

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ 2025-26

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Профиль «Робототехника»

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит решить теоретические задачи.

Время выполнения заданий теоретического тура 3 часа (180 минут).

Вам предлагаются 13 задач, из которых 9 задач с номерами от 09-01 до 09-09 являются общими, а 4 задачи с номерами от 09-10 до 09-13 являются специализированными.

Специализированные задачи имеют следующие специализации: Гуманоидная робототехника, Летательная робототехника, Манипуляторы и Колёсная робототехника.

Для того, чтобы выполнить полностью задания теоретического тура и набрать максимальный балл, вам необходимо решить все 13 задач.

Решения задач вы должны оформить на листах с индивидуальным кодом.

Ответы на задачи должны быть внесены в Бланк Ответов с индивидуальным кодом.

В Бланк Ответов вносятся только целые числа без указания размерности. Если в решении у вас получилось дробное число в ответе, то его нужно округлить по математическим правилам округления. В бланке ответов не должно быть никаких посторонних надписей или пометок или подписей. Ответы в бланке ответов должны быть без исправлений и подчисток. Если в процессе заполнения бланка ответов произошла ошибка, то вам следует заново заполнить бланк начисто. Бланк с ошибкой должен быть перечёркнут по диагонали и передан сотруднику оргкомитета олимпиады для уничтожения. При заполнении бланка ответов каждая цифра должна быть вписана в отдельное поле. Число ответа, состоящее из одной или нескольких цифр должно быть вписано в поля ответа начиная с самого левого поля. Если вы не смогли решить задачу или не приступали к решению задачи, то поля ответа для этих задач должны оставаться пустыми. Внизу под ответами необходимо вписать контрольную сумму. Контрольная сумма – это целочисленное число, которое является суммой всех ответов.

Пример вычисления контрольной суммы:

- допустим, что это есть ответы на выполненные задачи: 10, 3, 1000, 45, 13
- вычисление контрольной суммы: $10 + 3 + 1000 + 45 + 13 = 1071$
- в поле для контрольной суммы вносим число 1071.

Выполнение теоретических задач целесообразно организовать следующим образом:

- постарайтесь сначала решить лёгкие задачи, которые оцениваются в 1 балл и только затем приступайте к более сложным.

– после выполнения всех предложенных заданий еще раз удостоверьтесь в правильности выбранных Вами ответов и решений.

- Перед заполнением бланка ответов выпишите числа ответов и контрольной суммы в черновике и только затем переносите цифры в бланк ответов.

Предупреждаем Вас, что:

- оценка за каждую задачу может быть только одна. За правильный ответ выставляется оценка равная числу баллов, указанному в условиях задач. За неправильный ответ выставляется оценка 0. Выставление оценок за частично выполненное решение не предусмотрено.

- каждый ответ должен быть подтверждён решением, записанным в бланке решений.

- оценка за задачу может быть снижена до нуля, если решение не соответствует ответу или решения в бланке решений нет.

Задание теоретического тура считается выполненным, если Вы вовремя сдаете его членам жюри.

Решения задач должны быть записаны на бланке решений. Ответ на бланке решений должен совпадать с ответом на бланке ответов. В случае отсутствия решения на бланке решений ваш ответ за задачу может быть аннулирован.

Максимальная оценка за тур – 30 баллов.

Задача номер	баллы
09-01	1
09-02	1
09-03	3
09-04	5
09-05	3
09-06	3
09-07	3
09-08	6
09-09	1
09-10	1
09-11	1
09-12	1
09-13	1
сумма	30

Общие задачи

Задача 09-01. Компьютерное зрение. 1 балл.

Условие:

На орбите вокруг Земли становится все больше космического мусора. Большую опасность представляют маленькие объекты размером от 1 до 10 см, поскольку их много, но при этом они все еще могут пробить обшивку корабля, поскольку движутся с первой космической скоростью, которую в этой задаче мы будем считать равной 8 км/с. Представьте, что вы проектируете лазерную установку, которая должна разрушать и частично испарять частицы космического мусора. Для этого нужно (после обнаружения) давать очень точно локализованный кратковременный импульс с поверхности Земли в космос. В рамках первого прототипа лазер может светить только вверх. Какое расстояние успеет частица космического мусора пройти за время появления луча, если она находится на орбите высотой 300 км? Скорость света считать равной 300000 км/с. Ответ записать в метрах.

Задача 09-02. Компьютерное зрение. 1 балл.

Условие:

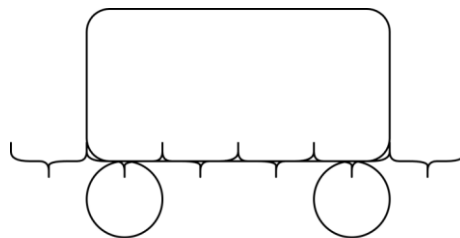
Вы находитесь на экваторе в ночное время. Погода безоблачная, дует легкий ветерок. Вы направляетесь вертикально вверх камеру с горизонтальным углом обзора 10 градусов так, что верхний и нижний края кадра параллельны экватору. Разрешение камеры составляет 1000x1000 пикселей. Вы делаете кадр с выдержкой 1 минута (это время, в течение которого свет, попадающий на матрицу, фиксируется в виде сигнала). На сколько пикселей растянется след от одной звезды, если считать ее точечным источником?

В ответ надо записать длину следа от одной звезды в пикселях.

Задача 09-03. Механика. 3 балла.

Условие:

Ты проектируешь автономный катамаран для сбора данных о чистоте воды в прибрежной зоне.



Вид спереди

Исходные данные:

Конструкция катамарана:

Два поплавка. Форма поплавков: цилиндрическая, диаметр $D = 0,3$ м.

Масса робота (корпус, электроника, батареи): $m = 250$ кг.

Среда:

Плотность воды: $\rho_{\text{воды}} = 1025 \text{ кг/м}^3$. (Плотность воды может отличаться от эталонной в связи с содержанием солей и примесей)

Ускорение свободного падения: $g \approx 10 \text{ Н/кг}$.

$\pi \approx 3,14$

Для начала рассчитай объемное водоизмещение одного поплавка, необходимого для поддержания робота на плаву (плавучесть). Для простоты расчета прими, что общий погруженный в воду объем делится поровну на 2 поплавка, при этом поплавки погружены в воду полностью.

Определи длину поплавков и запиши в см с округлением до целого.

В ответ надо записать длину поплавков в см.

Задача 09-04. Механика. 5 баллов.

Ты проектируешь робота, поднимающего детали на конвейере. Робот имеет плечо, на конце которого находится захват.

Исходные данные:

- Длина плеча: $L = 300 \text{ мм}$.
- Масса захвата с грузом: $m = 0,5 \text{ кг}$.
- Максимальное ускорение захвата: $a_{\text{max}} = 50 \text{ м/с}^2$.

Привод:

- Передаточное число редуктора привода: $i = 100$.
- Момент инерции ротора двигателя: $J_{\text{рот}} = 0,0001 \text{ кг*м}^2$.

Вопрос:

Оценивая момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя, считать, что вся масса (m) сосредоточена на конце рычага длиной L .

В момент начала движения с максимальным ускорением a_{max} для подъёма детали, рассчитай динамический момент (момент сил для разгона), который должен развить двигатель на валу для обеспечения ускорения a_{max} , без учёта сил тяжести и трения.

Ответ запиши в Н*см и округли до целых.

Задача 09-05. Алгоритмы. 3 балла.

Условие:

Одномерный бинарный куб состоит из двух вершин - 0 и 1. Двумерный из четырех - 00, 01, 10, 11. Вы находитесь в некоторой вершине десятимерного куба. За один ход вы

можете перейти в вершину, кодировка которой отличается от кода текущей в одном бите. За какое минимальное число ходов можно побывать во всех вершинах этого десятимерного куба?

Задача 09-06. Алгоритмы. 3 балла.

Условие:

Робот-скат собран из идентичных модулей, расположенных в целочисленных координатах прямоугольника n на m (в одной «строке» n модулей). То есть m – это число строк, а n – это число модулей в каждой строке. Каждый модуль связан с соседом снизу и с его соседом снизу, соседом слева и его соседом слева и так далее, всего 8 связей. Модули, находящиеся у краев робота, не имеют некоторых связей. В частности, модуль, соседствующий с угловым, имеет пять связей. Из-за нехватки проводов на соревнованиях участники робототехнической команды снимают провода с этого робота и переставляют на других. Для обеспечения работоспособности всего робота в совокупности достаточно наличия пути по проводам из любого модуля в любой другой. Сколько проводов можно снять с робота, чтобы он оставался работоспособным, если $n=20$, $m=30$?

Задача 09-07. Теория управления. 3 балла.

Условие:

Гуманоидный робот делает сальто назад. Он отрывается от земли вертикально и должен приземлиться тоже вертикально, сделав один оборот. После отрыва от земли он группируется, прижимает руки и ноги к торсу, что позволяет ему уменьшать момент инерции и тем самым увеличивать угловую скорость. Система управления робота так координирует его движения, что угловая скорость линейно растет по времени от старта до достижения угла π радиан (положение вверх ногами), а затем линейно уменьшается до начального состояния.

Робот отрывается от земли с угловой скоростью $\omega_0 = \pi$ рад/с и вертикальной скоростью $V_0 = 5$ м/с. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с². Какова будет максимальная угловая скорость робота в этом полете? Округлите ответ до целых радиан в секунду.

Задача 09-08. Алгоритмы компьютерного зрения. 6 баллов.

Условие:

RANSAC (Random Sample Consensus) - итеративный алгоритм оценки параметров математической модели из данных, содержащих значительное количество выбросов. Был предложен в 1981 году Фишлером и Боллесом.

Алгоритмом RANSAC можно провести наилучшую прямую через набор точек, среди которых есть точки, появившиеся в результате наложения шума на измерения.

При реализации алгоритма следует набор точек разделить на точки, которые соответствуют критериям выбора (inliers) и на точки, которые не соответствуют критериям выбора (outliers) – как правило это и есть шум.

Дан набор измерений из следующих точек в координатной системе (X;Y):

- 1) (3;1)
- 2) (4;6)
- 3) (5;4)
- 4) (4;2)

Нужно проверить соответствие точек прямой, которая выражается формулой:

$$Y = 1.5 * X - 3$$

Для этого нужно рассчитать отклонение точки от прямой, которое равно кратчайшему расстоянию от точки до прямой. Затем надо отбросить те точки, которые имеют отклонение больше, чем среднеквадратичное отклонение, они относятся к группе outlier. Из оставшихся точек надо рассчитать среднеквадратичное отклонение точек, вошедших в группу inlier. Ответ – это среднеквадратичное отклонение точек из группы inlier от прямой, умноженное на 100 и округлённое.

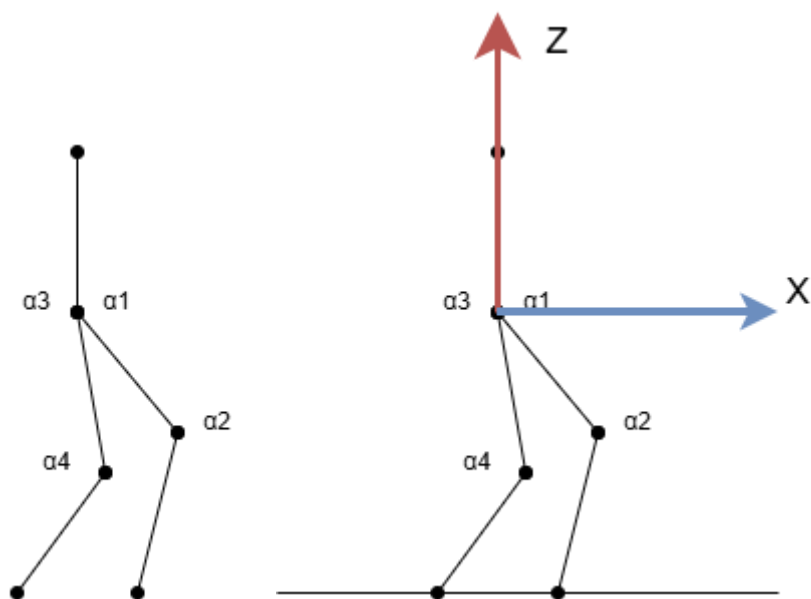
Задача 09-09. Навигация. 1 балл.

Условие:

Беспилотный наземный аппарат типа «ровер» ориентируется в пространстве с использованием системы относительного позиционирования по радиосигналу. Для этого на земле установлены четыре станции с координатами $(x, y) = (0, 0), (200, 0), (0, 200), (100, 100)$, которые излучают сигнал, синхронизированный с высокой точностью. Беспилотник измеряет расстояние до станций по задержке сигнала. Расстояние в метрах от беспилотника до станций измерено $50\sqrt{13}$, $50\sqrt{5}$, $50\sqrt{13}$ и 50 соответственно. Определите координату x беспилотника. Ответ запишите в виде числа размерностью метр.

Задача 09-10. Гуманоидная робототехника. 1 балл.

Условие:



Пятизвенный плоский шагающий гуманоидный робот – это упрощённая виртуальная модель робота, на которой удобно проверять математические и алгоритмические основы прямохождения. Робот состоит из 5 звеньев одинаковой длины равной единице. Вес робота распределен таким образом, что центр масс находится в точке соединения 3-х звеньев, когда робот выпрямлен в позу «смирно». Для упрощения вычислений следует пренебречь изменением позиции точки центра масс при изменении позы робота. Все процессы происходят в одной плоскости, поэтому ось Y отсутствует. Робот снабжен 4 сочленениями, в которых установлены вращающиеся актуаторы, позиционные углы которых обозначаются α_1 , α_2 , α_3 , α_4 . Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то робот выпрямлен в одну прямую линию, в позу «смирно», и выглядит как три последовательно соединённых отрезка. α_1 и α_2 – это позиция бедра и колена правой ноги, α_3 и α_4 – это позиция бедра и колена левой ноги. Позиции актуаторов α_1 , α_2 , α_3 , α_4 принимают положительные угловые значения, если находятся по направлению движения часовой стрелки от нуля. α_1 , α_3 могут принимать как положительные значения, так и отрицательные значения. α_2 и α_4 не могут принимать отрицательные значения. У робота есть своя система координат, которая привязана к корпусу таким образом, что пересечение осей X и Z находится в точке соединения 3-х звеньев, а ось Z параллельна верхнему звену (корпусу).

Допустим, что в определенный момент перемещения робота позиция актуатора $\alpha_1 = -30^\circ$. Робот планирует поднять левую ногу, сохраняя при этом вертикальное положение корпуса как можно дольше. Какой должна быть угловая позиция α_2 в данный момент?

Ответ записать как число с размерностью градусов.

Задача 09-11. Летательная робототехника. 1 балл.

Условие:

Вася наблюдал за беспилотником с винтом 8х6 (с диаметром 8 дюймов и шагом 6 дюймов) и бесколлекторным двигателем с максимальным током разрядки 45А и $KV = 1400$. Напряжение на борту БАС 16В. Найти скорость в м/с, на которой тяга винта будет

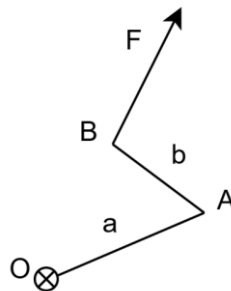
нулевой. Ответ округлить до целого значения. Моментом сопротивления винта при нулевой тяге пренебречь.

Задача 09-12. Манипуляторы. 1 балл.

Задача: "Робот-манипулятор"

Условие:

Манипулятор, состоящий из двух звеньев длины $a = 40$ см и $b = 30$ см, вращается в плоскости рисунка с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с относительно оси, проходящей через точку O . В захвате в точке B находится груз. Масса груза с захватом равна $m = 1$ кг. Найти центробежную силу, действующую на захват с грузом в момент, когда угол OAB равен $\beta = 60$ градусов. Ответ запиши в Н, округлив до целых.



Задача 09-13. Колёсная робототехника. 1 балл.

Условие:

Ты - главный инженер проекта по созданию автономного колесного робота для круглосуточного патрулирования промышленной зоны. Робот должен работать в любую погоду, объезжать препятствия и иметь большой запас хода.

Исходные данные:

Масса шасси с базовой электроникой: $m_{\text{шасси}} = 80$ кг.

Коэффициент трения качения (на асфальте): $\mu_{\text{кач}} = 0,04$.

Коэффициент лобового сопротивления: $C_x = 0,9$; площадь Миделя: $A = 1,2$ м².

Плотность воздуха: $\rho = 1,2$ кг/м³

Ускорение свободного падения: $g \approx 10$ Н/кг.

Сила аэродинамического сопротивления воздуха рассчитывается как:

$$F_{\text{возд}} = 0,5 * C_x * \rho * A * v_{\text{ср}}^2.$$

Средняя скорость патрулирования: $v_{\text{ср}} = 6$ км/ч $\approx 1,67$ м/с.

Рассчитай силу сопротивления качению $F_{\text{кач}}$ и силу аэродинамического сопротивления $F_{\text{возд}}$ при скорости патрулирования $v_{\text{ср}}$, и запиши суммарную силу сопротивления, выразив ответ в Н, округлив до целых.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ 2025-26

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

10-11 класс

Профиль «Робототехника»

Уважаемый участник олимпиады!

Вам предстоит решить теоретические задачи.

Время выполнения заданий теоретического тура 3 часа (180 минут).

Вам предлагаются 13 задач, из которых 9 задач с номерами от 10-01 до 10-09 являются общими, а 4 задачи с номерами от 10-10 до 10-13 являются специализированными.

Специализированные задачи имеют следующие специализации: Гуманоидная робототехника, Летательная робототехника, Манипуляторы и Колёсная робототехника.

Для того, чтобы выполнить полностью задания теоретического тура и набрать максимальный балл, вам необходимо решить все 13 задач.

Решения задач вы должны оформить на листах с индивидуальным кодом.

Ответы на задачи должны быть внесены в Бланк Ответов с индивидуальным кодом.

В Бланк Ответов вносятся только целые числа без указания размерности. Если в решении у вас получилось дробное число в ответе, то его нужно округлить по математическим правилам округления. В бланке ответов не должно быть никаких посторонних надписей или пометок или подписей. Ответы в бланке ответов должны быть без исправлений и подчисток. Если в процессе заполнения бланка ответов произошла ошибка, то вам следует заново заполнить бланк начисто. Бланк с ошибкой должен быть перечёркнут по диагонали и передан сотруднику оргкомитета олимпиады для уничтожения. При заполнении бланка ответов каждая цифра должна быть вписана в отдельное поле. Число ответа, состоящее из одной или нескольких цифр должно быть вписано в поля ответа начиная с самого левого поля. Если вы не смогли решить задачу или не приступали к решению задачи, то поля ответа для этих задач должны оставаться пустыми. Внизу под ответами необходимо вписать контрольную сумму. Контрольная сумма – это целочисленное число, которое является суммой всех ответов.

Пример вычисления контрольной суммы:

- допустим, что это есть ответы на выполненные задачи: 10, 3, 1000, 45, 13
- вычисление контрольной суммы: $10 + 3 + 1000 + 45 + 13 = 1071$
- в поле для контрольной суммы вносим число 1071.

Выполнение теоретических задач целесообразно организовать следующим образом:

- постарайтесь сначала решить лёгкие задачи, которые оцениваются в 1 балл и только затем приступайте к более сложным.

– после выполнения всех предложенных заданий еще раз удостоверьтесь в правильности выбранных Вами ответов и решений.

- Перед заполнением бланка ответов выпишите числа ответов и контрольной суммы в черновике и только затем переносите цифры в бланк ответов.

Предупреждаем Вас, что:

- оценка за каждую задачу может быть только одна. За правильный ответ выставляется оценка равная числу баллов, указанному в условиях задач. За неправильный ответ выставляется оценка 0. Выставление оценок за частично выполненное решение не предусмотрено.

- каждый ответ должен быть подтверждён решением, записанным в бланке решений.

- оценка за задачу может быть снижена до нуля, если решение не соответствует ответу или решения в бланке решений нет.

Задание теоретического тура считается выполненным, если Вы вовремя сдаете его членам жюри.

Решения задач должны быть записаны на бланке решений. Ответ на бланке решений должен совпадать с ответом на бланке ответов. В случае отсутствия решения на бланке решений ваш ответ за задачу может быть аннулирован.

Максимальная оценка за тур – 30 баллов.

Задача номер	баллы
10-01	5
10-02	1
10-03	2
10-04	5
10-05	3
10-06	3
10-07	3
10-08	3
10-09	1
10-10	1
10-11	1
10-12	1
10-13	1
сумма	30

Общие задачи

Задача 10-01. Навигация. 5 баллов.

Условие:

Робот оборудован лидаром и инерциальным измерительным устройством (IMU). Эта комбинация оборудования позволяет ему измерять азимуты на интересующие объекты относительно абсолютного нулевого направления на земле.

Абсолютное нулевое направление на земле совпадает с направлением положительной оси X на горизонтальной плоскости в системе координат на земле с точностью 1 градус.

Робот измерил азимуты (Yaw) двух маяков. В стандартной декартовой системе координат Yaw измеряется в градусах против часовой стрелки. Координаты и номера маяков роботу известны. По измерениям азимутов на два маяка робот может рассчитать собственную позицию на оси X .

Маяк №1: $X = 10$ м, $Y = -0.5$ м,

Маяк №2: $X = 10$ м, $Y = 0.5$ м

Размер самого маяка 0.05 м. На близком расстоянии от маяка точность измерения азимута снижается, так как размер маяка размывает точность определения азимута.

Робот движется вдоль оси X от начала координат по направлению к маякам.

Найти координату X , на которой точность определения собственной позиции наивысшая.

Ответ округлить до целых метров.

Задача 10-02. Компьютерное зрение. 1 балл.

Условие:

В популярной библиотеке OpenCV центр координат матрицы изображения принято размещать в левом верхнем углу. При этом положительные значения оси X направлены вправо, а положительные значения оси Y направлены вниз. Параметрическое представление прямой на изображении состоит из двух величин (ρ, θ) : θ – theta – [тетта] – выражается в радианах и обозначает угол наклона нормали к линии. Нормаль – это отрезок, который перпендикулярен к линии и один конец которого находится в центре координат, а другой находится на линии. 0 радиан – это вертикальная линия, $\pi/2$ радиан – это горизонтальная линия. Углы θ исчисляются от положительной оси X по часовой стрелке.

ρ – rho – [ро] – расстояние от начала координат до ближайшей точки на линии или длина нормали.

$\rho > 0$, если нормаль находится справа от оси Y ,

$\rho < 0$, если нормаль находится слева от оси Y

Матрица изображения размерами в пикселях $(w, h) = (640, 480)$, где w — это ширина, h — это высота матрицы, состоит из бинарных пикселей. Бинарный пиксель может иметь или яркость 0 (черный цвет) или яркость 1 (белый цвет).

На черной бинарной матрице изображения белыми пикселями проведен растровый отрезок, который является частью линии с параметрами $(350, \pi/4)$. Растровый отрезок — это отрезок толщиной в один пиксель, в котором каждый пиксель соседствует со следующим пикселем или по вертикали, или по горизонтали или по диагонали. Из скольких белых пикселей состоит отрезок?

Задача 10-03. Механика. 2 балла.

Условие

Ты проектируешь робота, поднимающего детали на конвейере. Робот имеет плечо, на конце которого находится захват.

Исходные данные:

- Длина плеча: $L = 300$ мм.
- Масса захвата с грузом: $m = 0,5$ кг.
- Максимальное ускорение захвата: $a_{\max} = 50$ м/с².

Привод:

- Передаточное число редуктора привода: $i = 100$.
- Момент инерции ротора двигателя: $J_{\text{рот}} = 0,0001$ кг*м².

Вопрос:

Оценивая момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя, считать, что вся масса (m) сосредоточена на конце рычага длиной L .

В момент начала движения с максимальным ускорением $a_{\max}$ для подъёма детали, рассчитай динамический момент (момент сил для разгона), который должен развить двигатель на валу для обеспечения ускорения $a_{\max}$, без учёта сил тяжести и трения. Ответ запиши в Н*см и округли до целых.

Задача 10-04. Механика. 5 баллов.

Условие:

Ты проектируешь автономного колесного робота для механической прополки междурядий на поле с овощными культурами (например, морковью). Робот отличает культурное растение от сорняка и удаляет сорняк, срезая его стебель.

Исходные данные

- Сорняк:

Диаметр стебля сорняка у земли: $d_{\text{сорн}} = 0,005$ м.

- Робот:

Рабочий орган: вращающийся бритвенный диск (фреза) диаметром $D_{\text{фр}} = 0,12$ м.

- Механика удаления сорняка:

Для срезания сорняка фрезой требуется усилие резания на один стебель: $F_{\text{рез}} = 2 \text{ Н}$.

Рассмотри следующий режим срезания сорняка фрезой.

1. Рассчитай окружную скорость $v_{\text{окр}}$ фрезы, необходимую для того, чтобы обеспечить время взаимодействия лопасти со стеблем сорняка $t_{\text{вз}} = 0,005 \text{ с}$ (для чистого среза). Найди частоту вращения ω .

2. Рассчитай момент сопротивления $M_{\text{сопр}}$ на валу фрезы при одновременном срезании $N=3$ сорняков, считая, что сила $F_{\text{рез}}$ приложена на радиусе $R_{\text{фр}} = D_{\text{фр}} / 2$.

Оцени мощность на валу фрезы. Ответ запиши в Вт и округли до целых.

Задача 10-05. Алгоритмы. 3 балла.

Условие

Одномерный бинарный куб состоит из двух вершин - 0 и 1. Двумерный из четырех - 00, 01, 10, 11. Вы находитесь в некоторой вершине десятимерного куба. За один ход вы можете перейти в вершину, кодировка которой отличается от кода текущей в одном бите. За какое минимальное число ходов можно побывать во всех вершинах этого десятимерного куба?

Задача 10-06. Алгоритмы. 3 балла.

В этой задаче нумерация в массиве с нуля.

В алгоритмах есть понятие префиксной суммы. Для массива $a [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ это массив $p = [0, a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n]$. Такой массив позволяет находить суммы элементов с k -го по m -й за одну операцию вычитания:

$$a_k + a_{k+1} + \dots + a_m = p_{m+1} - p_k$$

Обобщите префиксные суммы на двумерные массивы.

Предположим, что в практической задаче возникла необходимость искать среднее значение яркости в части изображения. Изображения FullHD (1920x1080), часть изображения, в которой нужно найти среднее, всегда в двадцать раз меньше полного по каждой оси.

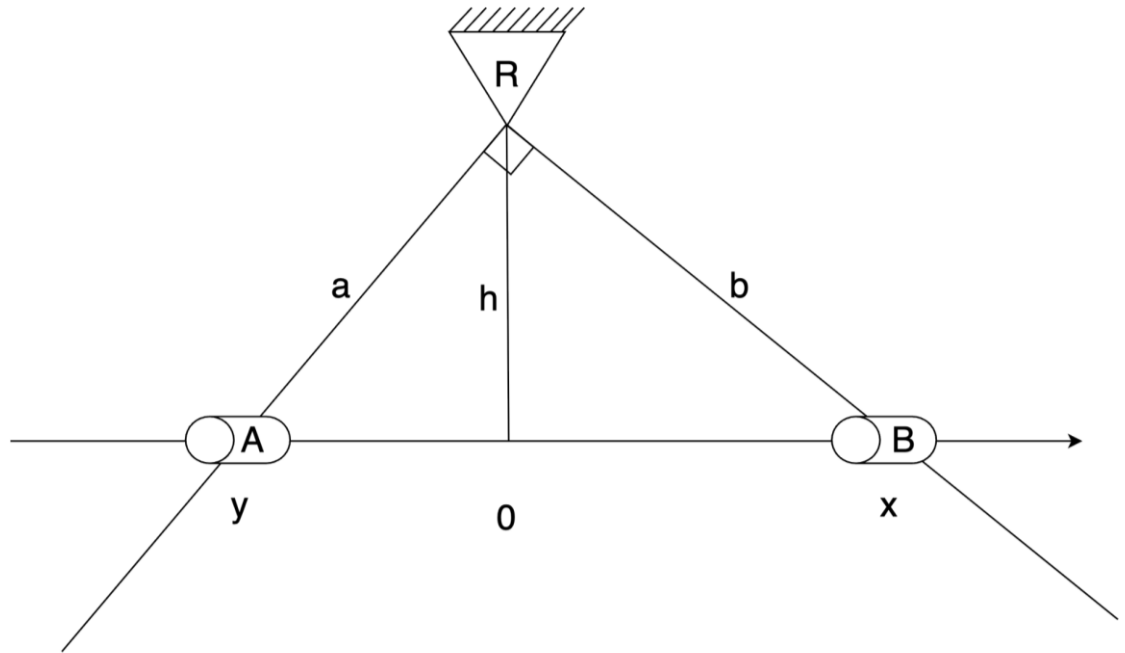
Есть два варианта, как можно действовать. Первый вариант – просто считать сумму в двойном цикле, а затем разделить на число пикселей. Второй вариант – посчитать массив префиксных сумм, а затем использовать более быстрый вариант нахождения суммы, после чего тоже разделить на число пикселей. Второй вариант имеет смысл использовать, когда нужно многократно находить средние. Найдите минимальное число операций поиска среднего, при котором использование второго подхода приведет к меньшему числу операций работы с массивами.

Операцией с массивом считается запись в ячейку или считывание из ячейки.

Задача 10-07. Теория управления. 3 балла.

Условие

Рассмотрим следующую механическую систему



Горизонтальная направляющая, обозначенная стрелкой вправо, неподвижна в лабораторной системе отсчета, как и крепление R. Втулки A и B свободно скользят по направляющей. Угол между AR и BR всегда составляет 90 градусов, то есть ARB – это прямоугольный треугольник в каждый момент времени.

Пусть моментальная длина RA равна a , моментальная длина RB равна b .

На направляющей нанесены сантиметровые отметки, в точке 0 стоит отметка 0, ось направлена вправо, высота h составляет 40 см.

Точка A начинает движение вправо из координаты -200 со скоростью 10 см/с и движется в течение 15 секунд. Какой путь преодолеет точка B?

Задача 10-08. Алгоритмы компьютерного зрения. 3 балла.

Условие

RANSAC (Random Sample Consensus) – итеративный алгоритм оценки параметров математической модели из данных, содержащих значительное количество выбросов. Был предложен в 1981 году Фишлером и Боллесом.

Алгоритмом RANSAC можно провести наилучшую прямую через набор точек, среди которых есть точки, появившиеся в результате наложения шума на измерения.

При реализации алгоритма следует набор точек разделить на точки, которые соответствуют критериям выбора (inliers) и на точки, которые не соответствуют критериям выбора (outliers) – как правило это и есть шум.

Дан набор измерений из следующих точек в координатной системе (X;Y):

- 1) (3;1)
- 2) (4;6)
- 3) (5;4)
- 4) (4;2)

Нужно проверить соответствие точек прямой, которая выражается формулой:

$$Y = 1.5 * X - 3$$

Для этого нужно рассчитать отклонение точки от прямой, которое равно кратчайшему расстоянию от точки до прямой. Затем надо отбросить те точки, которые имеют отклонение больше, чем среднеквадратичное отклонение, они относятся к группе outlier. Из оставшихся точек надо рассчитать среднеквадратичное отклонение точек, вошедших в группу inlier. Ответ – это среднеквадратичное отклонение точек из группы inlier от прямой, умноженное на 100 и округлённое.

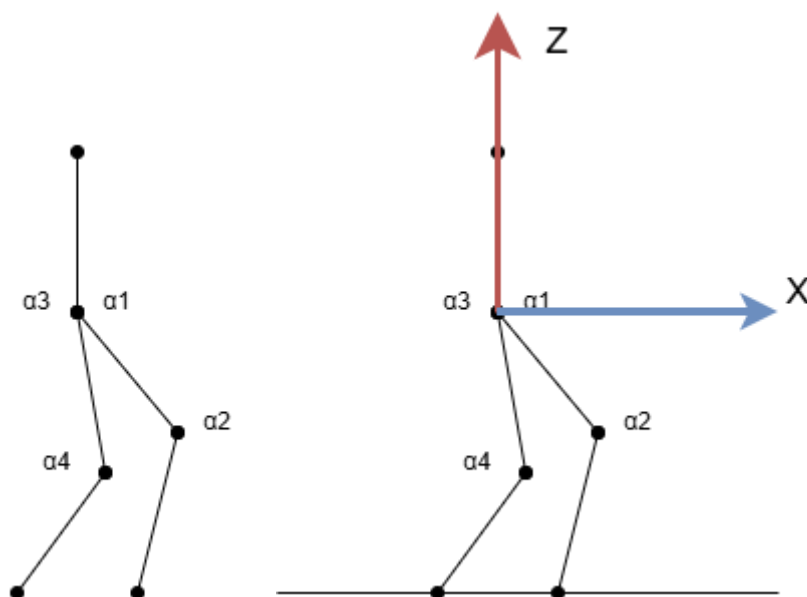
Задача 10-09. Навигация. 1 балл.

Ровер с лидаром едет из точки (0, 0) в точку (50, 50) по кратчайшему пути со скоростью 5 м/с. Лидар фиксирует расстояние и направление положения объектов. Находясь в точке (0,0) лидар, зафиксировал объект на расстоянии $50\sqrt{2}$ по направлению движения ровера, также известно, что начальная скорость зафиксированного объекта была 0 м/с и движется он по вертикальной оси с постоянным ускорением. В точке (25, 25) ровер повторно зафиксировал объект, угол между направлением движения ровера и направления на объект φ ,

$$\text{tg}(\pi/4 - \varphi) = 0.5$$

Найти ускорение неопознанного летающего объекта, ответ записать в м/с^2 . Координаты даны в метрах

Задача 10-10. Гуманоидная робототехника. 1 балл.



Пятизвенный плоский шагающий гуманоидный робот – это упрощённая виртуальная модель робота, на которой удобно проверять математические и алгоритмические основы прямохождения. Робот состоит из 5 звеньев одинаковой длины равной единице. Вес робота распределен таким образом, что центр масс находится в точке соединения 3-х звеньев, когда робот выпрямлен в позу «смирно». Для упрощения вычислений следует пренебречь изменением позиции точки центра масс при изменении позы робота. Все процессы происходят в одной плоскости, поэтому ось Y отсутствует. Робот снабжен 4 сочленениями, в которых установлены вращающиеся актуаторы, позиционные углы которых обозначаются α_1 , α_2 , α_3 , α_4 . Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то робот выпрямлен в одну прямую линию, в позу «смирно», и выглядит как три последовательно соединённых отрезка. α_1 и α_2 – это позиция бедра и колена правой ноги, α_3 и α_4 – это позиция бедра и колена левой ноги. Позиции актуаторов α_1 , α_2 , α_3 , α_4 принимают положительные угловые значения, если находятся по направлению движения часовой стрелки от нуля. α_1 , α_3 могут принимать как положительные значения, так и отрицательные значения. α_2 и α_4 не могут принимать отрицательные значения. У робота есть своя система координат, которая привязана к корпусу таким образом, что пересечение осей X и Z находится в точке соединения 3-х звеньев, а ось Z параллельна верхнему звену (корпусу).

Правая стопа робота должна занять точку с координатами $x = 0,7$; $z = -0,6$.

Какой угол должен принять α_1 ? Ответ округлить до целых градусов и умножить на -1.

Задача 10-11. Летательная робототехника. 1 балл.

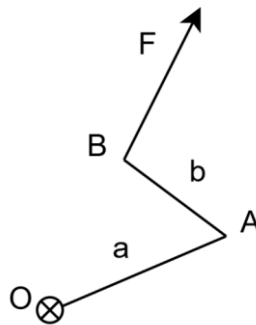
Сопротивление у беспилотных летательных аппаратов самолётного типа складывается из двух основных составляющих: сопротивления трения (X_0) и индуктивного сопротивления, возникающего из-за подъёмной силы (коэффициент индуктивного сопротивления выражается формулой $C_{xi} = C_y^2 / (\pi * \lambda)$). Определите на какой скорости должен лететь беспилотник в горизонтальном полёте, чтобы достичь максимального аэродинамического качества, определяемого как отношение подъёмной силы ($Y = C_y * (\rho v)^2 / 2$) к силе сопротивления ($X = C_x * (\rho v)^2 / 2$). Где C_x и C_y безразмерные коэффициенты силы

сопротивления и подъёмной силы. Известно, что самолёт имеет массу 10 кг, плотность воздуха на высоте полёта 1.3 кг/м^3 , крыло имеет площадь 0.03 м^2 , удлинение $\lambda=12$, а коэффициент сопротивления трения $C_{x0} = 0.02$. Выразите скорость в м/с и округлить до целых, g принять за 10 м/с^2 , $\pi=3.14$

Задача 10-12. Манипуляторы. 1 балл.

Условие:

Манипулятор, состоящий из двух звеньев длины $a = 40 \text{ см}$ и $b = 30 \text{ см}$, вращается в плоскости рисунка с постоянной угловой скоростью $\omega = 2 \text{ рад/с}$ относительно оси, проходящей через точку O . В захвате в точке B находится груз. Масса груза с захватом равна $m = 1 \text{ кг}$. На захват с грузом действует центробежная сила. Найти минимальный момент сил в приводе в точке A , необходимый для удержания груза с захватом, если угол OAB равен $\beta = 60$ градусов. Ответ вырази в Н*м, округлив до целых.



Задача 10-13. Колёсная робототехника. 1 балл.

Условие:

Ты – главный инженер проекта по созданию автономного колесного робота для круглосуточного патрулирования промышленной зоны. Робот должен работать в любую погоду, объезжать препятствия и иметь большой запас хода.

Исходные данные:

Масса шасси с базовой электроникой: $m_{\text{шасси}} = 80 \text{ кг}$.

Коэффициент трения качения (на асфальте): $\mu_{\text{кач}} = 0,04$.

Коэффициент лобового сопротивления: $C_x = 0,9$; площадь Миделя: $A = 1,2 \text{ м}^2$

Плотность воздуха: $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$

Ускорение свободного падения: $g \approx 10 \text{ Н/кг}$.

Сила аэродинамического сопротивления воздуха рассчитывается как:

$$F_{\text{возд}} = 0,5 * C_x * \rho * A * v_{\text{ср}}^2.$$

Средняя скорость патрулирования: $v_{\text{ср}} = 6 \text{ км/ч} \approx 1,67 \text{ м/с}$.

Рассчитай силу сопротивления качению $F_{\text{кач}}$ и силу аэродинамического сопротивления $F_{\text{возд}}$ при скорости патрулирования $v_{\text{ср}}$, и найди суммарную силу сопротивления.

Рассчитай и запиши в ответе минимальную механическую мощность на колесах $P_{\text{мех}}$, необходимую для движения по асфальту с постоянной скоростью $v_{\text{ср}}$. Ответ вырази в Вт, округлив до целых.

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ 2025-26

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

9 класс

Профиль «Робототехника»

Ответы, Решения, ключи и методика оценивания.

По теоретическому туру максимальная оценка результатов участника 9 класса определяется арифметической суммой всех баллов, полученных за выполнение заданий и не должна превышать 30 баллов. Каждый ответ оценивается либо как правильный (полностью совпадает с ключом - ответом), либо как неправильный (отличается от ключа или отсутствует). Каждый правильный ответ имеет свой вес: 1 балла, 3 балла, 5 баллов, 6 баллов.

Ответы и оценка задач:

Задача	Ответ - ключ	Оценка
09-01	8	1
09-02	25	1
09-03	173	3
09-04	174	5
09-05	1023	3
09-06	1651	3
09-07	9	3
09-08	39	6
09-09	150	1
09-10	60	1
09-11	57	1
09-12	1	1
09-13	34	1

Участник должен внести ответы в бланк ответов и должен внести решения задач в странички, маркированные кодом работы. Каждая решенная задача должна иметь как ответ, так и решение. При наличии правильного ответа в бланке ответов, но отсутствия решения или если в странице с решением ответ отличается от ответа в бланке ответов, оценка за задачу должна быть снижена до нуля баллов.

Задачи

Задача 09-01. Компьютерное зрение. 1 балл.

Условие:

На орбите вокруг Земли становится все больше космического мусора. Большую опасность представляют маленькие объекты размером от 1 до 10 см, поскольку их много, но при этом они все еще могут пробить обшивку корабля, поскольку движутся с первой космической скоростью, которую в этой задаче мы будем считать равной 8 км/с. Представьте, что вы проектируете лазерную установку, которая должна разрушать и частично испарять

частицы космического мусора. Для этого нужно (после обнаружения) давать очень точно локализованный кратковременный импульс с поверхности Земли в космос. В рамках первого прототипа лазер может светить только вверх. Какое расстояние успеет частица космического мусора пройти за время появления луча, если она находится на орбите высотой 300 км? Скорость света считать равной 300000 км/с. Ответ записать в метрах.

Решение:

$$t = 300 / 300000 = 0,001 \text{ с}$$

$$s = t * v_{\text{орб}} = 0,001 * 8000 = 8 \text{ м}$$

Ответ: 8

Задача 09-02. Компьютерное зрение. 1 балл.

Условие:

Вы находитесь на экваторе в ночное время. Погода безоблачная, дует легкий ветерок. Вы направляетесь вертикально вверх камеру с горизонтальным углом обзора 10 градусов так, что верхний и нижний края кадра параллельны экватору. Разрешение камеры составляет 1000x1000 пикселей. Вы делаете кадр с выдержкой 1 минута (это время, в течение которого свет, попадающий на матрицу, фиксируется в виде сигнала). На сколько пикселей растянется след от одной звезды, если считать ее точечным источником?

В ответ надо записать длину следа от одной звезды в пикселях.

Решение: Угловая скорость вращения Земли составляет $360/24 = 15$ градусов в час, или градус за 4 минуты, или 0,25 градуса в минуту. Для такой камеры на один пиксель приходится $10 / 1000 = 0,01$ градуса.

$$0,25 / 0,01 = 25$$

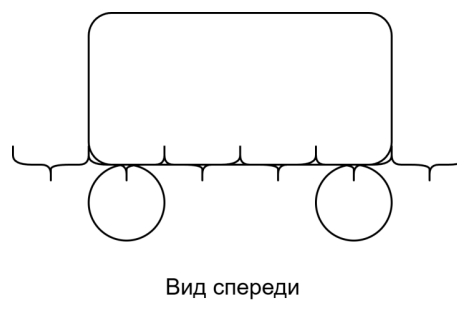
Таким образом, след от звезды будет иметь длину в 25 пикселей.

Ответ: 25

Задача 09-03. Механика. 3 балла.

Условие:

Ты проектируешь автономный катамаран для сбора данных о чистоте воды в прибрежной зоне.



Исходные данные:

Конструкция катамарана:

Два поплавка. Форма поплавков: цилиндрическая, диаметр $D = 0,3$ м.

Масса робота (корпус, электроника, батареи): $m = 250$ кг.

Среда:

Плотность воды: $\rho_{\text{воды}} = 1025$ кг/м³. (Плотность воды может отличаться от эталонной в связи с содержанием солей и примесей).

Ускорение свободного падения: $g \approx 10$ Н/кг.

$\pi \approx 3,14$

Для начала рассчитай объемное водоизмещение одного поплавка, необходимого для поддержания робота на плаву (плавучесть). Для простоты расчета прими, что общий погруженный в воду объем делится поровну на 2 поплавка, при этом поплавки погружены в воду полностью.

Определи длину поплавков и запиши в см с округлением до целого.

В ответ надо записать длину поплавков в см.

Ответ: **173**

Решение:

Дано:

$m = 250$ кг

$\rho_{\text{воды}} = 1025$ кг/м³

$D = 0,3$ м

$g \approx 10$ Н/кг

$\pi \approx 3,14$

Водоизмещение и погруженный объем:

Вес робота: $F_{\text{тяж}} = m * g = 250 \text{ кг} * 10 \text{ Н/кг} = 2500 \text{ Н}$.

Сила Архимеда должна быть равна весу: $F_A = \rho_{\text{воды}} * g * V_{\text{погр}} = 2500 \text{ Н}$.

Общий погруженный объем: $V_{\text{погр}} = F_A / (\rho_{\text{воды}} * g) = 2500 / (1025 * 10) \approx 0,2439 \text{ м}^3$.

$V_{\text{погр}} = 0,2439 \text{ м}^3$ делится поровну на 2 поплавка:

$V_{1\text{погр}} = V_{\text{погр}} / 2 = 0,122 \text{ м}^3$.

Площадь сечения поплавка: $S_{\text{сеч}} = \pi * D^2 / 4 \approx 3,14 * 0,09 / 4 \approx 0,0707 \text{ м}^2$

Длина поплавка:

$L_{\text{попл}} = V_{1\text{погр}} / S_{\text{сеч}} = 0,122 / 0,0707 \approx 1,7256 \text{ м}$.

В см с округлением до целого: $L_{\text{попл}} \approx 173 \text{ см}$

Задача 09-04. Механика. 5 баллов.

Условие

Ты проектируешь робота, поднимающего детали на конвейере. Робот имеет плечо, на конце которого находится захват.

Исходные данные:

- Длина плеча: $L = 300$ мм.
- Масса захвата с грузом: $m = 0,5$ кг.
- Максимальное ускорение захвата: $a_{\text{max}} = 50$ м/с².

Привод:

- Передаточное число редуктора привода: $i = 100$.
- Момент инерции ротора двигателя: $J_{\text{рот}} = 0,0001$ кг*м².

Вопрос:

Оценивая момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя, считать, что вся масса (m) сосредоточена на конце рычага длиной L .

В момент начала движения с максимальным ускорением a_{max} для подъёма детали, рассчитай динамический момент (момент сил для разгона), который должен развить двигатель на валу для обеспечения ускорения a_{max} , без учёта сил тяжести и трения. Ответ запиши в Н*см и округли до целых.

Ответ: **174**

Решение

Дано:

$$m = 0,5 \text{ кг}$$

$$a_{\text{max}} = 50 \text{ м/с}^2$$

$$L = 0,3 \text{ м}$$

$$i = 100$$

$$J_{\text{рот}} = 0,0001 \text{ кг*м}^2$$

- Момент инерции нагрузки, приведённый к валу двигателя:

Считаем, что масса m закреплена на конце рычага длиной L . Момент инерции этой массы относительно оси привода (оси «плеча»):

$$J_{\text{нагр}} = m * L^2 = 0,5 \text{ кг} * (0,3 \text{ м})^2 = 0,5 * 0,09 = 0,045 \text{ кг*м}^2.$$

Этот момент инерции приведён к оси вращения рычага. Чтобы привести его к валу двигателя, который вращается в i раз быстрее, нужно разделить на квадрат передаточного числа:

$$J_{\text{прив}} = J_{\text{нагр}} / i^2 = 0,045 \text{ кг*м}^2 / (100^2) = 0,045 / 10000 = 0,0000045 \text{ кг*м}^2.$$

- Динамический момент на валу двигателя:

Угловое ускорение вала двигателя $\epsilon_{\text{дв}}$ связано с линейным ускорением $a_{\text{мах}}$ и длиной рычага L : $a_{\text{мах}} = \epsilon_{\text{рыч}} * L$, где $\epsilon_{\text{рыч}}$ - угловое ускорение рычага.

$$\epsilon_{\text{рыч}} = a_{\text{мах}} / L = 50 / 0,3 \approx 166,7 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение вала двигателя в i раз больше:

$$\epsilon_{\text{дв}} = \epsilon_{\text{рыч}} * i = 166,7 * 100 = 16670 \text{ рад/с}^2.$$

Полный момент инерции на валу двигателя:

$$J_{\text{полн}} = J_{\text{рот}} + J_{\text{прив}} = 0,0001 + 0,0000045 \approx 0,0001045 \text{ кг*м}^2.$$

Динамический момент (момент для разгона инерции):

$$M_{\text{дин}} = J_{\text{полн}} * \epsilon_{\text{дв}} = 0,0001045 \text{ кг*м}^2 * 16670 \text{ рад/с}^2 \approx 1,74 \text{ Н*м}.$$

Если выразить в Н*см, то получим $\approx 174 \text{ Н*см}$.

Отдельный вопрос:

Момент инерции приведен к оси вращения рычага. Чтобы привести его к валу двигателя, который вращается в i раз быстрее, нужно разделить на квадрат передаточного числа: $J_{\text{прив}} = J_{\text{нагр}} / (i^2)$. Пояснить, почему нужно делить на квадрат i ?

Ответ:

Это классическое правило приведения моментов инерции, и оно напрямую вытекает из закона сохранения энергии и кинематической связи.

Вот простое пояснение.

1. Исходные данные

Представим, что у вас есть двигатель, который вращается со скоростью $\omega_{\text{дв}}$, и рычаг (нагрузка), который вращается со скоростью $\omega_{\text{нагр}}$. Передаточное число i в данном случае показывает, во сколько раз быстрее вращается двигатель:

$$\omega_{\text{дв}} = i * \omega_{\text{нагр}}$$

(где $i > 1$, если это редуктор, понижающий обороты нагрузки).

2. Кинетическая энергия системы

Кинетическая энергия вращающейся нагрузки (рычага) равна:

$$E_{\text{нагр}} = J_{\text{нагр}} * \omega_{\text{нагр}}^2 / 2$$

Кинетическая энергия, которую «чувствует» двигатель (приведенная), должна быть такой же, как если бы нагрузка сидела прямо на валу двигателя, но с другой инерцией $J_{\text{прив}}$:

$$E_{\text{прив}} = J_{\text{прив}} * \omega_{\text{дв}}^2 / 2$$

3. Приравниваем энергии

Физический смысл приведения заключается в том, что реальная кинетическая энергия механизма равна кинетической энергии приведенной массы, вращающейся со скоростью

вала двигателя. Потери энергии в идеальной передаче отсутствуют (в данном выводе мы рассматриваем только инерционность, без учета КПД).

$$J_{\text{прив}} * \omega_{\text{дв}}^2 / 2 = J_{\text{нагр}} * \omega_{\text{нагр}}^2 / 2$$

Сокращаем $1/2$ и подставляем $\omega_{\text{нагр}} = \omega_{\text{дв}}/i$:

$$J_{\text{прив}} * \omega_{\text{дв}}^2 = J_{\text{нагр}} * (\omega_{\text{дв}}/i)^2$$

$$J_{\text{прив}} * \omega_{\text{дв}}^2 = J_{\text{нагр}} * \omega_{\text{дв}}^2 / i^2$$

Сокращаем $\omega_{\text{дв}}^2$:

$$J_{\text{прив}} = J_{\text{нагр}} / i^2$$

Задача 09-05. Алгоритмы. 3 балла.

Условие

Одномерный бинарный куб состоит из двух вершин - 0 и 1. Двумерный из четырех - 00, 01, 10, 11. Вы находитесь в некоторой вершине десятимерного куба. За один ход вы можете перейти в вершину, кодировка которой отличается от кода текущей в одном бите. За какое минимальное число ходов можно побывать во всех вершинах этого десятимерного куба?

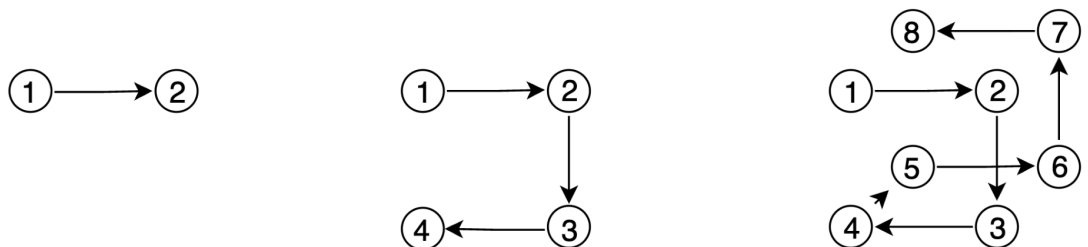
Решение

Куб размерности $d = 1$ (одномерный) обходится за $2^1 - 1 = 1$ ход.

Куб размерности $k+1$ обходится следующим образом. Обходим его подкуб размерности k , у всех вершин которого в кодировке первым символом стоит 0, потом за один ход переходим в другой подкуб (кодировка всех вершин которого начинается с 1) и делаем обход в обратную сторону. Если для обхода куба размерности k нужно A ходов, для обхода куба размерности $k+1$ нужно $2A + 1$ действий.

Поскольку для одномерного нужно 1 действие, для k -мерного нужно $2^k - 1$.

Таким образом, ответ задачи $2^{10} - 1 = 1023$.



Ответ: 1023

Задача 09-06. Алгоритмы. 3 балла.

Условие

Робот-скат собран из идентичных модулей, расположенных в целочисленных координатах прямоугольника n на m (в одной «строке» n модулей). То есть m – это число строк, а n – это число модулей в каждой строке. Каждый модуль связан с соседом снизу и с его соседом слева и его соседом слева и так далее, всего 8 связей. Модули, находящиеся у краев робота, не имеют некоторых связей. В частности, модуль, соседствующий с угловым, имеет пять связей. Из-за нехватки проводов на соревнованиях участники робототехнической команды снимают провода с этого робота и переставляют на других. Для обеспечения работоспособности всего робота в совокупности достаточно наличия пути по проводам из любого модуля в любой другой. Сколько проводов можно снять с робота, чтобы он оставался работоспособным, если $n=20$, $m=30$?

Решение

У тех модулей, которые находятся на расстоянии строго больше 1 от любой границы, по 8 связей, всего это $(n-4)(m-4) * 8$ связей.

Над прямоугольником $(n-4)(m-4)$, под ним, слева и справа от него находятся ряды чисел 6 и 7, если просуммировать их, получится $(n-4 + m-4) * 2 * (7 + 6)$ связей. Наконец, в работе есть 4 угла по 20 связей

4	5	6	6	6	6	...
5	6	7	7	7	7	...
6	7	8	8	8	8	...
6	7	8	8	8	8	...
6	7	8	8	8	8	...
6	7	8	8	8	8	...
...	...	...	...	...	...	...

У провода два конца, так что общее количество проводов равно

$$((n-4)(m-4) * 8 + (n-4 + m-4) * 2 * (7 + 6) + 4 * 20) / 2 = (n-4)(m-4) * 4 + (n-4 + m-4) * (7 + 6) + 40$$

Для $n = 20$, $m = 30$ это $16 * 26 * 4 + 42 * 13 + 40 = 2250$

Для того, чтобы робот из $20*30 = 600$ модулей оставался связным, достаточно 599 проводов. Таким образом, можно снять $2250 - 599 = 1651$ провод.

Ответ: 1651

Задача 09-07. Теория управления. 3 балла.

Условие

Гуманоидный робот делает сальто назад. Он отрывается от земли вертикально и должен приземлиться тоже вертикально, сделав один оборот. После отрыва от земли он группируется, прижимает руки и ноги к торсу, что позволяет ему уменьшать момент инерции и тем самым увеличивать угловую скорость. Система управления робота так координирует его движения, что угловая скорость линейно растет по времени от старта до достижения угла π радиан (положение вверх ногами), а затем линейно уменьшается до начального состояния.

Робот отрывается от земли с угловой скоростью $\omega_0 = \pi$ рад/с и вертикальной скоростью $V_0 = 5$ м/с. Ускорение свободного падения считать равным $g = 10$ м/с². Какова будет максимальная угловая скорость робота в этом полете? Округлите ответ до целых радиан в секунду.

Решение

Время разгона угловой скорости равно времени достижения максимальной высоты в прыжке. Максимальная высота достигается тогда, когда линейная вертикальная скорость робота равна нулю. Время достижения нулевой вертикальной скорости равно:

$$T = V_0 / g = 0.5 \text{ с}$$

Так как угловая скорость изменяется линейно, то средняя угловая скорость равна средней арифметической начальной и максимальной угловой скорости.

$$\omega_{\text{ср}} = (\omega_0 + \omega_{\text{max}}) / 2$$

$$\omega_{\text{ср}} = \pi / T$$

$$\omega_{\text{max}} = 2 * \omega_{\text{ср}} - \omega_0 = 2 * \pi / T - \pi \text{ рад/с} = 3 * \pi \text{ рад/с} \approx 9 \text{ рад/с}$$

Ответ: 9

Задача 09-08. Алгоритмы компьютерного зрения. 6 баллов.

Условие

RANSAC (Random Sample Consensus) - итеративный алгоритм оценки параметров математической модели из данных, содержащих значительное количество выбросов. Был предложен в 1981 году Фишлером и Боллесом.

Алгоритмом RANSAC можно провести наилучшую прямую через набор точек, среди которых есть точки, появившиеся в результате наложения шума на измерения.

При реализации алгоритма следует набор точек разделить на точки, которые соответствуют критериям выбора (inliers) и на точки, которые не соответствуют критериям выбора (outliers) – как правило это и есть шум.

Дан набор измерений из следующих точек в координатной системе (X;Y):

- 1) (3;1)
- 2) (4;6)
- 3) (5;4)
- 4) (4;2)

Нужно проверить соответствие точек прямой, которая выражается формулой:

$$Y = 1.5 * X - 3$$

Для этого нужно рассчитать отклонение точки от прямой, которое равно кратчайшему расстоянию от точки до прямой. Затем надо отбросить те точки, которые имеют отклонение больше, чем среднеквадратичное отклонение, они относятся к группе outlier. Из оставшихся точек надо рассчитать среднеквадратичное отклонение точек, вошедших в группу inlier. Ответ – это среднеквадратичное отклонение точек из группы inlier от прямой, умноженное на 100 и округлённое.

Решение

Формула расчета кратчайшего расстояния от точки (x,y) до прямой $y = ax + b$:

$$d = \frac{|ax - y + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

итого имеем для точек:

$$d1 = \frac{|1.5*3 - 1 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 0.5 / 1.8 \sim 0.278$$

$$d2 = \frac{|1.5*4 - 6 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 3 / 1.8 \sim 1.667$$

$$d3 = \frac{|1.5*5 - 4 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 0.5 / 1.8 \sim 0.278$$

$$d4 = \frac{|1.5*4 - 2 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 1 / 1.8 \sim 0.556$$

среднеквадратичное отклонение

$$D_0 = \sqrt{\frac{(d1^2 + d2^2 + d3^2 + d4^2)}{4}} \sim 0.9$$

Видно, что вторая точка попала в outliers, остальные в группе inliers.

Считаем среднеквадратичное отклонение inliers:

$$D_0 = \sqrt{\frac{(d_1^2 + d_3^2 + d_4^2)}{3}} \sim 0.393$$

Ответ: 39

Задача 09-09. Навигация. 1 балл.

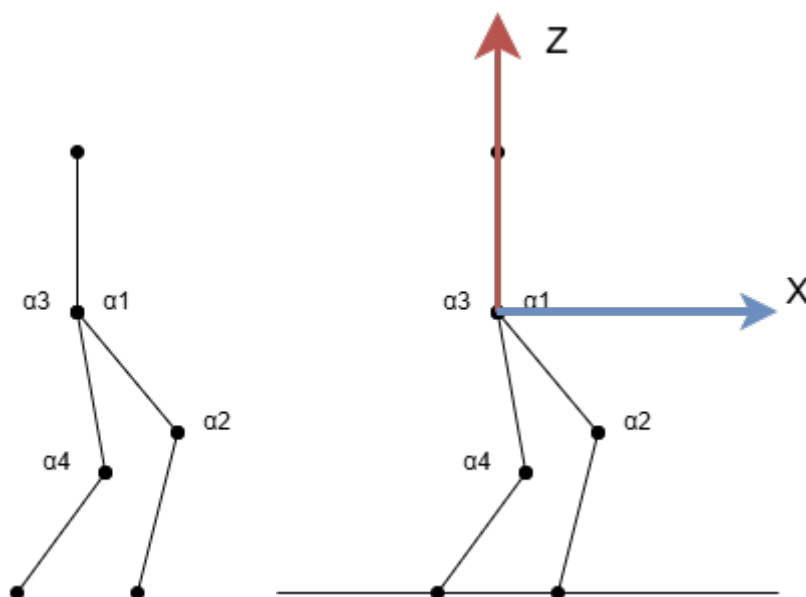
Беспилотный наземный аппарат типа «ровер» ориентируется в пространстве с использованием системы относительного позиционирования по радиосигналу. Для этого на земле установлены четыре станции с координатами $(x, y) = (0, 0), (200, 0), (0, 200), (100, 100)$, которые излучают сигнал, синхронизированный с высокой точностью. Беспилотник измеряет расстояние до станций по задержке сигнала. Расстояние в метрах от беспилотника до станций измерено $50\sqrt{13}$, $50\sqrt{5}$, $50\sqrt{13}$ и 50 соответственно. Определите координату x беспилотника. Ответ запишите в виде числа размерностью метр.

Решение:

Для определения координаты беспилотника на плоскости достаточно измерений до 3-х станций. Т.к. расстояние от $(0, 0)$ и $(0, 200)$ до беспилотника одинаковое, то приходим к выводу, что координата $y = 100$. Осталось вычислить x . Обратим внимание на станцию $(100, 100)$, расстояние до нее 50, и она также стоит на $y = 100$. Тогда x равен либо 50, либо 150. 50 не может быть, т.к. тогда расстояние до станции $(200, 0)$ не будет $50\sqrt{5}$. Получается $x = 150$.

Ответ: 150

Задача 09-10. Гуманоидная робототехника. 1 балл.



Пятизвенный плоский шагающий гуманоидный робот – это упрощённая виртуальная модель робота, на которой удобно проверять математические и алгоритмические основы прямохождения. Робот состоит из 5 звеньев одинаковой длины равной единице. Вес робота распределен таким образом, что центр масс находится в точке соединения 3-х звеньев, когда робот выпрямлен в позу «смирно». Для упрощения вычислений следует пренебречь изменением позиции точки центра масс при изменении позы робота. Все процессы происходят в одной плоскости, поэтому ось Y отсутствует. Робот снабжен 4 сочленениями, в которых установлены вращающиеся актуаторы, позиционные углы которых обозначаются $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$. Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то робот выпрямлен в одну прямую линию, в позу «смирно», и выглядит как три последовательно соединённых отрезка. α_1 и α_2 – это позиция бедра и колена правой ноги, α_3 и α_4 – это позиция бедра и колена левой ноги. Позиции актуаторов $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ принимают положительные угловые значения, если находятся по направлению движения часовой стрелки от нуля. α_1, α_3 могут принимать как положительные значения, так и отрицательные значения. α_2 и α_4 не могут принимать отрицательные значения. У робота есть своя система координат, которая привязана к корпусу таким образом, что пересечение осей X и Z находится в точке соединения 3-х звеньев, а ось Z параллельна верхнему звену (корпусу).

Допустим, что в определенный момент перемещения робота позиция актуатора $\alpha_1 = -30^\circ$. Робот планирует поднять левую ногу, сохраняя при этом вертикальное положение корпуса как можно дольше. Какой должна быть угловая позиция α_2 в данный момент?

Ответ записать как число с размерностью градусов.

Ответ: 60

Решение:

Бедро и голень представляют из себя равнобедренный треугольник, у которого основание – это линия, соединяющая тазобедренный сустав со стопой. Для равновесия эта линия должна быть вертикальной. Поскольку задача – это сохранение корпуса в вертикальном положении, то эта линия должна быть продолжением линии корпуса.

В этом случае угол у основания треугольника равен $-\alpha_1$.

Угол у вершины треугольника равен $180 - 2 * (-\alpha_1)$.

$$\alpha_2 = 2 * (-\alpha_1) = 2 * 30^\circ = 60^\circ$$

Задача 09-11. Летательная робототехника. 1 балл.

Вася наблюдал за беспилотником с винтом 8х6 (с диаметром 8 дюймов и шагом 6 дюймов) и бесколлекторным двигателем с максимальным током разрядки 45А и $KV = 1400$. Напряжение на борту БАС 16В. Найти скорость в м/с, на которой тяга винта будет нулевой. Ответ округлить до целого значения. Моментом сопротивления винта при нулевой тяге пренебречь.

Справочно:

$$1 \text{ дюйм} = 2,54 \text{ см}$$

Шаг – это расстояние, которое винт проходит в воздушной среде за 1 оборот при нулевой тяге.

KV – коэффициент, обозначающий количество оборотов бесколлекторного двигателя в минуту по отношению к 1 поданному вольту напряжения без нагрузки.

Решение:

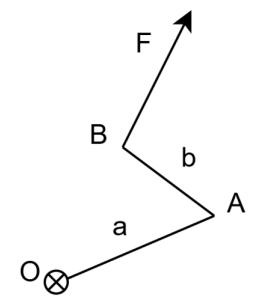
- 1) Определяем частоту вращения двигателя. Умножаем KV на напряжение и делим на 60, получаем величину в Герцах. $KV \cdot U / 60$
- 2) Переводим 6 дюймов в метры, получаем $R = 0,1524$ метров.
- 3) Для получения ответа умножаем полученную в пункте (1) частоту на шаг $v = R \cdot KV \cdot U / 60 = 0,1524 \cdot 1400 \cdot 16 / 60 = 56,896 = 57$.

Ответ: 57

Задача 09-12. Манипуляторы. 1 балл.

Условие:

Манипулятор, состоящий из двух звеньев длины $a = 40$ см и $b = 30$ см, вращается в плоскости рисунка с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с относительно оси, проходящей через точку O. В захвате в точке B находится груз. Масса груза с захватом равна $m = 1$ кг. Найти центробежную силу, действующую на захват с грузом в момент, когда угол OAB равен $\beta = 60$ градусов. Ответ запиши в Н, округлив до целых.



Ответ: 144

Решение:

Формула для центробежной силы: $F = m \cdot \omega^2 \cdot R$.

Найдем $R = OB$ из теоремы косинусов для треугольника:

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2 \cdot a \cdot b \cdot \cos \beta = 40^2 + 30^2 - 2 \cdot 40 \cdot 30 \cdot \cos 60 = 1300 \text{ см}^2.$$

$$R = \sqrt{1300} \approx 36,05 \text{ см} \approx 0,36 \text{ м}.$$

$$\text{Центробежная сила: } F = m \cdot \omega^2 \cdot R \approx 1 \cdot 2^2 \cdot 0,36 \approx 1,4422 \text{ Н}.$$

После округления до целых, получим: $F \approx 1 \text{ Н}$.

Задача 09-13. Колёсная робототехника. 1 балл.

Условие:

Ты - главный инженер проекта по созданию автономного колесного робота для круглосуточного патрулирования промышленной зоны. Робот должен работать в любую погоду, объезжать препятствия и иметь большой запас хода.

Исходные данные:

Масса шасси с базовой электроникой: $m_{\text{шасси}} = 80$ кг.

Коэффициент трения качения (на асфальте): $\mu_{\text{кач}} = 0,04$.

Коэффициент лобового сопротивления: $C_x = 0,9$; площадь Миделя: $A = 1,2$ м².

Плотность воздуха: $\rho = 1,2$ кг/м³

Ускорение свободного падения: $g \approx 10$ Н/кг.

Сила аэродинамического сопротивления воздуха рассчитывается как:

$$F_{\text{возд}} = 0,5 * C_x * \rho * A * v_{\text{ср}}^2.$$

Средняя скорость патрулирования: $v_{\text{ср}} = 6$ км/ч $\approx 1,67$ м/с.

Рассчитай силу сопротивления качению $F_{\text{кач}}$ и силу аэродинамического сопротивления $F_{\text{возд}}$ при скорости патрулирования $v_{\text{ср}}$, и запиши суммарную силу сопротивления, записав ответ в Н, округлив до целых.

Ответ: 34

Решение:

Дано:

$$m_{\text{шасси}} = 80 \text{ кг}$$

$$v_{\text{ср}} = 1,67 \text{ м/с}$$

$$\mu_{\text{кач}} = 0,04$$

$$C_x = 0,9, A = 1,2 \text{ м}^2, \rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$$

$$g \approx 10 \text{ Н/кг}$$

Силы сопротивления:

$$F_{\text{кач}} = \mu_{\text{кач}} * m * g = 0,04 * 80 \text{ кг} * 10 \text{ Н/кг} = 32 \text{ Н.}$$

$$F_{\text{возд}} = 0,5 * C_x * \rho * A * v_{\text{ср}}^2 = 0,5 * 0,9 * 1,2 * 1,2 * (1,67)^2 \approx 0,5 * 0,9 * 1,2 * 1,2 * 2,79 \approx 1,81 \text{ Н.}$$

$$\text{Суммарная сила сопротивления (на асфальте): } F_{\text{сум}} = 32 + 1,81 \approx 33,8 \text{ Н.}$$

$$\text{После округления до целых: } F_{\text{сум}} \approx 34 \text{ Н.}$$

ВСЕРОССИЙСКАЯ ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ ПО ИНФОРМАТИКЕ 2025-26

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ТУР

10-11 класс

Профиль «Робототехника»

Ответы, Решения, ключи и методика оценивания.

По теоретическому туру максимальная оценка результатов участника 10 и 11 класса определяется арифметической суммой всех баллов, полученных за выполнение заданий и не должна превышать 40 баллов. Задачи для 10 и 11 классов одинаковые. Каждый ответ оценивается либо как правильный (полностью совпадает с ключом - ответом), либо как неправильный (отличается от ключа или отсутствует). Каждый правильный ответ имеет свой вес: 2 балла, 4 балла, 7 баллов.

В общей части даны следующие задачи:

Задача	Ответ - ключ	Оценка
10-01	7	5
10-02	480	1
10-03	174	2
10-04	6	5
10-05	1023	3
10-06	401	3
10-07	24	3
10-08	39	3
10-09	0	1
10-10	112	1
10-11	12	1
10-12	0	1
10-13	56	1

Участник должен внести ответы в бланк ответов и должен внести решения задач в странички, маркированные кодом работы. Каждая решенная задача должна иметь как ответ, так и решение. При наличии правильного ответа в бланке ответов, но отсутствия решения или если в странице с решением ответ отличается от ответа в бланке ответов, оценка за задачу может быть аннулирована.

Общие задачи

Задача 10-01. Навигация. 5 баллов.

Условие:

Робот оборудован лидаром и инерциальным измерительным устройством (IMU). Эта комбинация оборудования позволяет ему измерять азимуты на интересующие объекты относительно абсолютного нулевого направления на земле.

Абсолютное нулевое направление на земле совпадает с направлением положительной оси X на горизонтальной плоскости в системе координат на земле с точностью 1 градус.

Робот измерил азимуты (Yaw) двух маяков. В стандартной декартовой системе координат Yaw измеряется в градусах против часовой стрелки. Координаты и номера маяков роботу известны. По измерениям азимутов на два маяка робот может рассчитать собственную позицию на оси X.

Маяк №1: $X = 10$ м, $Y = -0.5$ м,

Маяк №2: $X = 10$ м, $Y = 0.5$ м

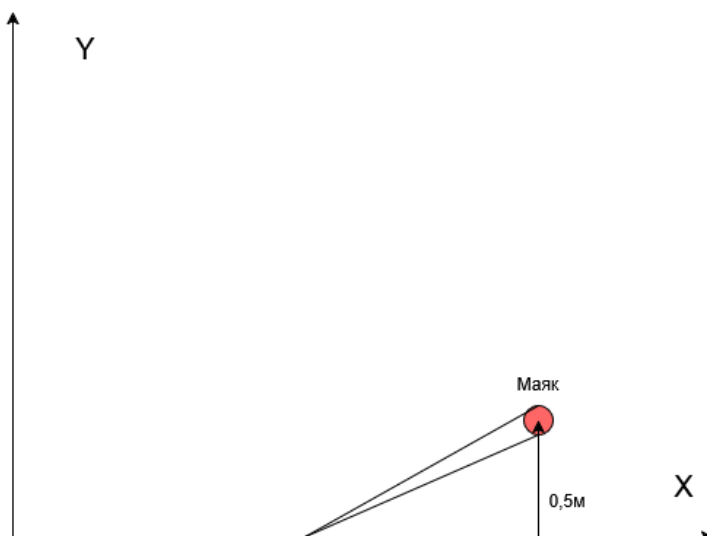
Размер самого маяка 0.05 м. На близком расстоянии от маяка точность измерения азимута снижается, так как размер маяка размывает точность определения азимута.

Робот движется вдоль оси X от начала координат по направлению к маякам.

Найти координату X, на которой точность определения собственной позиции наивысшая.

Ответ округлить до целых метров.

Решение:



1 градус = 0,017 радиан

При движении робота от начала координат точность определения собственной координаты X растёт, так как абсолютная величина азимута растёт.

Если L – расстояние до маяка, а α – азимут, то

$$L * \sin \alpha = 0,5$$

$$L = 0,5 / \sin \alpha$$

$$\Delta L = 0,5 * (1 / \sin(\alpha) - 1 / \sin(\alpha + 0,017)) = 0,5 * (2 * \sin(0,017/2) * \cos(\alpha + 0,017/2) / (\sin(\alpha) * \sin(\alpha + 0,017))) \sim K * \cos(\alpha) / \sin^2(\alpha)$$

Таким образом погрешность измерения расстояния до маяка уменьшается по мере роста величины $\sin \alpha$.

Однако при приближении к маякам растёт угловой размер маяка $\sim 0,05 / L$, а также погрешность, связанная с размытием азимута.

Наивысшая точность получается в точке, где угловой размер маяка становится равен погрешности измерения азимута.

$$0,05 / L = 0,017$$

$$L = 0,05 / 0,017 = 2,94 \text{ м}$$

L – гипотенуза треугольника, в которой один из катетов равен 0,5 м

Второй катет треугольника равен $\sqrt{L^2 - 0,5^2} = 2,9 \text{ м}$

Координата X в этой точке равна $10 - 2,9 = 7,1 \text{ м}$

Ответ: 7

Задача 10-02. Компьютерное зрение. 1 балл.

Условие:

В популярной библиотеке OpenCV центр координат матрицы изображения принято размещать в левом верхнем углу. При этом положительные значения оси X направлены вправо, а положительные значения оси Y направлены вниз. Параметрическое представление прямой на изображении состоит из двух величин (ρ, θ) : θ – theta – [тетта] – выражается в радианах и обозначает угол наклона нормали к линии. Нормаль – это отрезок, который перпендикулярен к линии и один конец которого находится в центре координат, а другой находится на линии. 0 радиан – это вертикальная линия, $\pi/2$ радиан – это горизонтальная линия. Углы θ исчисляются от положительной оси X по часовой стрелке.

ρ – rho – [ро] – расстояние от начала координат до ближайшей точки на линии или длина нормали.

$\rho > 0$, если нормаль находится справа от оси Y ,

$\rho < 0$, если нормаль находится слева от оси Y

Матрица изображения размерами в пикселях $(w, h) = (640, 480)$, где w – это ширина, h – это высота матрицы, состоит из бинарных пикселей. Бинарный пиксель может иметь или яркость 0 (черный цвет) или яркость 1 (белый цвет).

На черной бинарной матрице изображения белыми пикселями проведен растровый отрезок, который является частью линии с параметрами $(350, \pi/4)$. Растровый отрезок – это отрезок толщиной в один пиксель, в котором каждый пиксель

соседствует со следующим пикселем или по вертикали, или по горизонтали или по диагонали. Из скольких белых пикселей состоит отрезок?

Решение:

Линия пересекает ось X в точке, где $x = 350 * \sqrt{2} = 495$

Линия пересекает ось Y в точке, где $y = 350 * \sqrt{2} = 495$.

Поскольку $495 > 480$, то общая высота отрезка равна 480, так же, как и ширина. То есть отрезок состоит из пикселей, которые соединены друг с другом по диагонали. Число пикселей равно максимуму между шириной и высотой. Итого 480.

Ответ: 480

Задача 10-03. Механика. 2 балла.

Условие

Ты проектируешь робота, поднимающего детали на конвейере. Робот имеет плечо, на конце которого находится захват.

Исходные данные:

- Длина плеча: $L = 300$ мм.
- Масса захвата с грузом: $m = 0,5$ кг.
- Максимальное ускорение захвата: $a_{\max} = 50$ м/с².

Привод:

- Передаточное число редуктора привода: $i = 100$.
- Момент инерции ротора двигателя: $J_{\text{рот}} = 0,0001$ кг*м².

Вопрос:

Оценивая момент инерции нагрузки, приведенный к валу двигателя, считать, что вся масса (m) сосредоточена на конце рычага длиной L .

В момент начала движения с максимальным ускорением $a_{\max}$ для подъёма детали, рассчитай динамический момент (момент сил для разгона), который должен развить двигатель на валу для обеспечения ускорения $a_{\max}$, без учёта сил тяжести и трения.

Ответ запиши в Н*см и округли до целых.

Ответ: 174

Решение

Дано:

$$m = 0,5 \text{ кг}$$

$$a_{\max} = 50 \text{ м/с}^2$$

$$L = 0,3 \text{ м}$$

$$i = 100$$

$$J_{\text{рот}} = 0,0001 \text{ кг*м}^2$$

- Момент инерции нагрузки, приведённый к валу двигателя:

Считаем, что масса m закреплена на конце рычага длиной L . Момент инерции этой массы относительно оси привода (оси "плеча"):

$$J_{\text{нагр}} = m * L^2 = 0,5 \text{ кг} * (0,3 \text{ м})^2 = 0,5 * 0,09 = 0,045 \text{ кг*м}^2.$$

Этот момент инерции приведён к оси вращения рычага. Чтобы привести его к валу двигателя, который вращается в i раз быстрее, нужно разделить на квадрат передаточного числа:

$$J_{\text{прив}} = J_{\text{нагр}} / i^2 = 0,045 \text{ кг*м}^2 / (100^2) = 0,045 / 10000 = 0,0000045 \text{ кг*м}^2.$$

- Динамический момент на валу двигателя:

Угловое ускорение вала двигателя $\varepsilon_{\text{дв}}$ связано с линейным ускорением $a_{\text{тах}}$ и длиной рычага L : $a_{\text{тах}} = \varepsilon_{\text{рыч}} * L$, где $\varepsilon_{\text{рыч}}$ — угловое ускорение рычага.

$$\varepsilon_{\text{рыч}} = a_{\text{тах}} / L = 50 / 0,3 \approx 166,7 \text{ рад/с}^2.$$

Угловое ускорение вала двигателя в i раз больше:

$$\varepsilon_{\text{дв}} = \varepsilon_{\text{рыч}} * i = 166,7 * 100 = 16670 \text{ рад/с}^2.$$

Полный момент инерции на валу двигателя:

$$J_{\text{полн}} = J_{\text{рот}} + J_{\text{прив}} = 0,0001 + 0,0000045 \approx 0,0001045 \text{ кг*м}^2.$$

Динамический момент (момент для разгона инерции):

$$M_{\text{дин}} = J_{\text{полн}} * \varepsilon_{\text{дв}} = 0,0001045 \text{ кг*м}^2 * 16670 \text{ рад/с}^2 \approx 1,74 \text{ Н*м}.$$

Если выразить в Н*см, то получим $\approx 174 \text{ Н*см}$.

Задача 10-04. Механика. 5 баллов.

Условие:

Ты проектируешь автономного колесного робота для механической прополки междурядий на поле с овощными культурами (например, морковью). Робот отличает культурное растение от сорняка и удаляет сорняк, срезая его стебель.

Исходные данные

- Сорняк:

Диаметр стебля сорняка у земли: $d_{\text{сорн}} = 0,005 \text{ м}$.

- Робот:

Рабочий орган: вращающийся бритвенный диск (фреза) диаметром $D_{\text{фр}} = 0,12 \text{ м}$.

- Механика удаления сорняка:

Для срезания сорняка фрезой требуется усилие резания на один стебель: $F_{\text{рез}} = 2 \text{ Н}$.

Рассмотри следующий режим срезания сорняка фрезой.

1. Рассчитай окружную скорость $v_{\text{окр}}$ фрезы, необходимую для того, чтобы обеспечить время взаимодействия лопасти со стеблем сорняка $t_{\text{вз}} = 0,005 \text{ с}$ (для чистого среза).

Найди частоту вращения ω .

2. Рассчитай момент сопротивления $M_{\text{сопр}}$ на валу фрезы при одновременном срезании $N=3$ сорняков, считая, что сила $F_{\text{рез}}$ приложена на радиусе $R_{\text{фр}} = D_{\text{фр}} / 2$.

Оцени мощность на валу фрезы. Ответ запиши в Вт и округли до целых.

Ответ: 6

Решение:

Дано:

$$D_{\text{фр}} = 0,12 \text{ м} \rightarrow R_{\text{фр}} = 0,06 \text{ м}$$

$$t_{\text{вз}} = 0,005 \text{ с}$$

$$F_{\text{рез}} = 2 \text{ Н}$$

$$N = 3$$

$$d_{\text{сорн}} = 0,005 \text{ м}$$

Окружная скорость и частота вращения:

Чтобы лопасть прошла путь, равный толщине стебля $d_{\text{сорн}}$, за время $t_{\text{вз}}$, нужна скорость: $v_{\text{окр}} = d_{\text{сорн}} / t_{\text{вз}} = 0,005 \text{ м} / 0,005 \text{ с} = 1 \text{ м/с}$.

$$v_{\text{окр}} = \omega * R_{\text{фр}}$$

Частота вращения:

$$\omega = v_{\text{окр}} / R_{\text{фр}} = 1 / 0,06 \approx 16,67 \text{ рад/с}.$$

Момент сопротивления:

$$\text{Момент от срезания одного сорняка: } M_1 = F_{\text{рез}} * R_{\text{фр}} = 2 \text{ Н} * 0,06 \text{ м} = 0,12 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

$$\text{При одновременной работе с 3 сорняками: } M_{\text{сопр}} = N * M_1 = 3 * 0,12 = 0,36 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Мощность:

$$\text{Механическая мощность на фрезе: } P_{\text{фр}} = M_{\text{сопр}} * \omega = 0,36 \text{ Н}\cdot\text{м} * 16,67 \text{ рад/с} \approx 6 \text{ Вт}.$$

Задача 10-05. Алгоритмы. 3 балла.

Условие

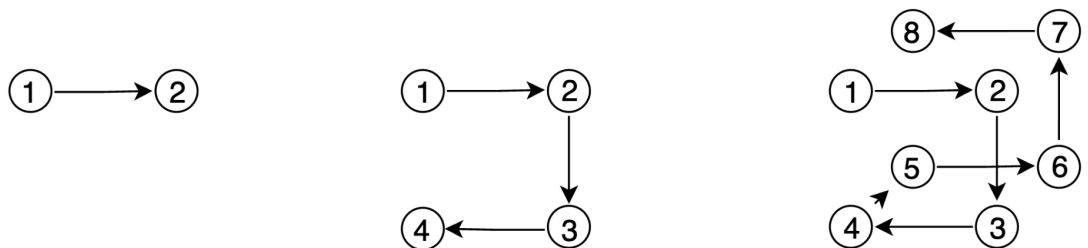
Одномерный бинарный куб состоит из двух вершин - 0 и 1. Двумерный из четырех - 00, 01, 10, 11. Вы находитесь в некоторой вершине десятимерного куба. За один ход вы можете перейти в вершину, кодировка которой отличается от кода текущей в одном бите. За какое минимальное число ходов можно побывать во всех вершинах этого десятимерного куба?

Решение

Куб размерности $d = 1$ (одномерный) обходится за $2^1 - 1 = 1$ ход.

Куб размерности $k+1$ обходится следующим образом. Обходим его подкуб размерности k , у всех вершин которого в кодировке первым символом стоит 0, потом за один ход переходим в другой подкуб (кодировка всех вершин которого начинается с 1) и делаем обход в обратную сторону. Если для обхода куба размерности k нужно A ходов, для обхода куба размерности $k+1$ нужно $2D + 1$ действий.

Поскольку для одномерного нужно 1 действие, для k -мерного нужно $2^k - 1$. Таким образом, ответ задачи $2^{10} - 1 = 1023$.



Ответ: 1023

Задача 10-06. Алгоритмы. 3 балла.

В этой задаче нумерация в массиве с нуля.

В алгоритмах есть понятие префиксной суммы. Для массива $a [a_1, a_2, a_3, \dots, a_n]$ это массив $p = [0, a_1, a_1+a_2, a_1+a_2+a_3, \dots, a_1 + \dots + a_n]$. Такой массив позволяет находить суммы элементов с k -го по m -й за одну операцию вычитания:

$$a_k + a_{k+1} + \dots + a_m = p_{m+1} - p_k$$

Обобщите префиксные суммы на двумерные массивы.

Предположим, что в практической задаче возникла необходимость искать среднее значение яркости в части изображения. Изображения FullHD (1920x1080), часть изображения, в которой нужно найти среднее, всегда в двадцать раз меньше полного по каждой оси.

Есть два варианта, как можно действовать. Первый вариант – просто считать сумму в двойном цикле, а затем разделить на число пикселей. Второй вариант – посчитать массив префиксных сумм, а затем использовать более быстрый вариант нахождения суммы, после чего тоже разделить на число пикселей. Второй вариант имеет смысл использовать, когда нужно многократно находить средние. Найдите минимальное число операций поиска среднего, при котором использование второго подхода приведет к меньшему числу операций работы с массивами.

Операцией с массивом считается запись в ячейку или считывание из ячейки.

Решение:

n – число запросов.

Первый вариант = $n * 96 * 54$

Второй вариант = $1921 * 1081 + n * 4$

Нужно найти минимальное такое n , что $n * 96 * 54 > 1921 * 1081 + n * 4$

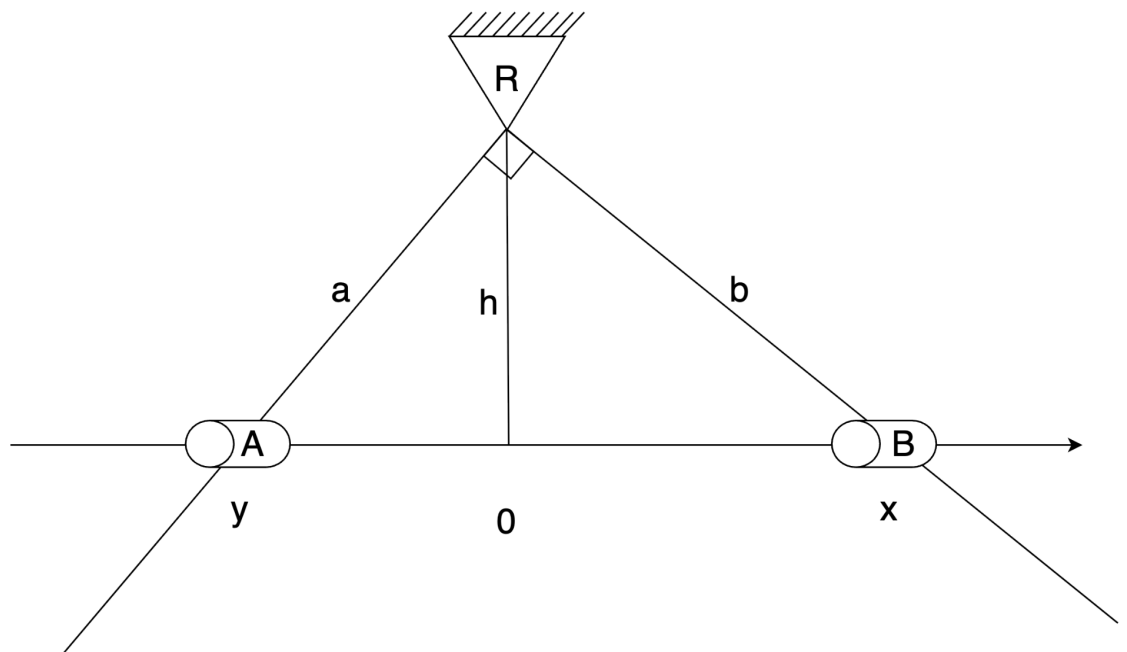
Это 401

Ответ: 401

Задача 10-07. Теория управления. 3 балла.

Условие

Рассмотрим следующую механическую систему



Горизонтальная направляющая, обозначенная стрелкой вправо, неподвижна в лабораторной системе отсчета, как и крепление R. Втулки A и B свободно скользят по направляющей. Угол между AR и BR всегда составляет 90 градусов, то есть ARB – это прямоугольный треугольник в каждый момент времени.

Пусть моментальная длина RA равна a , моментальная длина RB равна b .

На направляющей нанесены сантиметровые отметки, в точке 0 стоит отметка 0, ось направлена вправо, высота h составляет 40 см.

Точка A начинает движение вправо из координаты -200 со скоростью 10 см/с и движется в течение 15 секунд. Какой путь преодолеет точка B?

Решение

Покажем, что эта система реализует обращение числа, то есть $x = \frac{c}{y}$ для некоторой константы C .

Обозначим RA как a , RB как b .

- a. по теореме Пифагора $x - y = \sqrt{a^2 - b^2}$
- b. по теореме Пифагора $b^2 = h^2 + x^2$
- c. Из подобия треугольников BAR и BR0

$$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{b}{h}$$

и как следствие $\sqrt{a^2 - b^2} = \frac{ab}{h}$

- d. Из подобия треугольников BR0 и RA0

$$\frac{b}{x} = \frac{a}{h}$$

и как следствие $a = \frac{bh}{x}$

Выразим y через x .

$$y = x - \sqrt{a^2 - b^2} = x - \frac{ab}{h} = x - \frac{hb^2}{hx} = x - \frac{b^2}{x} = x - \frac{h^2 + x^2}{x} = x - \frac{h^2}{x} - x = -\frac{h^2}{x}$$

Следовательно, $x = -\frac{h^2}{x}$

Начальное значение x равно $-1600 / (-200) = 8$

Конечное значение y равно $-200 + 10 * 15 = -50$

Конечное значение x равно $-1600 / (-50) = 32$

Путь, пройденный В, равен $32 - 8 = 24$ см

Ответ: 24

Задача 10-08. Алгоритмы компьютерного зрения. 3 балла.

Условие

RANSAC (Random Sample Consensus) – итеративный алгоритм оценки параметров математической модели из данных, содержащих значительное количество выбросов. Был предложен в 1981 году Фишлером и Боллесом.

Алгоритмом RANSAC можно провести наилучшую прямую через набор точек, среди которых есть точки, появившиеся в результате наложения шума на измерения.

При реализации алгоритма следует набор точек разделить на точки, которые соответствуют критериям выбора (inliers) и на точки, которые не соответствуют критериям выбора (outliers) – как правило это и есть шум.

Дан набор измерений из следующих точек в координатной системе (X;Y):

- 1) (3;1)
- 2) (4;6)
- 3) (5;4)
- 4) (4;2)

Нужно проверить соответствие точек прямой, которая выражается формулой:

$$Y = 1.5 * X - 3$$

Для этого нужно рассчитать отклонение точки от прямой, которое равно кратчайшему расстоянию от точки до прямой. Затем надо отбросить те точки, которые имеют отклонение больше, чем среднеквадратичное отклонение, они относятся к группе outlier. Из оставшихся точек надо рассчитать среднеквадратичное отклонение точек, вошедших в группу inlier. Ответ – это среднеквадратичное отклонение точек из группы inlier от прямой, умноженное на 100 и округлённое.

Решение

Формула расчета кратчайшего расстояния от точки (x,y) до прямой $y = ax + b$:

$$d = \frac{|ax - y + b|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

итого имеем для точек:

$$d1 = \frac{|1.5*3 - 1 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 0.5 / 1.8 \sim 0.278$$

$$d2 = \frac{|1.5*4 - 6 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 3 / 1.8 \sim 1.667$$

$$d3 = \frac{|1.5*5 - 4 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 0.5 / 1.8 \sim 0.278$$

$$d4 = \frac{|1.5*4 - 2 - 3|}{\sqrt{1.5^2 + 1}} \sim 1 / 1.8 \sim 0.556$$

среднеквадратичное отклонение

$$D_0 = \sqrt{\frac{(d1^2 + d2^2 + d3^2 + d4^2)}{4}} \sim 0.9$$

Видно, что вторая точка попала в outliers, остальные в группе inliers.

Считаем среднеквадратичное отклонение inliers:

$$D_0 = \sqrt{\frac{(d1^2 + d3^2 + d4^2)}{3}} \sim 0.393$$

Ответ: 39

Задача 10-09. Навигация. 1 балл.

Рover с лидаром едет из точки (0, 0) в точку (50, 50) по кратчайшему пути со скоростью 5 м/с. Лидар фиксирует расстояние и направление положения объектов. Находясь в точке (0,0) лидар, зафиксировал объект на расстоянии $50\sqrt{2}$ по направлению движения rovera, также известно, что начальная скорость зафиксированного объекта была 0 м/с и движется он по вертикальной оси с постоянным ускорением. В точке (25, 25) rover повторно зафиксировал объект, угол между направлением движения rovera и направления на объект φ ,

$$\operatorname{tg}(\pi/4 - \varphi) = 0.5$$

Найти ускорение неопознанного летающего объекта, ответ записать в м/с². Координаты даны в метрах

Решение:

1) Для того, чтобы найти ускорение летающего объекта необходимо найти пройденное время и расстояние, чтобы воспользоваться формулой $S = at^2/2$ между первой и второй фиксацией лидаром.

2) Время будет равняться $t = 5\sqrt{2}$ т.к. была пройдена половина расстояния до конечной точки в противоположной вершине квадрата.

$$\operatorname{tg}(\pi/4 - \varphi) = 0.5$$

$$\varphi = \pi/4 - \operatorname{arctg}(0.5)$$

3) Вычисляем S. Нам известен тангенс в прямоугольном треугольнике с катетом $25\sqrt{2}$, необходимо найти второй катет.

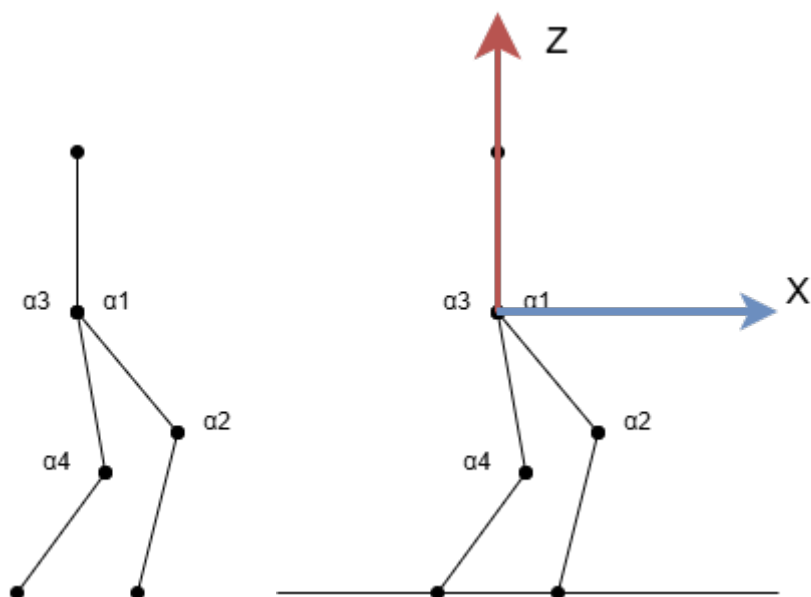
$$S = (25\sqrt{2}) * \operatorname{tg}(\pi/4 - \operatorname{arctg}(0.5)) = 25\sqrt{2} * 0,333 = 11,79$$

Получаем катет, равный 11,79 метров.

$$4) a = 2S / t^2 = 2 * 11,79 / 50 = 0,4716 \text{ м/с}^2$$

Ответ: 0

Задача 10-10. Гуманоидная робототехника. 1 балл.



Пятизвенный плоский шагающий гуманоидный робот – это упрощённая виртуальная модель робота, на которой удобно проверять математические и алгоритмические основы прямохождения. Робот состоит из 5 звеньев одинаковой длины равной единице. Вес робота распределен таким образом, что центр масс находится в точке соединения 3-х звеньев, когда робот выпрямлен в позу «смирно». Для упрощения вычислений следует пренебречь изменением позиции точки центра масс при изменении позы робота. Все процессы происходят в одной плоскости, поэтому ось Y отсутствует. Робот снабжен 4 сочленениями, в которых установлены вращающиеся актуаторы, позиционные углы которых обозначаются α_1 , α_2 , α_3 , α_4 . Если $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = 0$, то робот выпрямлен в одну прямую линию, в позу «смирно», и выглядит как три последовательно соединённых отрезка. α_1 и α_2 – это позиция бедра и колена правой ноги, α_3 и α_4 – это позиция бедра и колена левой ноги. Позиции актуаторов α_1 , α_2 , α_3 , α_4 принимают положительные угловые значения, если находятся по направлению движения часовой стрелки от нуля. α_1 , α_3 могут принимать как положительные значения, так и отрицательные значения. α_2 и α_4 не могут принимать отрицательные значения. У робота есть своя система координат, которая привязана к корпусу таким образом, что пересечение осей X и Z находится в точке соединения 3-х звеньев, а ось Z параллельна верхнему звену (корпусу).

Правая стопа робота должна занять точку с координатами $x = 0,7$; $z = -0,6$.

Какой угол должен принять α_1 ? Ответ округлить до целых градусов и умножить на -1.

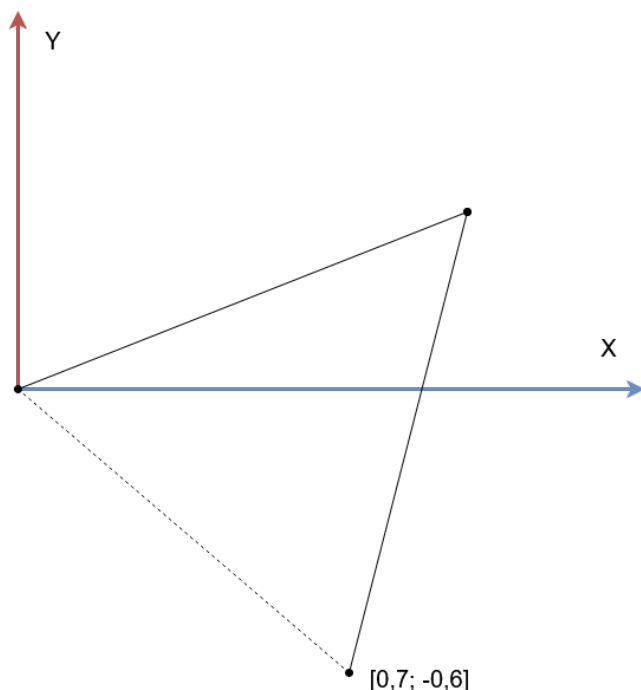
Ответ: 112

Решение.

Проведем линию, соединяющую тазобедренный сустав со стопой. Это основание равнобедренного треугольника.

Расстояние от $[0;0]$ до $[0,7; -0,6]$ равно 0.922, поэтому $\alpha_2 = 125^\circ$.

$\alpha_1 = \arctg(0,7 / 0,6) + \alpha_2 / 2 = 49.4 + 62.5 = -112^\circ$.



Задача 10-11. Летательная робототехника. 1 балл.

Сопротивление у беспилотных летательных аппаратов самолётного типа складывается из двух основных составляющих: сопротивления трения (X_0) и индуктивного сопротивления, возникающего из-за подъёмной силы (коэффициент индуктивного сопротивления выражается формулой $C_{xi} = C_y^2 / (\pi * \lambda)$). Определите на какой скорости должен лететь беспилотник в горизонтальном полёте, чтобы достичь максимального аэродинамического качества, определяемого как отношение подъёмной силы ($Y = C_y * (\rho v)^2 / 2$) к силе сопротивления ($X = C_x * (\rho v)^2 / 2$). Где C_x и C_y безразмерные коэффициенты силы сопротивления и подъёмной силы. Известно, что самолёт имеет массу 10 кг, плотность воздуха на высоте полёта 1.3 кг/м³, крыло имеет площадь 0.03м², удлинение $\lambda = 12$, а коэффициент сопротивления трения $C_{x0} = 0.02$. Выразите скорость в м/с и округлить до целых, g принять за 10м/с², $\pi = 3.14$

Решение

Выражаем формулу аэродинамического качества через коэффициенты сопротивления $K = Y/X = C_y/C_x = C_y/(C_{x0} + C_{xi}) = C_y/(C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda))$

Берём производную по C_y с целью определения экстремума.

$$K' = (C_y/(C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda)))' = \\ (C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda) - 2C_y^2/(\pi * \lambda))/(C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda))^2 = \\ (C_{x0} - C_y^2/(\pi * \lambda))/(C_{x0} + C_y^2/(\pi * \lambda))^2 = 0$$

$$\text{Получаем } C_y = \sqrt{C_{x0} \pi \lambda}$$

$$\text{По второму закону Ньютона } Y = mg = C_y(\rho v)^2/2 = \sqrt{C_{x0} \pi \lambda} (\rho v)^2/2$$

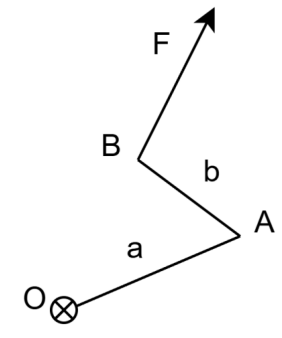
$$\text{Скорость равна } v = \sqrt{\left(\frac{2mg \sqrt{C_{x0} \pi \lambda}}{\rho}\right)} = 11,56 \text{ м/с} = 12 \text{ м/с}$$

Ответ: 12

Задача 10-12. Манипуляторы. 1 балл.

Условие:

Манипулятор, состоящий из двух звеньев длины $a = 40$ см и $b = 30$ см, вращается в плоскости рисунка с постоянной угловой скоростью $\omega = 2$ рад/с относительно оси, проходящей через точку O . В захвате в точке B находится груз. Масса груза с захватом равна $m = 1$ кг. На захват с грузом действует центробежная сила. Найти минимальный момент сил в приводе в точке A , необходимый для удержания груза с захватом, если угол OAB равен $\beta = 60$ градусов. Ответ вырази в Н*м, округлив до целых.



Ответ: 42

Решение:

Формула для центробежной силы: $F = m * \omega^2 * R$.

Найдем $R = OB$ из теоремы косинусов для треугольника:

$$R^2 = a^2 + b^2 - 2 * a * b * \cos \beta = 40^2 + 30^2 - 2 * 40 * 30 * \cos 60 = 1300 \text{ см}^2.$$

$$R = \sqrt{1300} \approx 36,05 \text{ см} \approx 0,36 \text{ м}.$$

$$\text{Центробежная сила: } F = m * \omega^2 * R \approx 1 * 2^2 * 0,36 \approx 1,44 \text{ Н}.$$

Найдем плечо h силы F относительно точки A .

Для площади треугольника OAB справедливо:

$$S = 0.5 * a * b * \sin \beta = 0.5 * 40 * 30 * \sin 60 \approx 519,61 \text{ см}^2.$$

С другой стороны площадь треугольника равна $S = 0.5 * R * h$, откуда:

$$h = 2 * S / R \approx 2 * 519,61 / 36,05 \approx 28,82 \text{ см} \approx 0,29 \text{ м}.$$

Момент силы центробежной силы относительно точки A равен:

$$M = F * h \approx 1,44 * 0,29 \approx 0,4182 \text{ Н*м}.$$

После округления до целых, получим: $M \approx 0 \text{ Н*м}$.

Задача 10-13. Колёсная робототехника. 1 балл.

Условие:

Ты – главный инженер проекта по созданию автономного колесного робота для круглосуточного патрулирования промышленной зоны. Робот должен работать в любую погоду, объезжать препятствия и иметь большой запас хода.

Исходные данные:

Масса шасси с базовой электроникой: $m_{\text{шасси}} = 80 \text{ кг}$.

Коэффициент трения качения (на асфальте): $\mu_{\text{кач}} = 0,04$.

Коэффициент лобового сопротивления: $C_x = 0,9$; площадь Миделя: $A = 1,2 \text{ м}^2$

Плотность воздуха: $\rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$

Ускорение свободного падения: $g \approx 10 \text{ Н/кг}$.

Сила аэродинамического сопротивления воздуха рассчитывается как:

$$F_{\text{возд}} = 0,5 * C_x * \rho * A * v_{\text{ср}}^2.$$

Средняя скорость патрулирования: $v_{\text{ср}} = 6 \text{ км/ч} \approx 1,67 \text{ м/с}$.

Рассчитай силу сопротивления качению $F_{\text{кач}}$ и силу аэродинамического сопротивления $F_{\text{возд}}$ при скорости патрулирования $v_{\text{ср}}$, и найди суммарную силу сопротивления.

Рассчитай и запиши в ответе минимальную механическую мощность на колесах $P_{\text{мех}}$, необходимую для движения по асфальту с постоянной скоростью $v_{\text{ср}}$. Ответ вырази в Вт, округлив до целых.

Ответ: 56

Решение:

Дано:

$$m_{\text{шасси}} = 80 \text{ кг}$$

$$v_{\text{ср}} = 1,67 \text{ м/с}$$

$$\mu_{\text{кач}} = 0,04$$

$$C_x = 0,9, A = 1,2 \text{ м}^2, \rho = 1,2 \text{ кг/м}^3$$

$$g \approx 10 \text{ Н/кг}$$

Силы сопротивления:

$$F_{\text{кач}} = \mu_{\text{кач}} * m * g = 0,04 * 80 \text{ кг} * 10 \text{ Н/кг} = 32 \text{ Н}.$$

$$F_{\text{возд}} = 0,5 * C_x * \rho * A * v_{\text{ср}}^2 = 0,5 * 0,9 * 1,2 * 1,2 * (1,67)^2 \approx 0,5 * 0,9 * 1,2 * 1,2 * 2,79 \approx 1,81 \text{ Н}.$$

$$\text{Суммарная сила сопротивления (на асфальте): } F_{\text{сум}} = 32 + 1,81 \approx 33,8 \text{ Н}.$$

Механическая мощность на колесах:

$$P_{\text{мех}} = F_{\text{сум}} * v_{\text{ср}} = 33,8 \text{ Н} * 1,67 \text{ м/с} \approx 56,4 \text{ Вт}.$$

После округления до целых: $P_{\text{мех}} \approx 56 \text{ Вт}$.