

Отборочный этап. 6-7 класс.

Задача 1.1. Дима загадал двузначное число и сделал шесть утверждений о нём, но каждое третье по счёту утверждение является ложным, остальные — правдивые. Неизвестно, с какого утверждения начинается ложь: первое может быть как правдой, так и ложью. Утверждения Димы следующие:

1. "Моё число больше 57"
2. "В моём числе есть цифра 6"
3. "Моё число меньше 42"
4. "В моём числе цифры разной чётности"
5. "Моё число четное"
6. "Одна из цифр моего числа равна 9"

Какое число мог загадать Дима? Если возможно несколько вариантов чисел, которые мог загадать Дима, в ответ запишите их сумму.

Решение: Заметим, что утверждения 1 и 3 не могут быть верными одновременно. Так как известно, что ложным является только каждое третье, то утверждения 1 и 3 также не могут быть ложными одновременно. Рассмотрим два случая:

Случай 1: Утверждение 1 — ложно, утверждение 3 — правдиво. Тогда получаем, что утверждения 2, 5 и 6 — правдивы, утверждение 4 — ложно, так как до и после ложного утверждения Дима говорит по два верных утверждения. Тогда про загаданное число известно, что в нем есть цифра 6, а также цифры этого числа одной четности, то есть обе цифры четные. Но также верно утверждение, что в числе есть цифра 9. Противоречие.

Случай 2: Утверждение 1 — правдиво, утверждение 3 — ложно. Тогда получаем, что утверждения 2, 4 и 5 — правдивы, утверждение 6 — ложно. Тогда про загаданное Димой число известно, что оно четное, в нем есть цифра 6, а также его цифры разной четности. То есть первая цифра этого числа нечетная и не 9. Число, подходящее под эти условия и большее 57, это 76.

Ответ: 76

Задача 1.2. Дима загадал двузначное число и сделал шесть утверждений о нём, но каждое третье по счёту утверждение является ложным, остальные — правдивые. Неизвестно, с какого утверждения начинается ложь: первое может быть как правдой, так и ложью. Утверждения Димы следующие:

1. "Моё число больше 57"

2. "В моём числе есть цифра 6"
3. "Моё число меньше 42"
4. "В моём числе цифры одной чётности"
5. "Моё число четное"
6. "Одна из цифр моего числа равна 9"

Какое число мог загадать Дима? Если возможно несколько вариантов чисел, которые мог загадать Дима, в ответ запишите их сумму.

Ответ: 406

Задача 1.3. Дима загадал двузначное число и сделал шесть утверждений о нём, но каждое третье по счёту утверждение является ложным, остальные — правдивые. Неизвестно, с какого утверждения начинается ложь: первое может быть как правдой, так и ложью. Утверждения Димы следующие:

1. "Моё число больше 57"
2. "В моём числе есть цифра 6"
3. "Моё число меньше 42"
4. "В моём числе цифры разной чётности"
5. "Одна из цифр моего числа равна 2"
6. "Моё число четное"

Какое число мог загадать Дима? Если возможно несколько вариантов чисел, которые мог загадать Дима, в ответ запишите их сумму.

Ответ: 26

Задача 1.4. Дима загадал двузначное число и сделал шесть утверждений о нём, но каждое третье по счёту утверждение является ложным, остальные — правдивые. Неизвестно, с какого утверждения начинается ложь: первое может быть как правдой, так и ложью. Утверждения Димы следующие:

1. "Моё число больше 57"
2. "В моём числе есть цифра 5"
3. "Моё число меньше 42"
4. "Моё число четное"
5. "В моём числе цифры разной чётности"
6. "Одна из цифр моего числа равна 2"

Какое число мог загадать Дима? Если возможно несколько вариантов чисел, которые мог загадать Дима, в ответ запишите их сумму.

Ответ: 83

Задача 2.1. Красная Шапочка отправилась к бабушке на велосипеде из дома. Путь до бабушки состоит из равных (горизонтальных) участков, а также подъемов и спусков. На равных участках Красная Шапочка едет со скоростью 12 км/ч, на подъемах – 8 км/ч, а на спусках – 15 км/ч. До бабушки она доехала за 5 часов, а обратно домой за 4 часа 39 минут. Ровные участки составляют 28 км. Сколько километров проехала Красная Шапочка суммарно на подъемах и спусках по пути к бабушке и обратно?

Решение: Заметим, что раз Красная Шапочка съедает пирожок в конце каждого километра на подъемах и спусках, то число съеденных ею пирожков равно количеству пройденных километров на подъемах и спусках. Рассмотрим путь Красной Шапочки от дома до бабушки. Пусть на подъем она двигалась x км, а на спуск – y км. Тогда время в пути до бабушки составило $\frac{28}{12} + \frac{x}{8} + \frac{y}{15}$, что равно 5 часам. По пути обратно от бабушки спуски стали подъемами и наоборот. Тогда время в пути обратно домой составило $\frac{28}{12} + \frac{x}{15} + \frac{y}{8}$, что равно $\frac{279}{60} = \frac{93}{20}$ часа. Выражая $x + y$ из двух полученных равенств, получаем $x + y = 26$. Тогда общая длина подъемов и спусков по пути к бабушке и обратно составила 52 км, а значит, Красная Шапочка съела 52 пирожка.

Ответ: 52

Задача 2.2. Красная Шапочка отправилась к бабушке на велосипеде из дома. Путь до бабушки состоит из равных (горизонтальных) участков, а также подъемов и спусков. На равных участках Красная Шапочка едет со скоростью 8 км/ч, на подъемах – 5 км/ч, а на спусках – 12 км/ч. До бабушки она доехала за 4 часа, а обратно домой за 3 часа 5 минут. Ровные участки составляют 17 км. Сколько километров проехала Красная Шапочка суммарно на подъемах и спусках по пути к бабушке и обратно?

Ответ: 20

Задача 2.3. Красная Шапочка отправилась к бабушке на велосипеде из дома. Путь до бабушки состоит из равных (горизонтальных) участков, а также подъемов и спусков. На равных участках Красная Шапочка едет со скоростью 8 км/ч, на подъемах – 5 км/ч, а на спусках – 12 км/ч. До бабушки она доехала за 4 часа, а обратно домой за 3 часа 39 минут. Ровные участки составляют 17 км. Сколько километров проехала Красная Шапочка суммарно на подъемах и спусках по пути к бабушке и обратно?

Ответ: 24

Задача 2.4. Красная Шапочка отправилась к бабушке на велосипеде из дома. Путь до бабушки состоит из равных (горизонтальных) участков, а также подъ-

емов и спусков. На ровных участках Красная Шапочка едет со скоростью 12 км/ч, на подъемах – 8 км/ч, а на спусках – 15 км/ч. До бабушки она доехала за 5 часов, а обратно домой за 4 часа 16 минут. Ровные участки составляют 28 км. Сколько километров проехала Красная Шапочка суммарно на подъемах и спусках по пути к бабушке и обратно?

Ответ: 48

Задача 3.1. Петя нарисовал прямоугольник со сторонами n и m , где n и m – целые числа. Затем решил увеличить его стороны в 5 и 4 раза соответственно. Оказалось, что значение площади исходного прямоугольника больше значения периметра нового прямоугольника на 9. Найдите наибольшее возможное значение n .

Решение: Составим уравнение: $10n + 8m = mn - 9$

$$n = \frac{8m + 9}{m - 10} = \frac{8(m - 10) + 89}{m - 10} = 8 + \frac{89}{m - 10}$$

Ответ: 97

Задача 3.2. Петя нарисовал прямоугольник со сторонами n и m , где n и m – целые числа. Затем решил увеличить его стороны в 5 и 4 раза соответственно. Оказалось, что значение площади исходного прямоугольника больше значения периметра нового прямоугольника на 9. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 9

Задача 3.3. Петя нарисовал прямоугольник со сторонами n и m , где n и m – целые числа. Затем решил увеличить его стороны в 3 и 7 раз соответственно. Оказалось, что значение площади исходного прямоугольника больше значения периметра нового прямоугольника на 5. Найдите наименьшее возможное значение n .

Ответ: 15

Задача 3.4. Петя нарисовал прямоугольник со сторонами n и m , где n и m – целые числа. Затем решил увеличить его стороны в 3 и 7 раз соответственно. Оказалось, что значение площади исходного прямоугольника больше значения периметра нового прямоугольника на 5. Найдите наибольшее возможное значение n .

Ответ: 103

Задача 4.1. Следователь обнаружил в блокноте разыскиваемого математика записанную последовательность чисел: 107, 108, 109, ... , 2026. Рядом была пометка: «Удалив сначала всех тех, кто дружен с 2, а затем тех, кто дружен с 5, найдёшь ответ в конце пути оставшихся». Следователь понял, что нужно вычеркнуть все четные числа и числа, оканчивающиеся на 5, а затем найти последнюю цифру произведения оставшихся. Найдите эту цифру.

Решение: На 2 делятся все чётные числа, на 5 делятся те, что заканчиваются

на 0 или 5. В итоге остались числа, которые заканчиваются на 1, 3, 7, 9. В диапазоне от 107 до 2026 помещается 191 полный десяток. То есть, перемножение последних цифр всех оставшихся на доске чисел можно записать так:

$$7 * 9 * (1 * 3 * 7 * 9)^{191} * 1 * 3$$

Нечетная степень скобки оканчивается на 9, четная степень оканчивается на 1.
Ответ: 1

Задача 4.2. Следователь обнаружил в блокноте разыскиваемого математика записанную последовательность чисел: 113, 114, 115, ... , 2026. Рядом была пометка: «Удалив сначала всех тех, кто дружен с 2, а затем тех, кто дружен с 5, найдёшь ответ в конце пути оставшихся». Следователь понял, что нужно вычеркнуть все четные числа и числа, оканчивающиеся на 5, а затем найти последнюю цифру произведения оставшихся. Найдите эту цифру.

Ответ: 7

Задача 4.3. Следователь обнаружил в блокноте разыскиваемого математика записанную последовательность чисел: 125, 126, 127, ... , 2026. Рядом была пометка: «Удалив сначала всех тех, кто дружен с 2, а затем тех, кто дружен с 5, найдёшь ответ в конце пути оставшихся». Следователь понял, что нужно вычеркнуть все четные числа и числа, оканчивающиеся на 5, а затем найти последнюю цифру произведения оставшихся. Найдите эту цифру.

Ответ: 1

Задача 4.4. Следователь обнаружил в блокноте разыскиваемого математика записанную последовательность чисел: 138, 139, 140, ... , 2026. Рядом была пометка: «Удалив сначала всех тех, кто дружен с 2, а затем тех, кто дружен с 5, найдёшь ответ в конце пути оставшихся». Следователь понял, что нужно вычеркнуть все четные числа и числа, оканчивающиеся на 5, а затем найти последнюю цифру произведения оставшихся. Найдите эту цифру.

Ответ: 7

Задача 5. Вале нужно отгадать три числа, которые загадал Дима. Дима дал Вале подсказку, что его числа имеют вид $\overline{abc}$, $\overline{cba}$ и $\overline{xxx}$ (разными буквами обозначены разные цифры), а также для них выполняется равенство $\overline{abc} + \overline{cba} = \overline{xxx}$. Валя делает предположение, называя тройку чисел, удовлетворяющую подсказке. За какое минимальное количество предположений Валя гарантированно угадает загаданную Димой тройку?

Решение: $a + c < 10$, поэтому нет переносов и $b + b$, то есть x , — чётная цифра. Ни a , ни b , ни c не равны нулю, так как иначе $x = 0$. $\overline{xxx}$ не может быть 222, так как a, b, c — различные цифры. Тогда x может быть либо 4, либо 6, либо 8. Перепишем все возможные варианты: $444=123+321$, $666=135+531$ или $666=234+432$, $888=147+741$, или $888=246+642$, или $888=345+543$. Итого, всего возможно 6 троек чисел, удовлетворяющих подсказке Димы. Значит, за 6 предположений Валя гарантированно сможет угадать загаданную Димой.

Ответ: 6

Олимпиада школьников «Курчатов»
по математике – 2026. Отборочный этап.
8-9 класс.

Задача 1.1 У Вани есть пять механических будильников, каждый из которых звенит, соответственно, 1, 2, 4, 5 и 7 минут, после чего замолкает на одну минуту, и затем начинает звенеть снова. И так до тех пор, пока его не отключат. Ваня завёл будильники на 8 : 00 утра, но, по счастливому стечению обстоятельств, проснулся сам и ушёл на тренировку. В 8 : 00 все пять будильников начали звонить. Ваня вернулся в первый момент, когда ни один будильник не звенел после 8 : 00. Через сколько минут после начала звона будильников он вернулся?

Решение. Заметим, что первый будильник звонит с периодом $t_1 = 2$ минуты, второй – с $t_2 = 3$ минуты, аналогично $t_3 = 5$, $t_4 = 6$ и $t_5 = 8$. Отмерим эти периоды от 7 : 59 – момента, когда ни один из будильников не звонил. Заметим, что $\text{НОК}(t_1, t_2, t_3, t_4, t_5) = 120$ минут, значит впервые все будильники замолчат в 9 : 59, то есть через 119 минут.

Ответ: 119. ■

Задача 1.2 У Вани есть пять механических будильников, каждый из которых звенит, соответственно, 1, 2, 3, 4 и 8 минут, после чего замолкает на одну минуту, и затем начинает звенеть снова. И так до тех пор, пока его не отключат. Ваня завёл будильники на 8 : 00 утра, но, по счастливому стечению обстоятельств, проснулся сам и ушёл на тренировку. В 8 : 00 все пять будильников начали звонить. Ваня вернулся в первый момент, когда ни один будильник не звенел после 8 : 00. Через сколько минут после начала звона будильников он вернулся?

Ответ: 179.

Задача 1.3 У Вани есть пять механических будильников, каждый из которых звенит, соответственно, 2, 3, 4, 5 и 8 минут, после чего замолкает на одну минуту, и затем начинает звенеть снова. И так до тех пор, пока его не отключат. Ваня завёл будильники на 8 : 00 утра, но, по счастливому стечению обстоятельств, проснулся сам и ушёл на тренировку. В 8 : 00 все пять будильников начали звонить. Ваня вернулся в первый момент, когда ни один будильник не звенел после 8 : 00. Через сколько минут после начала звона будильников он вернулся?

Ответ: 179.

Задача 1.4 У Вани есть пять механических будильников, каждый из которых звенит, соответственно, 1, 2, 3, 6 и 8 минут, после чего замолкает на одну минуту, и затем начинает звенеть снова. И так до тех пор, пока его не отключат. Ваня завёл будильники на 8 : 00 утра, но, по счастливому

стечению обстоятельств, проснулся сам и ушёл на тренировку. В 8 : 00 все пять будильников начали звонить. Ваня вернулся в первый момент, когда ни один будильник не звенел после 8 : 00. Через сколько минут после начала звона будильников он вернулся?

Ответ: 251.

Задача 2.1 Король острова Рыцарей и Лжецов, сам являющийся рыцарем, решил узнать, сколько рыцарей среди его 12-и министров. Собрав их, он задал министрам единственный вопрос «Сколько среди вас рыцарей?»:

Один сказал: «Здесь не меньше 9 рыцарей».

Второй сказал: «Здесь не больше 6 рыцарей».

Остальные 10 хором воскликнули: «Здесь ровно 7 рыцарей».

Через минуту раздумий король правильно назвал число рыцарей среди его министров. Какое число он назвал? Министры знают, кто есть кто.

Решение. Проведем анализ утверждений: Допустим, что утверждение «Здесь ровно 7 рыцарей» истинно, тогда, каждый из 10 министров сказал правду, следовательно все они рыцари – противоречие. Допустим, что утверждение «Здесь не меньше 9 рыцарей» истинно, тогда, первый житель – рыцарь, а остальные – лжецы, снова противоречие. Допустим, что утверждение «Здесь не больше 6 рыцарей» истинно, тогда второй житель – рыцарь, а остальные – лжецы. Допустим, что каждое из утверждений ложно, тогда в тронном зале нет рыцарей (кроме короля), тогда второе утверждение истинно – противоречие. Таким образом, можно сделать вывод, что в тронном зале всего 1 рыцарь, кроме самого короля.

Ответ: 1. ■

Задача 2.2 Король острова Рыцарей и Лжецов, сам являющийся рыцарем, решил узнать, сколько рыцарей среди его 15-и министров. Собрав их, он задал министрам единственный вопрос «Сколько среди вас рыцарей?»:

Один сказал: «Здесь не меньше 12 рыцарей».

Второй сказал: «Здесь не больше 10 рыцарей».

Остальные 13 хором воскликнули: «Здесь ровно 11 рыцарей».

Через минуту раздумий король правильно назвал число рыцарей среди его министров. Какое число он назвал? Министры знают, кто есть кто.

Ответ: 1.

Задача 2.3 Король острова Рыцарей и Лжецов, сам являющийся рыцарем, решил узнать, сколько рыцарей среди его 18-и министров. Собрав их, он задал министрам единственный вопрос «Сколько среди вас рыцарей?»:

Один сказал: «Здесь не меньше 14 рыцарей».

Второй сказал: «Здесь не больше 12 рыцарей».

Остальные 16 хором воскликнули: «Здесь ровно 13 рыцарей».

Через минуту раздумий король правильно назвал число рыцарей среди его министров. Какое число он назвал? Министры знают, кто есть кто.

Ответ: 1.

Задача 2.4 Король острова Рыцарей и Лжецов, сам являющийся рыцарем, решил узнать, сколько рыцарей среди его 10-и министров. Собрав их, он задал министрам единственный вопрос «Сколько среди вас рыцарей?»:

Один сказал: «Здесь не меньше 7 рыцарей».

Второй сказал: «Здесь не больше 5 рыцарей».

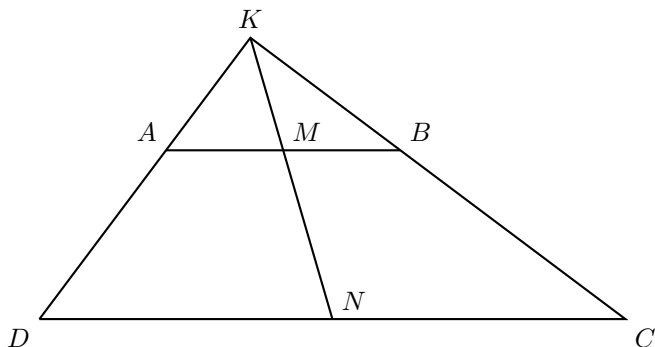
Остальные 8 хором воскликнули: «Здесь ровно 6 рыцарей».

Через минуту раздумий король правильно назвал число рыцарей среди его министров. Какое число он назвал? Министры знают, кто есть кто.

Ответ: 1.

Задача 3.1 В трапеции $ABCD$ с основаниями $CD = 46$ и $AB = 18$ и острыми углами при большем основании отметили середину M стороны AB и такую точку N на стороне CD , что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Найдите длину отрезка MN .

Решение. Заметим, что из условий $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$ следует, что $\angle ADC + \angle BCD = 90^\circ$. Продлим боковые стороны AD и BC до пересечения в точке K . Тогда $\angle DKC = 90^\circ$.



Теперь очевидно, что KM – медиана прямоугольного треугольника ABK , а значит $\angle AMK = 180^\circ - 2\angle KAM = 180^\circ - 2\angle ADN = 180^\circ - \angle MNC = \angle MND$, то есть $KM \parallel MN$, но это значит, что точки K, M и N лежат на одной прямой, то есть N – середина DC . Получили, что $MN = KN - KM = \frac{1}{2}(46 - 18) = 14$.

Ответ: 14. ■

Задача 3.2 В трапеции $ABCD$ с основаниями $CD = 38$ и $AB = 6$ и острыми углами при большем основании отметили середину M стороны AB и такую точку N на стороне CD , что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Найдите длину отрезка MN .

Ответ: 16.

Задача 3.3 В трапеции $ABCD$ с основаниями $CD = 58$ и $AB = 24$ и острыми углами при большем основании отметили середину M стороны AB и такую точку N на стороне CD , что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Найдите длину отрезка MN .

Ответ: 17.

Задача 3.4 В трапеции $ABCD$ с основаниями $CD = 40$ и $AB = 22$ и острыми углами при большем основании отметили середину M стороны AB и такую точку N на стороне CD , что $\angle ADN = \frac{1}{2}\angle MNC$ и $\angle BCN = \frac{1}{2}\angle MND$. Найдите длину отрезка MN .

Ответ: 9.

Задача 4.1 В компании 15 человек. На 8 марта мальчики дарили девочкам цветы: не более одного цветка от одного мальчика одной девочке. Известно, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветков. Какое наименьшее количество мальчиков может быть в компании?

Решение. Пусть в компании n парней, тогда девушек $15 - n$. Каждая девушка может получить от 0 до n цветков. По условию никакие 3 девушки не получили одинаковое количество цветков, значит, количество цветков в «букете» может повторяться не более двух раз, тогда:

$$15 - n \leq 2(n + 1) \iff n \geq \frac{13}{3}.$$

Так как $n \in \mathbb{N} : n \geq 5$. Таким образом, количество парней в компании должно быть не меньше 5, а количество девушек не больше 10. Покажем, что такое распределение возможно. Построим таблицу: каждая строка – парень, столбец – девушка, в пересечении – 1, если парень дарит девушке цветок, и 0 – если не дарит.

	D_1	D_2	D_3	D_4	D_5	D_6	D_7	D_8	D_9	D_{10}
P_1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0
P_2	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0
P_3	1	1	1	1	0	1	0	1	0	0
P_4	1	1	1	1	0	1	0	0	1	0
P_5	1	1	1	1	0	1	1	0	0	0
Σ	5	5	4	4	3	3	2	2	1	0

Следовательно, наименьшее возможное количество парней равно 5.

Ответ: 5. ■

Задача 4.2 В компании 10 человек. На 8 марта мальчики дарили девочкам цветы: не более одного цветка от одного мальчика одной девочке. Известно, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветков. Какое наименьшее количество мальчиков может быть в компании?

Ответ: 3.

Задача 4.3 В компании 13 человек. На 8 марта мальчики дарили девочкам цветы: не более одного цветка от одного мальчика одной девочке. Известно, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветков. Какое наименьшее количество мальчиков может быть в компании?

Ответ: 4.

Задача 4.4 В компании 19 человек. На 8 марта мальчики дарили девочкам цветы: не более одного цветка от одного мальчика одной девочке.

Известно, что никакие три девочки не получили одинаковое число цветов.
Какое наименьшее количество мальчиков может быть в компании?

Ответ: 6.

Задача 5.1 Про число X известно, что оно делится на 48 и имеет ровно 2026 делителей. Найдите остаток при делении на 9 максимального из всех X , удовлетворяющих условиям.

Решение. Заметим, что $2026 = 2 \cdot 1013$ и 1013 – простое. Тогда $X = \alpha_1 \cdot \alpha_2^{1012}$ – разложение числа X на простые множители. Теперь заметим, что $48 = 3 \cdot 2^4$. Тогда заметим, что X определяется однозначно – это $3 \cdot 2^{1012}$. Остаётся заметить, что $2^3 \equiv_9 -1$, то есть

$$3 \cdot 2^{1012} = 6 \cdot 2^{1011} = 6 \cdot (2^3)^{337} \equiv_9 6 \cdot (-1) \equiv_9 3.$$

Ответ: 3. ■

Задача 5.2 Про число X известно, что оно делится на 80 и имеет ровно 2026 делителей. Найдите остаток при делении на 9 максимального из всех X , удовлетворяющих условиям.

Ответ: 8.

Задача 5.3 Про число X известно, что оно делится на 56 и имеет ровно 2026 делителей. Найдите остаток при делении на 9 максимального из всех X , удовлетворяющих условиям.

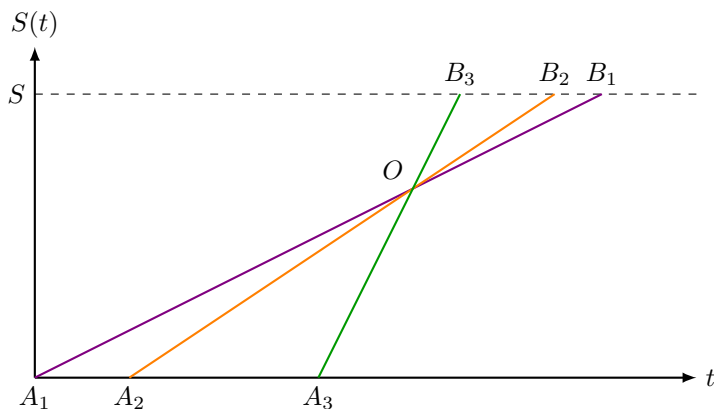
Ответ: 4.

Задача 5.4 Про число X известно, что оно делится на 44 и имеет ровно 2026 делителей. Найдите остаток при делении на 9 максимального из всех X , удовлетворяющих условиям.

Ответ: 5.

Задача 6.1 Дядя Фёдор, пёс Шарик и почтальон Печкин устроили забег на скорость. Когда Шарик побежал, кот Матроскин отвлек остальных участников забега, из-за чего Дядя Фёдор начал забег на минуту позже, а возмущённый несправедливостью почтальон Печкин сбегал за велосипедом и принял участие в гонке на велосипеде, стартовав через две минуты после начала движения Дяди Фёдора. В некоторый момент гонки Матроскин заметил, что все три героя преодолели одинаковую часть дистанции. Через какое время после финиша Печкина финишировал Шарик, если известно, что он прибежал через 30 секунд после Дяди Фёдора? Ответ дайте в секундах.

Решение. Построим графики движения каждого из трёх персонажей в координатах $t, S(t)$:



Пусть график движения Шарика графически представляется отрезком A_1B_1 , Дяди Фёдора – A_2B_2 и, наконец, Печкина – A_3B_3 . Пусть точка, в которой пересекаются все три прямые – точка O . Тогда из $\triangle A_1A_3O \sim \triangle B_1B_3O$ и $\triangle A_2A_3O \sim \triangle B_2B_3O$ имеем:

$$\frac{A_2A_1}{B_2B_1} = \frac{A_3O}{B_3O} = \frac{A_1A_3}{B_1B_3} \iff \frac{2}{0.5} = \frac{3}{B_3B_1} \iff B_3B_1 = 1.5 \text{ минуты} = 90 \text{ секунд.}$$

Ответ: 90. ■

Задача 6.2 Дядя Фёдор, пёс Шарик и почтальон Печкин устроили забег на скорость. Когда Шарик побежал, кот Матроскин отвлек остальных участников забега, из-за чего Дядя Фёдор начал забег на полторы минуты позже, а возмущённый несправедливостью почтальон Печкин сбегал за велосипедом и принял участие в гонке на велосипеде, стартовав через

минуту после начала движения Дяди Фёдора. В некоторый момент гонки Матроскин заметил, что все три героя преодолели одинаковую часть дистанции. Через какое время после финиша Печкина финишировал Шарик, если известно, что он прибежал через 30 секунд после Дяди Фёдора? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 50.

Задача 6.3 Дядя Фёдор, пёс Шарик и почтальон Печкин устроили забег на скорость. Когда Шарик побежал, кот Матроскин отвлек остальных участников забега, из-за чего Дядя Фёдор начал забег на 30 секунд позже, а возмущённый несправедливостью почтальон Печкин сбежал за велосипедом и принял участие в гонке на велосипеде, стартовав через две минуты после начала движения Дяди Фёдора. В некоторый момент гонки Матроскин заметил, что все три героя преодолели одинаковую часть дистанции. Через какое время после финиша Печкина финишировал Шарик, если известно, что он прибежал через 20 секунд после Дяди Фёдора? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 100.

Задача 6.4 Дядя Фёдор, пёс Шарик и почтальон Печкин устроили забег на скорость. Когда Шарик побежал, кот Матроскин отвлек остальных участников забега, из-за чего Дядя Фёдор начал забег на минуту позже, а возмущённый несправедливостью почтальон Печкин сбежал за велосипедом и принял участие в гонке на велосипеде, стартовав через полторы минуты после начала движения Дяди Фёдора. В некоторый момент гонки Матроскин заметил, что все три героя преодолели одинаковую часть дистанции. Через какое время после финиша Печкина финишировал Шарик, если известно, что он прибежал через 40 секунд после Дяди Фёдора? Ответ дайте в секундах.

Ответ: 100.

Олимпиада школьников «Курчатов»
по математике – 2026. Отборочный этап.
10-11 класс.

Задача 1.1 Найдите такие значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - ax - 1 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 , причём выполняется равенство $x_1 - \frac{58}{x_1^2} = x_2 - \frac{58}{x_2^2}$. Если таких a несколько, в качестве ответа введите их произведение, если таких a не существует, введите 12345.

Решение. Так как дискриминант квадратного трёхчлена $a^2 + 4$ положителен при любых a , данное уравнение всегда имеет два различных действительных решения. Преобразуем равенство, данное в условии:

$$x_1 - x_2 + 58 \left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2} \right) = 0 \iff (x_1 - x_2) + 58 \cdot \frac{x_1^2 - x_2^2}{(x_1 x_2)^2} = 0.$$

Так как корни по условию различны имеем $x_1 - x_2 \neq 0$, разделим уравнение на $(x_1 - x_2)$:

$$1 + \frac{58(x_1 + x_2)}{(x_1 x_2)^2} = 0.$$

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = a$, $x_1 x_2 = -1$. Тогда $a = -\frac{1}{58}$.

Ответ: $-\frac{1}{58}$. ■

Задача 1.2 Найдите такие значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - ax - 2 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 , причём выполняется равенство $x_1 - \frac{17}{x_1^2} = x_2 - \frac{17}{x_2^2}$. Если таких a несколько, в качестве ответа введите их произведение, если таких a не существует, введите 12345.

Ответ: $-\frac{4}{17}$.

Задача 1.3 Найдите такие значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - ax - 3 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 , причём выполняется равенство $x_1 - \frac{21}{x_1^2} = x_2 - \frac{21}{x_2^2}$. Если таких a несколько, в качестве ответа введите их произведение, если таких a не существует, введите 12345.

Ответ: $-\frac{3}{7}$.

Задача 1.4 Найдите такие значения параметра a , при которых уравнение $x^2 - ax - 4 = 0$ имеет два различных корня x_1 и x_2 , причём выполняется равенство $x_1 - \frac{44}{x_1^2} = x_2 - \frac{44}{x_2^2}$. Если таких a несколько, в качестве ответа введите их произведение, если таких a не существует, введите 12345.

Ответ: $-\frac{4}{11}$.

Задача 2.1 Сумма восьми последовательных натуральных нечётных чисел, меньшее из которых больше единицы, равна N^2 . Укажите минимальное возможное значение числа N .

Решение. Пусть наименьшее из чисел $2z + 1$. Тогда наибольшее $- 2z + 1 + 7 \cdot 2 = 15 + 2z$. Сумма арифметической прогрессии с разностью 2 равна $\frac{(2z + 1) + (2z + 15)}{2} \cdot 8 = N^2$, откуда $N^2 = 16z + 64$. Правая часть равенства кратна 16, тогда и левая кратна 16, откуда $N = 4t$ и $t^2 = z + 4$. Так как $z > 0$ имеем минимальный возможный квадрат $t^2 = 9$ и значит $N = 12$. Покажем, как решить эту задачу из других соображений. Хорошо известно, что сумма первых k нечётных чисел равна k^2 . Тогда наша сумма $N^2 = A^2 - (A - 8)^2$, где A – номер наибольшего из рассматриваемых нечётных чисел и $A \geq 8$. Получили $N^2 = 16A - 64$, то есть, аналогично решению выше, $N = 4t$ и уравнение упрощается до $t^2 = A - 4$. Минимальный квадрат больший $A - 4 \geq 8 - 4 = 4$ есть 9, тогда снова $N = 12$.

Ответ: 12. Заметим, что задача сводилась к поиску минимальной пифагоровой тройки, два числа в которой отличаются на 8, минимальной из таких является тройка (5,12,13). ■

Задача 2.2 Сумма восемнадцати последовательных натуральных нечётных чисел, меньшее из которых больше единицы, равна N^2 . Укажите минимальное возможное значение числа N .

Ответ: 24.

Задача 2.3 Сумма девяти последовательных натуральных нечётных чисел, меньшее из которых больше единицы, равна N^2 . Укажите минимальное возможное значение числа N .

Ответ: 15.

Задача 2.4 Сумма двадцати пяти последовательных натуральных нечётных чисел, меньшее из которых больше единицы, равна N^2 . Укажите минимальное возможное значение числа N .

Ответ: 35.

Задача 3.1 В конкурсе приняли участие m учеников из Эмска и n — из Энска. Участников из других городов не было. Известно, что вероятность при случайном выборе двух участников конкурса получить пару из одного города такая же, как и вероятность получить пару их разных городов. Найдите максимальное возможное значение $n + m$, если известно, что это число не больше 2026.

Решение. Ясно, что способов выбрать двух участников олимпиады C_{n+k}^2 . Домножим обе вероятности из условия на это число и перейдём к подсчёту числа способов выбрать двух участников из одного города и числа способов выбрать участников из разных городов. Участников из одного города можно выбрать $\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2}$ числом способов, из разных городов — kn . По условию эти числа равны, откуда:

$$\frac{n(n-1)}{2} + \frac{k(k-1)}{2} = kn \iff n^2 - n + k^2 - k - 2kn = 0.$$

Заметим, что уравнение равносильно следующему:

$$(n-k)^2 = n+k,$$

то есть общее число участников олимпиады $n+k$ есть квадрат. Заметим, что наибольший квадрат, не превосходящий 2026 есть $45^2 = 2025$. Остаётся проверить, что такое возможно. Пример реализуется, например, при $n = 1035$ и $k = 990$.

Ответ: 2025. ■

Задача 3.2 В конкурсе приняли участие m учеников из Эмска и n — из Энска. Участников из других городов не было. Известно, что вероятность при случайном выборе двух участников конкурса получить пару из одного города такая же, как и вероятность получить пару их разных городов. Найдите максимальное возможное значение $n + m$, если известно, что это число не больше 2005.

Ответ: 1936.

Задача 3.3 В конкурсе приняли участие m учеников из Эмска и n — из Энска. Участников из других городов не было. Известно, что вероятность при случайном выборе двух участников конкурса получить пару из одного города такая же, как и вероятность получить пару их разных городов. Найдите максимальное возможное значение $n + m$, если известно, что это число не больше 2125.

Ответ: 2116.

Задача 3.4 В конкурсе приняли участие m учеников из Эмска и n — из Энска. Участников из других городов не было. Известно, что вероятность при случайном выборе двух участников конкурса получить пару из одного города такая же, как и вероятность получить пару их разных городов. Найдите максимальное возможное значение $n + m$, если известно, что это число не больше 2505.

Ответ: 2500.

Задача 4.1 Найдите корни уравнения

$$\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4} - \sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4} = \sin x - \cos x + 1,$$

по модулю не превосходящие 5π . В качестве ответа укажите их сумму, делённую на π .

Решение. Пусть $u = \sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4}$, $v = \sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4}$, тогда:

$$\begin{aligned} u^2 - v^2 &= \left(\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4}\right)^2 - \left(\sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4}\right)^2 = \\ &= \sin^2 x + \sin x + 4 + \cos^2 x - \cos x - 4 = \sin x - \cos x + 1 \end{aligned}$$

$$u - v = u^2 - v^2 \iff (u - v)(1 - u - v) = 0 \iff \begin{cases} u = v, \\ u + v = 1. \end{cases}$$

Заметим, что $\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4} = \sqrt{(\sin x + 0.25)^2 + 3.75} > 1$ при $x \in \mathbb{R}$, а также $\sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4} = \sqrt{4.25 - (\cos x - 0.25)^2} > 1$ при $x \in \mathbb{R}$, так как $-1 \leq \cos x \leq 1$. Тогда: $\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4} + \sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4} \neq 1$ при $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \sqrt{\sin^2 x + \sin x + 4} &= \sqrt{-\cos^2 x + \cos x + 4} \iff \sin x - \cos x = -1 \iff \\ &\iff \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \begin{cases} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x = 2\pi k; \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

При $|x| \leq 5\pi$:

$$x = -\frac{9\pi}{2}; -4\pi; -\frac{5\pi}{2}; -2\pi; -\frac{\pi}{2}; 0; \frac{3\pi}{2}; 2\pi; \frac{7\pi}{2}; 4\pi;$$

Найдём сумму корней:

$$-\frac{9\pi}{2} - 4\pi - \frac{5\pi}{2} - 2\pi - \frac{\pi}{2} + 0 + \frac{3\pi}{2} + 2\pi + \frac{7\pi}{2} + 4\pi = -\frac{5\pi}{2}.$$

Ответ: -2.5 .

■

Задача 4.2 Найдите корни уравнения

$$\sqrt{\sin^2 x + \sin x + 6} - \sqrt{-\cos^2 x - \cos x + 6} = \frac{1}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{2},$$

по модулю не превосходящие 3π . В качестве ответа укажите их сумму, делённую на π .

Ответ: -1.5 .

Задача 4.3 Найдите корни уравнения

$$\sqrt{-\sin^2 x + \sin x + 8} - \sqrt{\cos^2 x - \cos x + 8} = 2 \sin x + 2 \cos x - 2,$$

по модулю не превосходящие 7π . В качестве ответа укажите их сумму, делённую на π .

Ответ: 3.5 .

Задача 4.3 Найдите корни уравнения

$$\sqrt{-\sin^2 x - \sin x + 10} - \sqrt{\cos^2 x - \cos x + 10} = \frac{1}{3} \cos x - \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{3},$$

по модулю не превосходящие 9π . В качестве ответа укажите их сумму, делённую на π .

Ответ: -4.5 .

Задача 5.1 Три богатыря: Добрыня, Илья и Алёша, собрались выкосить поле ржи. Каждый из них, работая в одиночку, справится за время t_1 , t_2 и t_3 соответственно, причем времена t_1 , t_2 и t_3 – корни уравнения

$$161t^3 - 93t^2 + 17t - 1 = 0.$$

Алёша предложил косить всем вместе, но Илья возразил, что в таком случае границы останутся без надзора и лучше каждому выкосить ровно по трети поля, пока остальные двое в дозоре. Во сколько раз быстрее богатыри выкосят поле, работая все вместе, чем если они будут работать поочерёдно каждый со своей собственной скоростью уборки ржи?

Решение. Найдем время, за которое богатыри выкосят поле, работая поочередно: $\frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3} + \frac{t_3}{3} = \frac{t_1+t_2+t_3}{3}$. Если же богатыри работают вместе, то время, за которое они выкосят поле:

$$\frac{1}{\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2} + \frac{1}{t_3}} = \frac{t_1 t_2 t_3}{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3}.$$

Воспользуемся теоремой Виета для кубического уравнения:

$$\begin{cases} t_1 + t_2 + t_3 = \frac{93}{161} \\ t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3 = \frac{17}{161} \\ t_1 t_2 t_3 = \frac{1}{161} \end{cases}.$$

Тогда:

$$\frac{t_1 + t_2 + t_3}{3} = \frac{31}{161}.$$

и:

$$\frac{t_1 t_2 t_3}{t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_2 t_3} = \frac{1}{161} : \frac{17}{161} = \frac{1}{17}.$$

Найдем отношение времени поочередной работы ко времени совместной работы:

$$\frac{31}{161} : \frac{1}{17} = \frac{527}{161}.$$

Ответ: $\frac{527}{161}$. ■

Задача 5.2 Три богатыря: Добрыня, Илья и Алёша, собрались выкосить поле ржи. Каждый из них, работая в одиночку, справится за время t_1 , t_2 и t_3 соответственно, причем времена t_1 , t_2 и t_3 – корни уравнения

$$150t^3 - 145t^2 + 26t - 1 = 0.$$

Алёша предложил косить всем вместе, но Илья возразил, что в таком случае границы останутся без надзора и лучше каждому выкосить ровно по трети поля, пока остальные двое в дозоре. Во сколько раз быстрее богатыри выкосят поле, работая все вместе, чем если они будут работать поочерёдно каждый со своей собственной скоростью уборки ржи?

Ответ: $\frac{377}{45}$.

Задача 5.3 Три богатыря: Добрыня, Илья и Алёша, собрались выкосить поле ржи. Каждый из них, работая в одиночку, справится за время t_1 , t_2 и t_3 соответственно, причем времена t_1 , t_2 и t_3 – корни уравнения

$$196t^3 - 161t^2 + 32t - 1 = 0.$$

Алёша предложил косить всем вместе, но Илья возразил, что в таком случае границы останутся без надзора и лучше каждому выкосить ровно по трети поля, пока остальные двое в дозоре. Во сколько раз быстрее богатыри выкосят поле, работая все вместе, чем если они будут работать поочерёдно каждый со своей собственной скоростью уборки ржи?

Ответ: $\frac{184}{21}$.

Задача 5.4 Три богатыря: Добрыня, Илья и Алёша, собрались выкосить поле ржи. Каждый из них, работая в одиночку, справится за время t_1 , t_2 и t_3 соответственно, причем времена t_1 , t_2 и t_3 – корни уравнения

$$242t^3 - 209t^2 + 46t - 1 = 0.$$

Алёша предложил косить всем вместе, но Илья возразил, что в таком случае границы останутся без надзора и лучше каждому выкосить ровно по трети поля, пока остальные двое в дозоре. Во сколько раз быстрее богатыри выкосят поле, работая все вместе, чем если они будут работать поочерёдно каждый со своей собственной скоростью уборки ржи?

Ответ: $\frac{437}{33}$.

Задача 6.1 Центр O окружности ω лежит на окружности Ω , MN – общая хорда окружностей. Точка K лежит на Ω , оказалось, что отрезок KO пересекает биссектрису угла $\angle KMN$ на окружности ω , кроме того высоты треугольника KMN пересекаются на ω . Найдите расстояние между центрами окружностей, если $MN = 58\sqrt{3}$.

Решение. Для начала отметим, что KO – биссектриса угла $\angle NKM$. В самом деле: O – середина дуги NM окружности Ω , не содержащей точки K , то есть $\angle NKO = \angle MKO$. Пусть H – точка пересечения высот треугольника KNM , а I – точка пересечения его биссектрис. Тогда, если $\angle NKM = \alpha$, имеем $\angle NHM = 180^\circ - \alpha$ и $\angle NIM = 90^\circ + \frac{\alpha}{2}$, но так как точки N, I, H и M лежат на одной окружности, получаем уравнение на равенство вписанных углов:

$$180^\circ - \alpha = 90^\circ + \frac{\alpha}{2} \iff \alpha = 60^\circ.$$

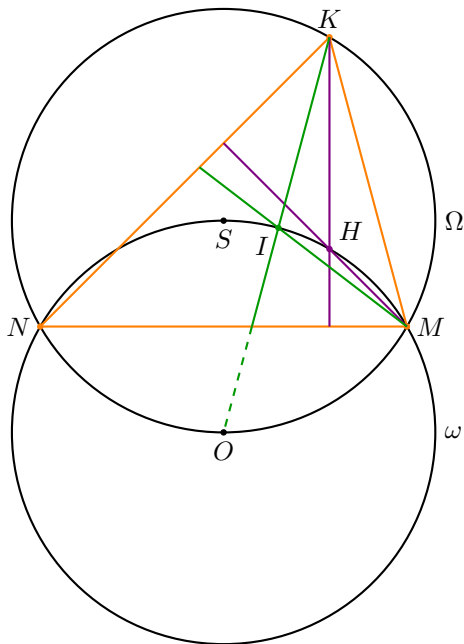
Наконец пусть S – центр окружности Ω , тогда $\angle NSM = 2 \cdot 60^\circ = 120^\circ$, то есть точка S тоже лежит на ω и расстояние между центрами окружностей SO равно радиусу окружности Ω . По теореме синусов имеем:

$$R = \frac{58\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 58.$$

Ответ: 58. ■

Задача 6.2 Центр O окружности ω лежит на окружности Ω , MN – общая хорда окружностей. Точка K лежит на Ω , оказалось, что отрезок KO пересекает биссектрису угла $\angle KMN$ на окружности ω , кроме того высоты треугольника KMN пересекаются на ω . Найдите расстояние между центрами окружностей, если $MN = 28\sqrt{3}$.

Ответ: 28.



Задача 6.3 Центр O окружности ω лежит на окружности Ω , MN – общая хорда окружностей. Точка K лежит на Ω , оказалось, что отрезок KO пересекает биссектрису угла $\angle KMN$ на окружности ω , кроме того высоты треугольника KMN пересекаются на ω . Найдите расстояние между центрами окружностей, если $MN = 33\sqrt{3}$.

Ответ: 33.

Задача 6.4 Центр O окружности ω лежит на окружности Ω , MN – общая хорда окружностей. Точка K лежит на Ω , оказалось, что отрезок KO пересекает биссектрису угла $\angle KMN$ на окружности ω , кроме того высоты треугольника KMN пересекаются на ω . Найдите расстояние между центрами окружностей, если $MN = 17\sqrt{3}$.

Ответ: 17.