -1 \end{cases}$$

$$\log_3 \frac{1}{81} < \log_3 x \leq \log_3 \frac{1}{27}$$

$$\frac{1}{81} < x \leq \frac{1}{27}$$

$$\log_3 x > \log_3 \frac{1}{3} \\ x > \frac{1}{3}$$

$$\text{Ответ: } \left( \frac{1}{81}, \frac{1}{27} \right] \cup \left( \frac{1}{3}, +\infty \right)$$

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                        | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                                                                                                                           | 2     |
| Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек<br>ИЛИ<br>получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                        | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                          | 2     |



17

При подключении последовательного контура к источнику переменного тока амплитуда силы тока  $I$  (в амперах) в цепи зависит от циклической частоты  $\omega$  (в рад/с) и выражается формулой:

$$I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

где  $U = 220$  В – амплитуда напряжения источника,  $R = 44$  Ом – активное сопротивление цепи,  $L = 0,2$  Гн – индуктивность катушки, а  $C = 20$  мкФ =  $20 \cdot 10^{-6}$  Ф – емкость конденсатора. Найдите наибольшую возможную силу тока (в амперах) в этой цепи.

① Числитель дроби  $> 0$  числитель = 220  
знаменатель дроби  $> 0$

$I_{\text{наиб.}}$  будет при наименьшем возможном значении знаменателя

② Подкоренное = полное + нестр.  
значит  $I_{\text{наиб.}}$  будет при  $(\omega L - \frac{1}{\omega C})^2 = 0$

$$\begin{aligned}\omega L &= \frac{1}{\omega C} \\ \omega L (\omega C) &= \frac{1}{\omega C} \cdot \omega C \\ \frac{1}{1} - \frac{1}{\omega C} &= 0 \\ \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C} &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega^2 LC &= 1 \\ \omega^2 &= \frac{1}{LC} \\ \omega &= \frac{1}{\sqrt{LC}} = 500.\end{aligned}$$

$$\textcircled{3} I_{\text{наиб.}} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + 0^2}} = \frac{U}{R} = \frac{220}{44} = 5 \text{ A}$$

Ответ: 5 А.

| Содержание критерия                                                                                                  | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получен верный ответ                                                                                     | 2     |
| Получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                  | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                    | 2     |



18

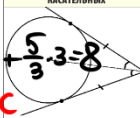
В треугольнике  $ABC$  точки  $M$  и  $N$  лежат на сторонах  $AB$  и  $BC$  соответственно так, что  $AM : MB = CN : NB = 2 : 3$ . Окружность, вписанная в треугольник  $ABC$ , касается отрезка  $MN$  в точке  $L$ .

а) Докажите, что  $AB + BC = 4AC$ .

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник  $ABC$ , если  $ML = \frac{9}{5}$ ,  $LN = 3$ .

## ИСТОЧНИКИ

ГРП (старый банк)  
ГРП (новый банк)  
Досрочная волна 2022  
СВОЙСТВО ОТРЕЗКОВ  
КАСАТЕЛЬНЫХ  
Отрезки касательных к окружности, проведенные из одной точки, равны и образуют равные углы с прямой, проходящей через эту точку и центр окружности



а) Пусть  $Q$  - центр окр-ти  
 $E, K$  - точки касание окр-ти с  $AB$   
 Пусть  $ML = x$   
 $LN = y$   
 $ML = x = ME$  по св-ву окр-ти кас. к стороне  
 $LN = y = NK$  по св-ву окр-ти кас. к стороне  
 $MN \parallel AC$

б) Пусть  $ML = x$   
 $LN = y$   
 $AC = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y = \frac{5}{3}(x+y)$

2) Пусть  $MK$  - перп. к  $AC$   
 $NP$  - перп. к  $AC$   
 $h$  - высота  $\triangle ABC$   
 $AE = BK = AO$   
 $OC = 8 - B = CK$   
 $OP = 3 = LN$   
 $KO = \frac{9}{5} = ML$   
 $AK = 8 - \frac{9}{5}$   
 $PC = 8 - B - 3 = 5 - B$

3)  $\triangle BMN \sim \triangle ABC$  по 2 углам ( $\angle B$  - общий,  $\angle BMN = \angle BAC$ )  
 $k = \frac{AB}{BM} = \frac{5}{3} = \frac{AC}{MN}$   
 $AC = \frac{5}{3} \cdot (x+y) = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y$

4)  $AE = AO$  по св-ву окр-ти кас. к стороне  
 $CK = OC$  по св-ву окр-ти кас. к стороне  
 Тогда  $AE + CK = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y$   
 Тогда  $BM + BN = \frac{3}{2} \cdot (AM + CN) = \frac{3}{2} \cdot (x + \frac{5}{3}x + y + \frac{5}{3}y) = \frac{3}{2} \cdot (\frac{8}{3}x + \frac{8}{3}y) = 4x + 4y$

Получаем  
 $AB + BC = (AM + CN) + (BM + BN) = \frac{8}{3}x + \frac{8}{3}y + 4x + 4y = \frac{20}{3}x + \frac{20}{3}y = 4 \cdot AC$

5)  $AC = \frac{5}{3}x + \frac{5}{3}y = \frac{5}{3} \cdot \frac{9}{5} + \frac{5}{3} \cdot 3 = 3 + 5 = 8$

6)  $AM^2 = AK^2 + MK^2$   
 $PCN^2 = PC^2 + NP^2$   
 $(B + \frac{9}{5})^2 = (B - \frac{9}{5})^2 + h^2$   
 $(11 - B)^2 = (5 - B)^2 + h^2$   
 $Выразим h^2 и упростили$   
 $(B + \frac{9}{5})^2 - (B - \frac{9}{5})^2 = (11 - B)^2 - (5 - B)^2$   
 $\frac{8}{5}B + \frac{81}{25} - \frac{8}{5}B + \frac{81}{25} = 121 - 22B + B^2 - 25 + 10B - B^2$   
 $\frac{162}{25} = 96 - 12B$   
 $36B = 96 - 12B$   
 $48B = 96$   
 $B = 2$

7)  $h = \sqrt{68^2 - 32^2} = 60$   
 $r = \frac{60}{2} = 30$   
 Ответ: 30.

| Содержание критерия                                                                                                                                                                                                                                                           | Баллы |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а и обоснованно получен верный ответ в пункте б                                                                                                                                                                              | 3     |
| Получен обоснованный ответ в пункте б<br>ИЛИ<br>имеется верное доказательство утверждения пункта а, но при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки                                                                                   | 2     |
| Имеется верное доказательство утверждения пункта а,<br>ИЛИ<br>при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки,<br>ИЛИ<br>обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                                                                                                                                                                                           | 0     |
| Максимальный балл                                                                                                                                                                                                                                                             | 3     |

19 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^4 - x^2 + a^2} = x^2 + x - a$$

имеет ровно три различных корня.

ИСТОЧНИКИ

РПР (старый банк)  
РПР (новый банк)  
Основная школа (Решары) 2022  
Основная школа 2016

168716

$$1) x^2 + x - a \geq 0$$

$$2) x^4 - x^2 + a^2 = (x^2 + (x-a))^2$$

$$3) x^4 - x^2 + a^2 = x^4 + 2x^2(x-a) + (x-a)^2$$

$$\cancel{x^4} - \cancel{x^2} + \cancel{a^2} = \cancel{x^4} + 2x^3 - 2x^2a + x^2 - 2ax + a^2$$

$$2x^3 - 2x^2a + x^2 - 2ax + a^2 = 0 \quad | :2$$

$$x^3 - x^2a + x^2 - ax + \frac{a^2}{2} = 0$$

$$x \cdot (x^2 - xa + x - a) = 0$$

$$x \cdot (x \cdot (x-a) + (x-a)) = 0$$

$$x \cdot (x-a) \cdot (x+1) = 0$$

$$x=0 \quad x=a \quad x=-1$$

$$a \neq 0 \quad a \neq -1 \quad \text{т.к. иначе не будет 3 корней}$$

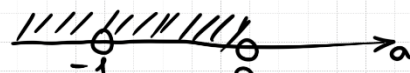
Найдём при каких  $a$  каждый из трёх корней удовл.  
пер-во ①  
 $x^2 + x - a \geq 0$

для  $x=0$   
 $0^2 + 0 - a \geq 0$   
 $a \leq 0$

для  $x=a$   
 $a^2 + a - a \geq 0$   
 $a^2 \geq 0$   
 $a \text{ — любое}$

для  $x=-1$   
 $(-1)^2 - 1 - a \geq 0$   
 $a \leq 0$

Найдём пересечение:



Ответ:  $(-\infty; -1) \cup (-1; 0)$





20 Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 1 и 6, либо только одну из этих цифр.

ИСТОЧНИКИ  
100: (сборник задач)  
100: (сборник задач)  
Сборник задач 2000

- а) Может ли сумма всех чисел быть равной 173?  
б) Может ли сумма всех чисел быть равной 109?  
в) Какое наибольшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 1021?

Даны числа:

1 641  
6 616  
11 661  
16 666  
61 111  
66  
111  
116  
161  
166

а) Да, например  $1+6+166=173$

б) Наибольшим из слагаемых не может быть 111 и больше, значит надо брать в сумму 109, используя

1  
6  
11  
16  
61  
66

в) Если среди слагаемых есть 66, то 109 не брать

г) Если среди слагаемых нет 66, то все оставшиеся слагаемые меньше 109. Ответ: г) нет.

Даны различные натуральные числа, запись которых содержит цифры 1 и 6, либо только одну из этих цифр.

- а) Может ли сумма всех чисел быть равной 173?  
б) Может ли сумма всех чисел быть равной 109?  
в) Какое наибольшее количество чисел могло быть, сумма которых равна 1021?

Первый способ

а) Наибольшим из чисел не может быть 1111 и больше, значит надо брать 1021, используя:

1  
6  
11  
16  
61  
66  
111  
116  
161  
166  
661  
666

б) Можно использовать только одно число, большее 600, иначе сумма превысит 1021

в) Хотит ли 3 слагаемых (или меньше трёх)?  
Даже если брать 666 и наибольшее из оставшихся чисел, то 1021 набрать не удастся  
⇒ число слагаемых  $\geq 4$

г) Хотит ли 4 слагаемых?  
 $666 + 166 + 161 + 116 = 1109$  (небедно на 88)

Изменив любое из слагаемых, мы изменим 1109 на число, кратное 5, значит 1021 никогда не получится из слагаемых  
⇒ число слагаемых  $\geq 5$

д) Хотит ли 5 слагаемых?  
 $666 + 166 + 161 + 116 + 111 = 1220$  (небедно на 109)  
Изменив любое из пяти чисел, мы изменим 1220 на число, кратное 5, значит 1021 никогда не получится из пяти слагаемых  
⇒ число слагаемых  $\geq 6$

е) Хотит ли 6 слагаемых?  
 $666 + 166 + 161 + 116 + 66 = 1286$  (небедно на 265)

Почему, что 6 слагаемых может быть и это наименьшее возможное количество слагаемых:

Пример:  
 $666 + 161 + 116 + 66 + 11 + 1 = 1021$

Ответ: 6

Второй способ

а) Все слагаемые, которые можно использовать, при делении на 5 дают остаток 1

б) 1021 при делении на 5 тоже даёт остаток 1

в) 1 слагаемое использовать нельзя, т.к. 1021 не делится на 5  
2 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 2  
3 слагаемых дадут сумму, которая при делении на 5 даёт остаток 3  
4  
5  
6

⇒ число слагаемых  $\geq 6$   
Приведём пример для 6 слагаемых:  $666 + 161 + 116 + 66 + 11 + 1 = 1021$   
Ответ: 6

| Содержание критерия                                                                                | Баллы |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------|
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в                                              | 4     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б    | 3     |
| Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в | 2     |
| Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б                                                  | 1     |
| Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше                                | 0     |
| Максимальный балл                                                                                  | 4     |