

Отборочный этап. 7 класс

Задача 1 / 1. На испытательном стенде для изучения равновесия механических систем используется невесомая горизонтальная штанга, установленная на идеальном шарнире в точке O (шарнир расположен не в середине штанги). Слева от O в узлах A и B (причём A ближе к O , чем B) закреплены два калибровочных модуля масс $7m$ и $5m$ соответственно. Справа от O в узле C закреплён модуль массы $8m$. Штанга находится в равновесии, при этом $OC = 4OA$. Найдите отношение $\frac{AB}{OA}$. Ответ дайте с точностью до целого числа.

Возможное решение

Обозначим $OA = h$, $AB = x$. Тогда $OB = h + x$, а из условия $OC = 4h$. Запишем условие равновесия моментов относительно точки O :

$$8m \cdot OC = 7m \cdot OA + 5m \cdot OB.$$

Подставим выражения для расстояний:

$$8m \cdot 4h = 7m \cdot h + 5m \cdot (h + x).$$

Сократим на m и упростим:

$$32h = 7h + 5h + 5x = 12h + 5x,$$

$$20h = 5x, \quad x = 4h.$$

Следовательно,

$$\frac{AB}{OA} = \frac{x}{h} = 4.$$

Ответ: 4.

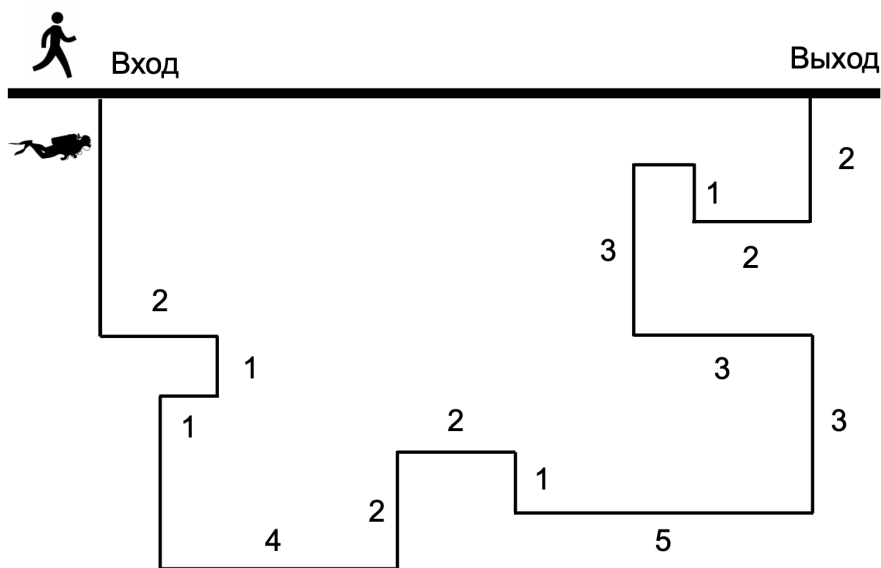
Задача 1 / 2. На испытательном стенде для изучения равновесия механических систем используется невесомая горизонтальная штанга, установленная на идеальном шарнире в точке O (шарнир расположен не в середине штанги). Слева от O в узлах A и B (причём A ближе к O , чем B) закреплены два калибровочных модуля масс $6m$ и $2m$ соответственно. Справа от O в узле C закреплён модуль массы $5m$. Штанга находится в равновесии, при этом $OC = 4OA$. Найдите отношение $\frac{AB}{OA}$. Ответ дайте с точностью до целого числа.

Ответ: 6.

Задача 2 / 1. В затопленном карьере проложен тренировочный маршрут для ныряльщика. Маршрут состоит из горизонтальных участков и вертикальных участков (спуски и подъёмы) и задан схемой на рисунке. Длины участков на схеме отмечены числами: участки с номером 1 имеют протяжённость 100 м, 2 — 200 м, 3 — 300 м, 4 — 400 м, 5 — 500 м.

Ныряльщик плывёт по горизонтальному участку со скоростью 0,9 км/ч. Благодаря комплексу снаряжения, на вертикальном спуске он движется в 2 раза быстрее, а на вертикальном подъёме — в 2 раза медленнее, чем по горизонтали.

Пока ныряльщик проходил маршрут *от входной точки до выходной точки* (см. схему), спасатель на поверхности пошел напрямую от входа до выхода со скоростью 3 км/ч. Сколько времени спасатель ждал ныряльщика у выходной точки? Ответ дайте в минутах с точностью до целого числа.



Возможное решение

Скорость движения ныряльщика по горизонтали $v = 0,9$ км/ч, при спуске $v_{\downarrow} = 2v = 1,8$ км/ч, при подъёме $v_{\uparrow} = v/2 = 0,45$ км/ч.

По схеме определим протяжённость горизонтальных участков:

$$L_{\text{гор}} = 2 + 1 + 4 + 2 + 5 + 3 + 1 + 2 = 20 \text{ участков по } 100 \text{ м.}$$

Суммарный подъём от нижнего уровня к выходу состоит из вертикальных участков протяжённостью $L_{\text{вверх}} = 2 + 3 + 3 + 2 = 10$ участков по 100 м.

Суммарный спуск от точки входа при движении к выходу состоит из вертикальных участков протяжённостью $L_{\text{вниз}} = 4 + 1 + 3 + 1 + 1 = 10$ участков по 100 м.

Тогда время движения ныряльщика:

$$t_{\text{ныр}} = \frac{L_{\text{гор}}}{v} + \frac{2L_{\text{вверх}}}{v} + \frac{L_{\text{вниз}}}{2v}.$$

Рассчитаем это время:

$$t_{\text{ныр}} = \frac{2000 + 2000 + 500}{900} = 5 \text{ ч} = 300 \text{ мин.}$$

Расстояние между входом и выходом по поверхности также определим по схеме:

$$(1 + 4 + 2 + 5) \cdot 100 \text{ м} = 1200 \text{ м,}$$

поэтому время движения спасателя равно

$$t_{\text{сп}} = \frac{1200 \text{ м}}{3000 \text{ м/ч}} = 0,4 \text{ ч} = 24 \text{ мин.}$$

Следовательно, время ожидания:

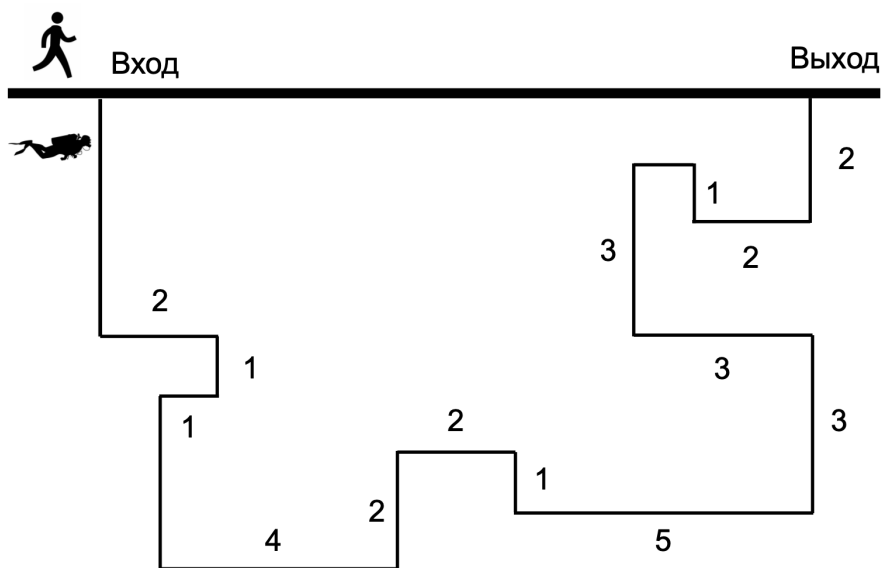
$$t_{\text{ожид}} = t_{\text{ныр}} - t_{\text{сп}} = 276 \text{ мин.}$$

Ответ: 276 мин.

Задача 2 / 2. В затопленном карьере проложен тренировочный маршрут для ныряльщика. Маршрут состоит из горизонтальных участков и вертикальных участков (спуски и подъёмы) и задан схемой на рисунке. Длины участков на схеме отмечены числами: участки с номером 1 имеют протяжённость 100 м, 2 — 200 м, 3 — 300 м, 4 — 400 м, 5 — 500 м.

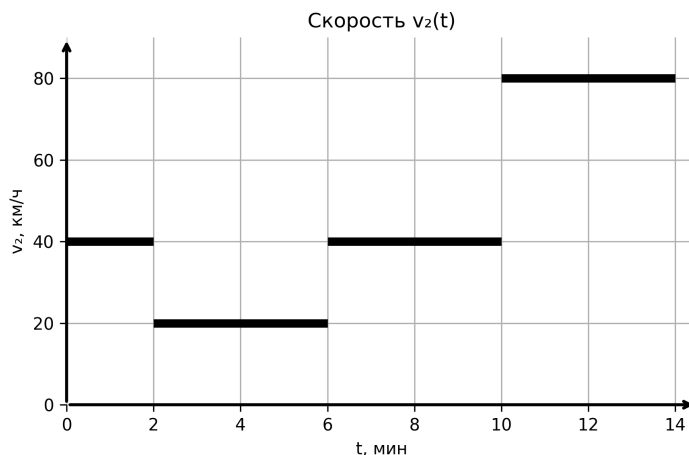
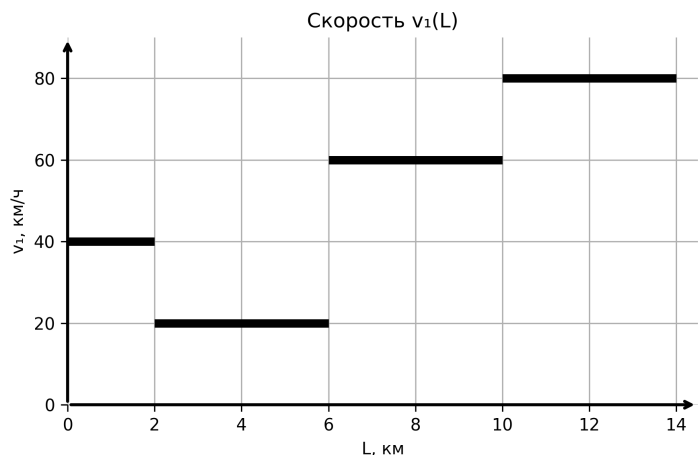
Ныряльщик плывёт по горизонтальному участку со скоростью 0,75 км/ч. Благодаря комплексу снаряжения, на вертикальном спуске он движется в 2 раза быстрее, а на вертикальном подъёме — в 2 раза медленнее, чем по горизонтали.

Пока ныряльщик проходил маршрут *от входной точки до выходной точки* (см. схему), спасатель на поверхности пошел напрямую от входа до выхода со скоростью 4 км/ч. Сколько времени спасатель ждал ныряльщика у выходной точки? Ответ дайте в минутах с точностью до целого числа.



Ответ: 342 мин.

Задача 3 / 1. Два автомобиля одновременно выехали навстречу друг другу по прямой дороге из двух населённых пунктов. Регистратор первого автомобиля записывает скорость v_1 в зависимости от пройденного пути L , а регистратор второго — скорость v_2 в зависимости от времени движения t . Показания регистраторов приведены на графиках. Известно, что через 10 минут после начала движения автомобили встретились. Какое расстояние между автомобилями будет через 2 минуты после встречи? Ответ дайте в километрах с точностью до десятых.



Возможное решение

Опишем аналитически зависимость $v_1(L)$, используя значения из первого графика:

$$v_1 = \begin{cases} 40, & 0 \leq L < 2, \\ 20, & 2 \leq L < 6, \\ 60, & 6 \leq L < 10, \\ 80, & 10 \leq L \leq 14, \end{cases} \quad (\text{км/ч})$$

а зависимость $v_2(t)$ опишем аналитически, используя второй график (время t в минутах):

$$v_2 = \begin{cases} 40, & 0 \leq t < 2, \\ 20, & 2 \leq t < 6, \\ 40, & 6 \leq t < 10, \\ 80, & 10 \leq t \leq 14, \end{cases} \quad (\text{км/ч}).$$

Автомобили встретились через 10 минут, то есть через $\frac{1}{6}$ часа.

Сначала первый автомобиль прошёл 2 км со скоростью 40 км/ч:

$$t_1 = \frac{2}{40} \text{ ч} = 0,05 \text{ ч} = 3 \text{ мин.}$$

До встречи остаётся $10 - 3 = 7$ минут. На участке $2 \leq L < 6$ первый автомобиль движется со скоростью 20 км/ч, поэтому за 7 минут он проедет

$$\Delta L = 20 \cdot \frac{7}{60} = \frac{7}{3} \text{ км,}$$

и к моменту встречи его путь равен

$$L_{\text{встр}} = 2 + \frac{7}{3} = \frac{13}{3} \text{ км.}$$

Значит, в момент встречи первый автомобиль всё ещё находится на участке со скоростью 20 км/ч и в ближайшие 2 минуты скорость не изменится (до $L = 6$ км ему осталось $\frac{5}{3}$ км, на это нужно 5 минут).

Через 2 минуты после встречи ($\frac{2}{60} = \frac{1}{30}$ часа):

$$s_1 = 20 \cdot \frac{1}{30} = \frac{2}{3} \text{ км.}$$

Для второго автомобиля после $t = 10$ минут скорость равна 80 км/ч, поэтому за 2 минуты он проедет

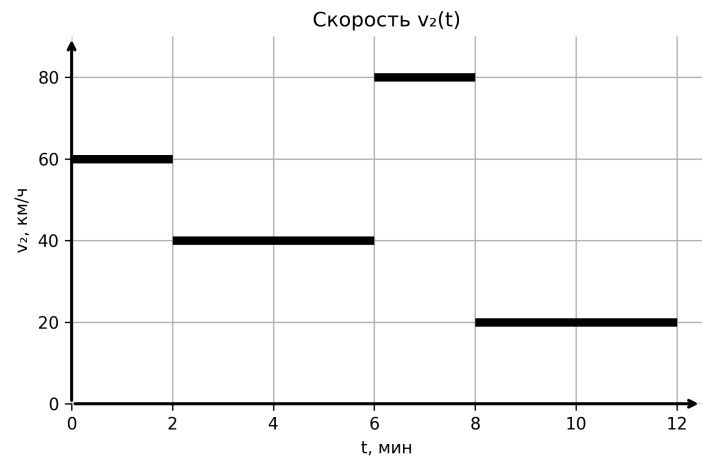
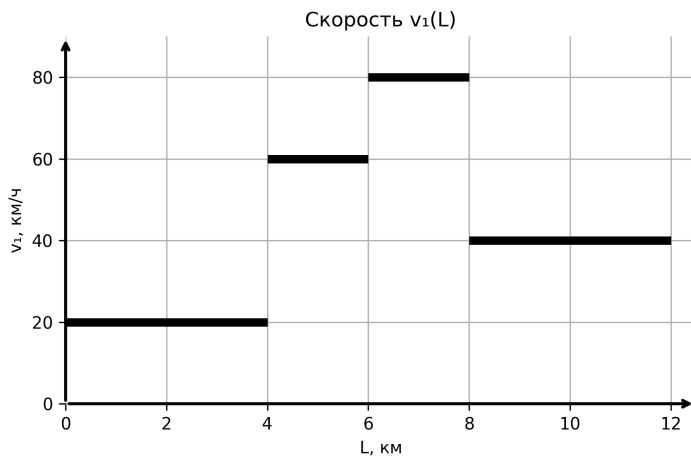
$$s_2 = 80 \cdot \frac{1}{30} = \frac{8}{3} \text{ км.}$$

Так как после встречи автомобили разъезжаются в противоположные стороны, расстояние между ними через 2 минуты равно

$$S = s_1 + s_2 = \frac{2}{3} + \frac{8}{3} = \frac{10}{3} \text{ км.}$$

Ответ: $\frac{10}{3}$ км $\approx 3,3$ км.

Задача 3 / 2. Два автомобиля одновременно выехали навстречу друг другу по прямой дороге из двух населённых пунктов. Регистратор первого автомобиля записывает скорость v_1 в зависимости от пройденного пути L , а регистратор второго — скорость v_2 в зависимости от времени движения t . Показания регистраторов приведены на графиках. Известно, что через 10 минут после начала движения автомобили встретились. Какое расстояние между автомобилями будет через 2 минуты после встречи? Ответ дайте в километрах с точностью до десятых.



Ответ: $\frac{4}{3}$ км $\approx 1,3$ км.

Задача 4 / 1. Цилиндрический поплавок плавает в воде, находясь в вертикальном положении, при этом длина погруженной части поплавка равна $h_0 = 12$ см. Если к нижнему концу поплавка прикрепить груз (груз полностью находится в воде), то длина погруженной части поплавка станет равна $h_1 = 18$ см. Если тот же груз снять и положить на верхнее основание поплавка, то груз остаётся над водой (поплавок не наклоняется, вода не покрывает верхнее основание поплавка), а длина погруженной части поплавка станет равна $h_2 = 20$ см. Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м³. Найдите плотность ρ_r материала груза. Ответ дайте в кг/м³ с точностью до целого числа.

Возможное решение

Пусть S – площадь поперечного сечения поплавка, m_0 – масса поплавка, V – объём груза, m – масса груза.

В исходном положении сила тяжести и сила Архимеда, действующие на поплавок, уравновешивают друг друга:

$$\rho g S h_0 - m_0 g = 0, \quad (1)$$

(1) Груз прикреплён снизу и полностью в воде.

В данном состоянии условие равновесия поплавка с грузом запишется в виде:

$$\rho g h_1 S + \rho g V - m_0 g - m g = 0. \quad (2)$$

(2) Груз лежит сверху и не погружен в воду.

В данном состоянии условие равновесия поплавка с грузом видоизменяется, так как груз не погружен в жидкость, следовательно, на него действует только сила тяжести:

$$\rho g h_2 S - m_0 g - m g = 0. \quad (3)$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (1), чтобы получить выражение для массы груза:

$$\rho g h_2 S - m_0 g - m g - (\rho g S h_0 - m_0 g) = 0 \implies m = \rho (h_2 - h_0) S.$$

Вычтем из уравнения (3) уравнение (2), чтобы получить выражение для объёма груза:

$$\rho g h_2 S - m_0 g - m g - (\rho g h_1 S + \rho g V - m_0 g - m g) = 0 \implies V = (h_2 - h_1) S.$$

Тогда плотность груза:

$$\rho_r = \frac{m}{V} = \frac{\rho (h_2 - h_0)}{h_2 - h_1} = 4000 \text{ кг/м}^3$$

Ответ: $\rho_r = 4000 \text{ кг/м}^3$.

Задача 4 / 2 Цилиндрический поплавок плавает в воде, находясь в вертикальном положении, при этом длина погруженной части поплавка равна $h_0 = 10$ см. Если к нижнему концу поплавка прикрепить груз (груз полностью находится в воде), то длина погруженной части поплавка станет равна $h_1 = 14$ см. Если тот же груз снять и положить на верхнее основание поплавка, то груз остаётся над водой (поплавок не наклоняется, вода не покрывает верхнее основание поплавка), а длина погруженной части поплавка станет равна $h_2 = 18$ см. Плотность воды равна $\rho = 1000$ кг/м³. Найдите плотность ρ_r материала груза. Ответ дайте в кг/м³ с точностью до целого числа.

Ответ: 2000 кг/м^3 .

Задача 5 / 1. Экспериментатор Глюк приобрёл необычные сувенирные часы. Из-за дефекта механизма минутная стрелка движется неравномерно: первую половину круга (от «12» до «6») она проходит с угловой скоростью $\omega_1 = 450^\circ/\text{ч}$, а вторую половину круга (от «6» до «12») — со скоростью $\omega_2 = 900^\circ/\text{ч}$. На сколько минут реального времени будут спешить такие часы за каждый час своего «собственного» времени? Ответ дайте с точностью до целого числа.

Теоретическая справка: Угловая скорость ω минутной стрелки — физическая величина, равная: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — изменение между начальным (φ_1) и конечным (φ_2) положением минутной стрелки, а $\Delta t = t_2 - t_1$ — промежуток времени прошедший от начального (t_1) до конечного (t_2) момента движения стрелки.

Возможное решение

Полный оборот минутной стрелки соответствует углу 360° . Таким образом, каждая половина круга составляет $\alpha = 180^\circ$.

Найдем время (в реальных часах), затраченное на прохождение каждой половины круга:

$$T_1 = \frac{\alpha}{\omega_1} = \frac{180}{450} = 0,4 \text{ ч},$$

$$T_2 = \frac{\alpha}{\omega_2} = \frac{180}{900} = 0,2 \text{ ч}.$$

Суммарное реальное время одного полного оборота стрелки составляет:

$$T = T_1 + T_2 = 0,4 + 0,2 = 0,6 \text{ ч}.$$

Переведем это значение в минуты: $0,6 \times 60 = 36$ минут.

В исправных часах минутная стрелка совершает полный оборот ровно за 60 минут. Часы Глюка совершают оборот за 36 минут реального времени. Следовательно, за каждый свой «час» они будут спешить на:

$$\Delta t = 60 - 36 = 24 \text{ минуты}.$$

Ответ: 24 мин.

Задача 5 / 2. Экспериментатор Глюк приобрёл необычные сувенирные часы. Из-за дефекта механизма минутная стрелка движется неравномерно: первую половину круга (от «12» до «6») она проходит с угловой скоростью $\omega_1 = 360^\circ/\text{ч}$, а вторую половину круга (от «6» до «12») — со скоростью $\omega_2 = 720^\circ/\text{ч}$. На сколько минут реального времени будут спешить такие часы за каждый час своего «собственного» времени? Ответ дайте с точностью до целого числа.

Теоретическая справка: Угловая скорость ω минутной стрелки — физическая величина, равная: $\omega = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$, где $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ — изменение между начальным (φ_1) и конечным (φ_2) положением минутной стрелки, а $\Delta t = t_2 - t_1$ — промежуток времени прошедший от начального (t_1) до конечного (t_2) момента движения стрелки.

Ответ: 15 мин.

Отборочный этап. 8 класс

Задача 1 / 1. В бутылку объёмом $V = 2$ л засыпали ледяные градины массы $m_{\text{л}} = 1,0$ кг. Оставшееся свободное место в бутылке заполнили водой до самого края. Начальная температура воды равна $t_0 = 97^\circ\text{C}$, после полного таяния града температура содержимого бутылки стала равна $t = 3^\circ\text{C}$. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Найдите начальную температуру t_1 ледяных градин. Ответ дайте в градусах Цельсия с точностью до целого числа.

Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ $^\circ\text{C}$); удельная теплоёмкость льда $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг $\cdot$ $^\circ\text{C}$); удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг; плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м³; плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³.

Возможное решение

Объём бутылки равен V , объём льда массой $m_{\text{л}}$:

$$V_{\text{л}} = \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}}.$$

Тогда объём долитой воды

$$V_{\text{в}} = V - V_{\text{л}} = V - \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}},$$

а её масса

$$m_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} V_{\text{в}} = \rho_{\text{в}} \left(V - \frac{m_{\text{л}}}{\rho_{\text{л}}} \right).$$

Горячая вода остыла от температуры t_0 до t , отдав при этом количество теплоты

$$Q_{\text{отд}} = c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_0 - t).$$

Лёд, имея начальную температуру $t_1 < 0^\circ\text{C}$, сначала нагрелся до температуры 0°C , затем расплавился и полученная вода нагрелась до температуры t :

$$Q_{\text{пол}} = c_{\text{л}} m_{\text{л}} (0^\circ\text{C} - t_1) + \lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} (t - 0^\circ\text{C}).$$

По условию теплотеря нет, значит $Q_{\text{отд}} = Q_{\text{пол}}$. Уравнение теплового баланса с учетом полученных выражений:

$$c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_0 - t) = -c_{\text{л}} m_{\text{л}} t_1 + \lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} t.$$

Отсюда

$$t_1 = \frac{\lambda m_{\text{л}} + c_{\text{в}} m_{\text{л}} t - c_{\text{в}} m_{\text{в}} (t_0 - t)}{c_{\text{л}} m_{\text{л}}} \approx -4^\circ\text{C}.$$

Ответ: $t_1 \approx -4^\circ\text{C}$.

Задача 1 / 2. В бутылку объёмом $V = 1,5$ л засыпали ледяные градины массы $m_{\text{л}} = 0,7$ кг. Оставшееся свободное место в бутылке заполнили водой до самого края. Начальная температура воды равна $t_0 = 83^\circ\text{C}$, после полного таяния града температура содержимого бутылки стала равна $t = 2^\circ\text{C}$. Теплообменом с окружающей средой пренебречь. Найдите начальную температуру t_1 ледяных градин. Ответ дайте в градусах Цельсия с точностью до целого числа.

Удельная теплоёмкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг $\cdot$ $^\circ\text{C}$); удельная теплоёмкость льда $c_{\text{л}} = 2100$ Дж/(кг $\cdot$ $^\circ\text{C}$); удельная теплота плавления льда $\lambda = 330$ кДж/кг; плотность льда $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м³; плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³.

Ответ: $t_1 \approx -6^\circ\text{C}$.

Задача 2 / 1. Имеется система из трех одинаковых вертикальных сообщающихся сосудов, частично заполненных водой. Площадь поперечного сечения каждого сосуда равна S . В левый сосуд доливают слой керосина высотой $H_1 = 20$ см, а в правый сосуд – слой масла высотой $H_2 = 10$ см. Жидкости не смешиваются и не выливаются из трубок. На сколько изменится уровень воды в среднем сосуде по сравнению с первоначальным после установления равновесия? Ответ дайте в сантиметрах с точностью до десятых. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³; плотность керосина $\rho_{\text{к}} = 800$ кг/м³; плотность масла $\rho_{\text{м}} = 900$ кг/м³.

Возможное решение

Обозначим искомое изменение уровня воды в среднем сосуде как Δh_{mid} . Пусть уровни воды в левом и правом сосудах опустились на x и y соответственно.

Поскольку объем воды не изменился, то в центральном колене уровень воды поднялся на высоту:

$$\Delta h_{\text{mid}} = x + y \quad (1)$$

Запишем условие равенства давлений в левом и центральном сосудах на уровне границы раздела вода-керосин:

$$P_{\text{left}} = P_{\text{mid}} \implies \rho_{\text{к}} g H_1 = \rho_{\text{в}} g (\Delta h_{\text{mid}} + x) \quad (2)$$

Аналогично для правого и центрального сосудов:

$$P_{\text{right}} = P_{\text{mid}} \implies \rho_{\text{м}} g H_2 = \rho_{\text{в}} g (\Delta h_{\text{mid}} + y) \quad (3)$$

Складывая уравнения (2) и (3) с учетом выражения (1):

$$\rho_{\text{к}} g H_1 + \rho_{\text{м}} g H_2 = \rho_{\text{в}} g (\Delta h_{\text{mid}} + x + \Delta h_{\text{mid}} + y) = 3 \rho_{\text{в}} g \Delta h_{\text{mid}}$$

Откуда получаем:

$$\Delta h_{\text{mid}} = \frac{\rho_{\text{к}} H_1 + \rho_{\text{м}} H_2}{3 \rho_{\text{в}}} \approx 8,3 \text{ см.}$$

Ответ: $\Delta h_{\text{mid}} = 8,3$ см.

Задача 2 / 2. Имеется система из трех одинаковых вертикальных сообщающихся сосудов, частично заполненных водой. Площадь поперечного сечения каждого сосуда равна S . В левый сосуд доливают слой керосина высотой $H_1 = 24$ см, а в правый сосуд – слой масла высотой $H_2 = 12$ см. Жидкости не смешиваются и не выливаются из трубок. На сколько изменится уровень воды в среднем сосуде по сравнению с первоначальным после установления равновесия? Ответ дайте в сантиметрах с точностью до десятых. Плотность воды $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³; плотность керосина $\rho_{\text{к}} = 780$ кг/м³; плотность масла $\rho_{\text{м}} = 920$ кг/м³.

Ответ: $\Delta h_{\text{mid}} = 9,9$ см.

Задача 3 / 1. Ученик восьмого класса Вова хочет использовать гелиевые воздушные шары, чтобы поднять себя над землей вместе со стулом, на котором он сидит. Радиус каждого воздушного шара равен $R = 30$ см, а общая масса Вовы и стула равна $m = 90$ кг. В ответе укажите минимальное количество шариков, которое ему потребуется. Плотность гелия $\rho_{\text{гелия}} = 0,18$ кг/м³; плотность воздуха $\rho_{\text{воздуха}} = 1,29$ кг/м³; $\pi = 3,14$. Считайте, что масса оболочки воздушного шара пренебрежимо мала. Объёмом Вовы и стула по сравнению с суммарным объёмом гелиевых шариков пренебречь.

Примечание: объём шара радиуса R можно вычислить по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Возможное решение

Для того, чтобы вся конструкция поднялась над землей, необходимо, чтобы сила Архимеда, действующая на шары, превосходила силу тяжести конструкции. Масса всей системы состоит из массы Вовы, массы стула, а также массы гелия в шарах. Пусть N – количество шаров. Таким образом,

$$F_{\text{тяжести}} < F_{\text{Архимеда}}.$$

С учетом выражения для силы Архимеда:

$$(m + \rho_{\text{гелия}}NV_{\text{шара}})g < \rho_{\text{воздуха}}gNV_{\text{шара}}.$$

Перегруппируем слагаемые в частях неравенства:

$$m < (\rho_{\text{воздуха}} - \rho_{\text{гелия}})NV_{\text{шара}}.$$

Тогда необходимое количество шаров удовлетворяет неравенству:

$$N > \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3(\rho_{\text{воздуха}} - \rho_{\text{гелия}})} \approx 717,3.$$

Откуда следует, что минимальное количество шаров равно 718.

Ответ: $N_{\text{мин}} = 718$.

Задача 3 / 2. Ученик восьмого класса Вова хочет использовать гелиевые воздушные шары, чтобы поднять себя над землей вместе со стулом, на котором он сидит. Радиус каждого воздушного шара равен $R = 35$ см, а общая масса Вовы и стула равна $m = 80$ кг. В ответе укажите минимальное количество шариков, которое ему потребуется. Плотность гелия $\rho_{\text{гелия}} = 0,18$ кг/м³; плотность воздуха $\rho_{\text{воздуха}} = 1,29$ кг/м³; $\pi = 3,14$. Считайте, что масса оболочки воздушного шара пренебрежимо мала. Объёмом Вовы и стула по сравнению с суммарным объёмом гелиевых шариков пренебречь.

Примечание: объём шара радиуса R можно вычислить по формуле $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ответ: $N_{\text{мин}} = 402$.

Задача 4 / 1. Шурик проводит опыт по изучению теплопроводности теплоизоляционных материалов. У него есть два одинаковых герметичных контейнера с одинаковой площадью поверхности, помещенных в лаборатории, где температура воздуха постоянна и равна $t_{\text{лаб}} = 20^\circ\text{C}$. Первый контейнер Шурик покрыл слоем теплоизоляции из материала A толщиной $d_1 = 4$ см. Внутри этого контейнера поддерживается температура $t_1 = 50^\circ\text{C}$. Для поддержания этой температуры требуется мощность нагревателя $P_1 = 15$ Вт. Второй контейнер покрыт слоем теплоизоляции из материала B толщиной $d_2 = 2$ см, а внутренняя температура во втором контейнере равна $t_2 = 30^\circ\text{C}$.

Мощность P теплоотдачи через теплоизоляционный слой можно вычислить по формуле:

$$P = \lambda \frac{S \Delta t}{d},$$

где Δt – разность температур на границах слоя, S – площадь поперечного сечения слоя, d – толщина слоя, λ – коэффициент теплопроводности материала теплоизоляционного слоя.

Известно, что коэффициент теплопроводности материала B в два раза больше, чем у материала A : $\lambda_B = 2\lambda_A$. Найдите мощность P_2 , необходимую для поддержания температуры t_2 во втором контейнере. Ответ дайте в ваттах с точностью до целого числа.

Возможное решение

Запишем выражения для мощностей теплоотдачи через теплоизоляционный слой в первом и втором контейнерах:

$$P_1 = \lambda_A \frac{S(t_1 - t_{\text{лаб}})}{d_1}$$

$$P_2 = \lambda_B \frac{S(t_2 - t_{\text{лаб}})}{d_2}$$

Разделив уравнения друг на друга, получим:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} \frac{(t_2 - t_{\text{лаб}})}{(t_1 - t_{\text{лаб}})} \frac{d_1}{d_2}$$

Откуда находим искомую мощность:

$$P_2 = \frac{\lambda_B}{\lambda_A} \frac{(t_2 - t_{\text{лаб}})}{(t_1 - t_{\text{лаб}})} \frac{d_1}{d_2} P_1 = 20 \text{ Вт.}$$

Ответ: $P_2 = 20 \text{ Вт.}$

Задача 4 / 2. Шурик проводит опыт по изучению теплопроводности теплоизоляционных материалов. У него есть два одинаковых герметичных контейнера с одинаковой площадью поверхности, помещенных в лаборатории, где температура воздуха постоянна и равна $t_{\text{лаб}} = 18^\circ\text{C}$. Первый контейнер Шурик покрыл слоем теплоизоляции из материала A толщиной $d_1 = 5$ см. Внутри этого контейнера поддерживается температура $t_1 = 48^\circ\text{C}$. Для поддержания этой температуры требуется мощность нагревателя $P_1 = 12$ Вт. Второй контейнер покрыт слоем теплоизоляции из материала B толщиной $d_2 = 3$ см, а внутренняя температура во втором контейнере равна $t_2 = 33^\circ\text{C}$.

Мощность P теплоотдачи через теплоизоляционный слой можно вычислить по формуле:

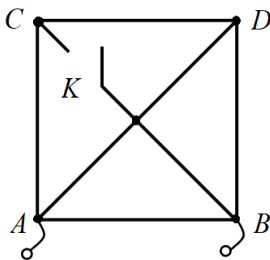
$$P = \lambda \frac{S \Delta t}{d},$$

где Δt – разность температур на границах слоя, S – площадь поперечного сечения слоя, d – толщина слоя, λ – коэффициент теплопроводности материала теплоизоляционного слоя.

Известно, что коэффициент теплопроводности материала B в полтора раза больше, чем у материала A : $\lambda_B = 1,5\lambda_A$. Найдите мощность P_2 , необходимую для поддержания температуры t_2 во втором контейнере. Ответ дайте в ваттах с точностью до целого числа.

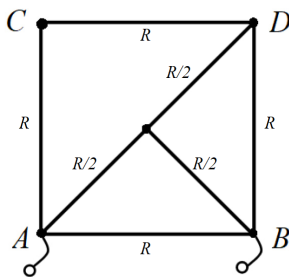
Ответ: $P_2 = 15 \text{ Вт.}$

Задача 5 / 1. На схеме изображён электрический контур в форме квадрата. Все четыре стороны квадрата и обе его диагонали – проволочные отрезки с одинаковыми сопротивлениями $R = 1$ Ом. Центральная точка квадрата является узлом и делит проволочные отрезки диагоналей пополам. Систему подключают к источнику постоянного тока к точкам A и B . Найдите, на сколько процентов уменьшится общее сопротивление контура после замыкания ключа K . Проволочный отрезок BC диагонали квадрата с замкнутым ключом K имеет сопротивление $R = 1$ Ом. Ответ округлите до целого числа.

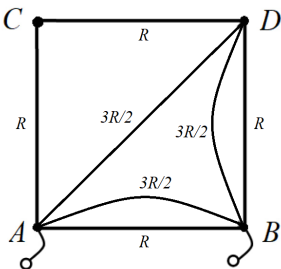


Возможное решение

При разомкнутом ключе схема цепи выглядит следующим образом:



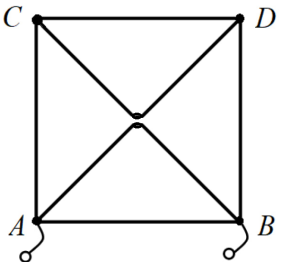
Заменим эквивалентным преобразованием «звезду» из трёх резисторов в центре схемы на «треугольник»:



Получив цепь, состоящую из попарно параллельно соединенных резисторов, получаем эквивалентное сопротивление между точками A и B :

$$R_{\text{раз}} = \frac{17}{40} R.$$

При замкнутом ключе схема упрощается, при этом центральный узел схемы может быть разделен ввиду симметрии схемы:



и эквивалентное сопротивление между A и B становится

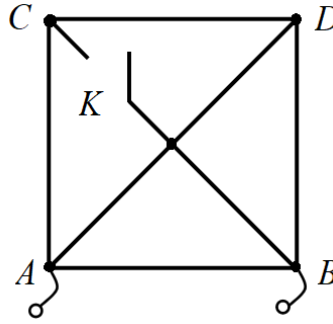
$$R_{\text{зам}} = \frac{5}{12} R.$$

Процент уменьшения сопротивления:

$$p = \frac{R_{\text{раз}} - R_{\text{зам}}}{R_{\text{раз}}} \cdot 100\% \approx 2\%.$$

Ответ: 2%.

Задача 5 / 2. На схеме изображён электрический контур в форме квадрата. Все четыре стороны квадрата и обе его диагонали – проволочные отрезки с одинаковыми сопротивлениями $R = 2$ Ом. Центральная точка квадрата является узлом и делит проволочные отрезки диагоналей пополам. Систему подключают к источнику постоянного тока к точкам A и B . Найдите, на сколько уменьшится общее сопротивление контура после замыкания ключа. Проволочный отрезок BC диагонали квадрата с замкнутым ключом K имеет сопротивление $R = 2$ Ом. Ответ дайте в омах с точностью до сотых.



Ответ: $|\Delta R| = 0,02$ Ом.

Отборочный этап. 9 класс

Задача 1 / 1. Самолет авиакомпании «Полет с умом» ускоряется из состояния покоя, чтобы взлететь со взлетно-посадочной полосы. При разгоне существует точка невозврата, по достижении которой пилот уже не сможет остановить самолет до конца взлетно-посадочной полосы, если ему не удастся взлететь. Длина взлетно-посадочной полосы составляет $s = 2$ км, модуль ускорения самолета при разгоне равен $a_1 = 3$ м/с², модуль ускорения самолета при торможении равен $a_2 = 2$ м/с². Найдите промежуток времени t_1 от начала разгона до достижения точки невозврата. Ответ дайте в секундах с точностью до десятых.

Возможное решение

Пусть t_1 - время, за которое самолёт разгоняется до максимальной скорости v , а t_2 - время, за которое самолёт остановится до момента выхода за пределы взлетно-посадочной полосы. Тогда:

$$v = a_1 t_1 = a_2 t_2$$

Соответственно расстояния, которые самолет преодолит в процессе разгона S_1 и торможения S_2 будут равны:

$$s_1 = \frac{1}{2} a_1 t_1^2, \quad s_2 = \frac{1}{2} a_2 t_2^2$$

Поскольку $t_1/t_2 = a_2/a_1$ и $s = s_1 + s_2$, найдем время t_1 :

$$s = \frac{a_1}{2} t_1^2 + \frac{a_1^2}{2a_2} t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{s \frac{2a_2}{a_1 a_2 + a_1^2}} \approx 23,1 \text{ с}$$

Ответ: $t = 23,1 \text{ с}$

Задача 1 / 2. Самолет авиакомпании «Полет с умом» ускоряется из состояния покоя, чтобы взлететь со взлетно-посадочной полосы. При разгоне существует точка невозврата, по достижении которой пилот уже не сможет остановить самолет до конца взлетно-посадочной полосы, если ему не удастся взлететь. Длина взлетно-посадочной полосы составляет $s = 2$ км, модуль ускорения самолета при разгоне равен $a_1 = 3$ м/с², модуль ускорения самолета при торможении равен $a_2 = 2$ м/с². Найдите максимальную скорость самолета v . Ответ дайте в м/с с точностью до десятых.

Ответ: $v = 69,3 \text{ м/с}$

Задача 2 / 1. Человек стоит в лифте на напольных весах. Лифт стартует из состояния покоя и движется так, что показания весов меняются в процессе движения: первые $\Delta t_1 = 2$ с показания равны $P_1 = 660$ Н, затем в течение промежутка времени $\Delta t_2 = 8$ с весы показывали $P_2 = 600$ Н, и последние $\Delta t_3 = 2$ с до полной остановки лифта показания весов составляли 540 Н. Считайте, что на каждом временном интервале ускорение лифта оставалось постоянным. На какую высоту поднялся лифт? Ответ дайте в метрах с точностью до целого. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Возможное решение

Показания весов равны силе реакции опоры N . При движении лифта с ускорением a (направленным вверх) выполняется II закон Ньютона:

$$N_2 = m(g + a).$$

Найдём массу человека. На среднем участке сила реакции опоры равна $N_2 = P_2 = 600$ Н и $a = 0$, значит:

$$N_2 = mg \Rightarrow m = \frac{N_2}{g} = 60 \text{ кг}.$$

Рассмотрим участок разгона. Здесь $N_1 = P_1 = 660$ Н:

$$N_1 = m(g + a) \Rightarrow a = \frac{N_1}{m} - g = 1 \text{ м/с}^2.$$

Начальная скорость равна нулю, поэтому к концу разгона скорость v равна:

$$v = a\Delta t_1 = 2 \text{ м/с}.$$

Путь на участке разгона s_1 равен:

$$s_1 = \frac{a\Delta t_1^2}{2} = 2 \text{ м}.$$

При равномерном движении скорость лифта постоянна $v = 2 \text{ м/с}$, поэтому путь на этом участке s_2 равен:

$$s_2 = v\Delta t_2 = 16 \text{ м}.$$

При торможении ускорение направлено вниз. Здесь $N_3 = P_3 = 540$ Н:

$$N_3 = m(g - a_3) \Rightarrow a = g - \frac{N_3}{m} = 1 \text{ м/с}^2.$$

Путь s_3 при равнозамедленном движении:

$$s_3 = v\Delta t_3 - \frac{a\Delta t_3^2}{2} = 2 \text{ м}.$$

Найдём общую высоту подъёма:

$$h = s_1 + s_2 + s_3 = 2 + 16 + 2 = 20 \text{ м}.$$

Ответ: $h = 20 \text{ м}$.

Задача 2 / 2 Человек стоит в лифте на напольных весах. Лифт стартует из состояния покоя и движется так, что показания весов меняются в процессе движения: первые $\Delta t_1 = 2$ с показания равны $P_1 = 600$ Н, затем в течение промежутка времени $\Delta t_2 = 8$ с весы показывали $P_2 = 500$ Н, и последние $\Delta t_3 = \frac{4}{3}$ с до полной остановки лифта показания весов составляли 350 Н. Считайте, что на каждом временном интервале ускорение лифта оставалось постоянным. На какую высоту поднялся лифт? Ответ дайте в метрах с точностью до десятых. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Ответ: $h = 38,7 \text{ м}$.

Задача 3 / 1 Команда корабля «Курчатов» проводит испытания сверхчувствительной тормозной системы. Испытание разбито на 10 временных интервалов. Длительность первого интервала равна $t_1 = 1$ с, каждый последующий интервал в $p = 9$ раза длиннее предыдущего. Корабль движется прямолинейно и на каждом интервале испытания скорость движения корабля постоянна. На первом интервале скорость корабля составляет $v_1 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. На каждом последующем интервале скорость в $q = 3$ раз меньше, чем на предыдущем интервале. Найдите среднюю скорость движения корабля за время испытания. Ответ дайте в мкм/с с точностью до целого числа микрометров в секунду.

Возможное решение

Время интервала n составляет

$$t_n = t_1 p^{n-1}$$

Общее время испытания находится как сумма 10 членов геометрической прогрессии:

$$T = t_1 \frac{1 - p^{10}}{1 - p} = \frac{1 - 9^{10}}{1 - 9} \text{с} = \frac{1}{8}(9^{10} - 1) \text{с}$$

Аналогично, путь, проходимый на промежутке n равен:

$$s_n = v_1 t_1 (p/q)^{n-1}$$

Тогда общий путь:

$$S = v_1 t_1 \frac{1 - (p/q)^{10}}{1 - (p/q)} = \frac{1}{2}(3^{10} - 1) \text{м}$$

Найдем среднюю скорость:

$$V = \frac{S}{T} = \frac{8}{2} \cdot \frac{3^{10} - 1}{9^{10} - 1} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{4}{3^{10} + 1} \frac{\text{м}}{\text{с}} = \frac{4}{59049} \frac{\text{м}}{\text{с}} \approx 68 \frac{\text{мкм}}{\text{с}}$$

Ответ:

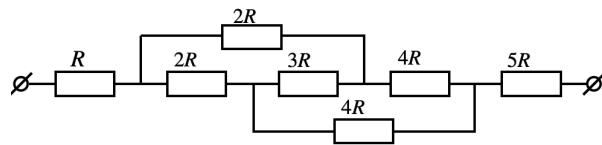
$$V = 68 \frac{\text{мкм}}{\text{с}}$$

Задача 3 / 2 Команда корабля «Курчатов» проводит испытания сверхчувствительной тормозной системы. Испытание разбито на 10 временных интервалов. Длительность первого интервала равна $t_1 = 1$ с, каждый последующий интервал в $p = 4$ раза длиннее предыдущего. Корабль движется прямолинейно и на каждом интервале испытания скорость движения корабля постоянна. На первом интервале скорость корабля составляет $v_1 = 1 \frac{\text{м}}{\text{с}}$. На каждом последующем интервале скорость в $q = 2$ раз меньше, чем на предыдущем интервале. Найдите среднюю скорость движения корабля за время испытания. Ответ дайте в мм/с с точностью до целого числа.

Ответ:

$$V = 3 \frac{\text{мм}}{\text{с}}$$

Задача 4 / 1. На рисунке изображен участок цепи, состоящий из резисторов. Сопротивления всех резисторов заданы в виде nR , где R – сопротивление первого резистора. Найдите отношение сопротивления $R_{\text{уч}}$ этого участка цепи к сопротивлению R . Ответ дайте с точностью до целого числа.



Возможное решение

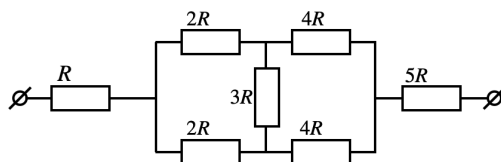


Рис. 1

Схема, приведенная в условии, может быть изображена в виде, показанном на рисунке 1. Из соображений симметрии ток через резистор с сопротивлением $3R$ никогда не течет. Следовательно, указанная схема эквивалентна схеме на рисунке 2.

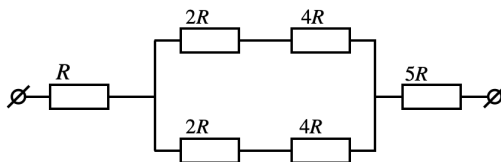


Рис. 2

Эта схема состоит из трех последовательно подключенных участков. Первый участок имеет сопротивление $R_1 = R$. Второй участок с параллельным подключением резисторов имеет сопротивление R_2 , равное

$$R_2 = \frac{1}{\frac{1}{2R+4R} + \frac{1}{2R+4R}} = 3R$$

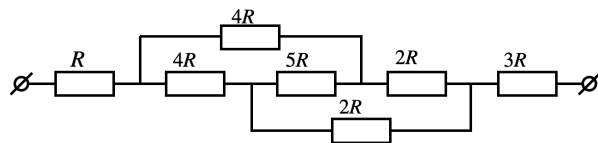
Сопротивление третьего участка: $R_3 = 5R$

Найдем общее сопротивление:

$$R_{\text{уч}} = R_1 + R_2 + R_3 = 9R$$

Ответ: 9

Задача 4 / 2. На рисунке изображен участок цепи, состоящий из резисторов. Сопротивления всех резисторов заданы в виде nR , где R – сопротивление первого резистора. Найдите отношение сопротивления $R_{\text{уч}}$ этого участка цепи к сопротивлению R . Ответ дайте с точностью до целого числа.



Ответ: 7

Задача 5 / 1 В калориметре в состоянии теплового равновесия находятся $m_1 = 300$ г воды и $m_2 = 100$ г алюминиевых опилок при температуре $t_1 = 40^\circ\text{C}$. Теплоёмкость калориметра $C_{\text{кал}} = 50$ Дж/ $^\circ\text{C}$. В калориметр добавили лёд массы $m_i = 50$ г при температуре $t_i = -10^\circ\text{C}$ и твёрдую углекислоту массы $m_{\text{уг}}$ при температуре $t_{\text{уг}} = -78^\circ\text{C}$. Углекислота полностью перешла в газообразное состояние (данное вещество *сублимирует* – переходит из твердого агрегатного состояния сразу в газообразное состояние при нормальном атмосферном давлении), и после установления теплового равновесия покинула систему при температуре $t_2 = 10^\circ\text{C}$. Найдите начальную массу $m_{\text{уг}}$ углекислоты. Ответ дайте в килограммах с точностью до сотых.

Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2,1$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплоемкость алюминия $c_{\text{ал}} = 0,90$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплоемкость газообразной углекислоты $c_{\text{г}} = 0,84$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33$ МДж/кг, удельная теплота перехода углекислоты в газообразное состояние $\lambda_{\text{уг}} = 0,38$ МДж/кг.

Возможное решение

Теплоту отдают вода, алюминий и калориметр при охлаждении до t_2 :

$$Q_{\text{отд}} = (m_1 c_{\text{в}} + m_2 c_{\text{ал}} + C_{\text{кал}})(t_1 - t_2).$$

Теплоту получает лёд для нагрева, плавления и дальнейшего нагрева воды:

$$Q_{\text{лёд}} = m_i(c_{\text{л}}|t_i| + \lambda + c_{\text{в}}t_2).$$

Энергия, затраченная на фазовый переход углекислоты и нагрев полученного газа:

$$Q_{\text{уг}} = m_{\text{уг}}(\lambda_{\text{уг}} + c_{\text{г}}(t_2 - t_{\text{уг}})).$$

Напишем уравнение теплового баланса:

$$Q_{\text{отд}} = Q_{\text{лёд}} + Q_{\text{уг}}$$

$$(m_1 c_{\text{в}} + m_2 c_{\text{ал}} + C_{\text{кал}})(t_1 - t_2) = m_i(c_{\text{л}}|t_i| + \lambda + c_{\text{в}}t_2) + m_{\text{уг}}(\lambda_{\text{уг}} + c_{\text{г}}(t_2 - t_{\text{уг}}))$$

Найдем начальную массу:

$$m_{\text{уг}} = \frac{(m_1 c_{\text{в}} + m_2 c_{\text{ал}} + C_{\text{кал}})(t_1 - t_2) - m_i(c_{\text{л}}|t_i| + \lambda + c_{\text{в}}t_2)}{(\lambda_{\text{уг}} + c_{\text{г}}(t_2 - t_{\text{уг}}))} \approx 0,05$$

Ответ: 0,05 кг.

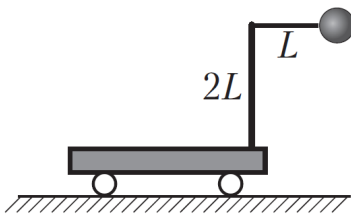
Задача 5 / 2 В калориметре в состоянии теплового равновесия находятся $m_1 = 250$ г воды и $m_2 = 120$ г алюминиевых опилок при температуре $t_1 = 35^\circ\text{C}$. Теплоёмкость калориметра $C_{\text{кал}} = 60$ Дж/ $^\circ\text{C}$. В калориметр добавили лёд массы $m_i = 60$ г при температуре $t_i = -15^\circ\text{C}$ и твёрдую углекислоту массы $m_{\text{уг}}$ при температуре $t_{\text{уг}} = -78^\circ\text{C}$. Углекислота полностью перешла в газообразное состояние (данное вещество *сублимирует* – переходит из твердого агрегатного состояния сразу в газообразное состояние при нормальном атмосферном давлении), и после установления теплового равновесия покинула систему при температуре $t_2 = 12^\circ\text{C}$. Найдите начальную массу $m_{\text{уг}}$ углекислоты. Ответ дайте в килограммах с точностью до сотых.

Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4,2$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплоемкость льда $c_{\text{л}} = 2,1$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплоемкость алюминия $c_{\text{ал}} = 0,90$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплоемкость газообразной углекислоты $c_{\text{г}} = 0,84$ кДж/(кг $\cdot^\circ\text{C}$), удельная теплота плавления льда $\lambda = 0,33$ МДж/кг, удельная теплота перехода углекислоты в газообразное состояние $\lambda_{\text{уг}} = 0,38$ МДж/кг.

Ответ: 0,01 кг.

Отборочный этап. 10 класс

Задача 1 / 1. Шарик массы $m = 210$ г подвешен на нити длины $L = 1,0$ м к перекладине, закреплённой на длинной тележке массой $M = 1,0$ кг. Высота перекладины равна $2L$. Тележка может свободно перемещаться по горизонтальной плоскости, не опрокидываясь. Нить отклонили на угол 90° и отпустили. Когда шарик оказался в нижней точке, нить оборвалась. На каком расстоянии s от основания перекладины шарик упадёт на тележку? Ответ дайте в метрах с точностью до десятых.



Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Возможное решение

Рассмотрим движение шарика и тележки после того, как нить была отпущена. Пока нить не оборвалась, система «шарик + тележка» замкнута вдоль оси Ox . Следовательно, выполняется закон сохранения проекции импульса на ось Ox и закон сохранения энергии.

В момент, когда нить занимает вертикальное положение и готова оборваться, вся потенциальная энергия шарика превращается в кинетическую энергию шарика и тележки:

$$mgL = \frac{Mv^2}{2} + \frac{mu^2}{2},$$

где u — скорость шарика, а v — скорость тележки.

Из закона сохранения проекции импульса:

$$0 = mu - Mv.$$

Отсюда $v = \frac{m}{M}u$.

Подставим это выражение в уравнение энергии:

$$mgL = \frac{M}{2} \left(\frac{m^2 u^2}{M^2} \right) + \frac{mu^2}{2},$$

$$mgL = \frac{mu^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \right).$$

Отсюда:

$$u = \sqrt{\frac{2gL M}{M+m}}, \quad v = \frac{m}{M}u = \sqrt{\frac{2gL m^2}{M(M+m)}}.$$

После обрыва нити шарик начинает движение по параболе, падая с высоты L (высота над уровнем тележки). Время падения определяется по формуле:

$$t = \sqrt{\frac{2L}{g}}.$$

Горизонтальное перемещение шарика относительно земли:

$$x_{\text{ш}} = ut,$$

а тележки:

$$x_{\text{т}} = vt.$$

Итак, расстояние между шариком и тележкой в момент падения шарика на тележку:

$$s = x_{\text{ш}} + x_{\text{т}} = (u + v)t.$$

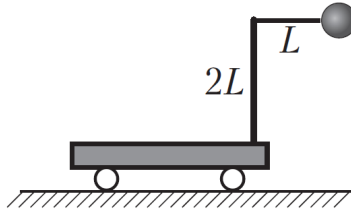
Подставим найденные значения скоростей и времени:

$$s = (u + v)t = 2L \sqrt{\frac{m+M}{M}}.$$

Ответ: 2,2 м;

Задача 1 / 2.

Шарик массы $m = 410$ г подвешен на нити длины $L = 1,0$ м к перекладине, закреплённой на длинной тележке массой $M = 4,0$ кг. Высота перекладины равна $2L$. Тележка может свободно перемещаться по горизонтальной плоскости, не опрокидываясь. Нить отклонили на угол 90° и отпустили. Когда шарик оказался в нижней точке, нить оборвалась. На каком расстоянии s от основания перекладины шарик упадёт на тележку? Ответ дайте в метрах с точностью до десятых.



Трением пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$.

Ответ: 2,1 м.

Задача 2 / 1. Тонкий однородный стержень массы $m = 1,9$ кг и длины $l = 152$ см одним концом опирается на гладкий горизонтальный пол, а вторым опирается на гладкую вертикальную стену. Стержень удерживается в равновесии с помощью горизонтальной пружины, соединяющей нижний конец доски с основанием стены. Жесткость пружины $k = 28 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, удлинение пружины в состоянии равновесия системы $\Delta x = 10$ см. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Найдите длину пружины l_0 в нерастянутом состоянии. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

Возможное решение

Рассмотрим силы, действующие на стержень:

- сила тяжести mg , приложенная в центре стержня;
- сила нормальной реакции стены N_1 , направленная горизонтально;
- сила упругости пружины $F_{\text{упр}}$, направленная горизонтально к стене (удерживает стержень от скольжения);
- сила нормальной реакции пола N_2 , направленная вертикально вверх.

Поскольку пол и стена гладкие, силы трения отсутствуют.

Будем описывать систему на основе условий равновесия тел:

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M = 0.$$

Из второго закона Ньютона в проекции на ось Oy :

$$N_2 - mg = 0 \rightarrow N_2 = mg.$$

Пусть угол между стержнем и полом в положении равновесия равен α . Из уравнения моментов относительно точки A – точки опоры стержня о вертикальную стенку:

$$mg \frac{l}{2} \cos \alpha + F_{\text{упр}} l \sin \alpha - N_2 l \cos \alpha = 0.$$

Подставим полученное для N_2 выражение в уравнение моментов:

$$mg \frac{1}{2} \cos \alpha + F_{\text{упр}} \sin \alpha = mg \cos \alpha.$$

Отсюда получаем:

$$F_{\text{упр}} = \frac{mg}{2} \operatorname{ctg} \alpha.$$

С учетом явного выражения для силы упругости

$$F_{\text{упр}} = k \Delta x$$

и выражения для $\operatorname{ctg} \alpha$ из геометрических соображений

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{l_0 + \Delta x}{\sqrt{l^2 - (l_0 + \Delta x)^2}},$$

получаем

$$k \Delta x = \frac{mg}{2} \frac{l_0 + \Delta x}{\sqrt{l^2 - (l_0 + \Delta x)^2}}.$$

Решая полученное уравнение относительно начальной длины пружины l_0 , получаем

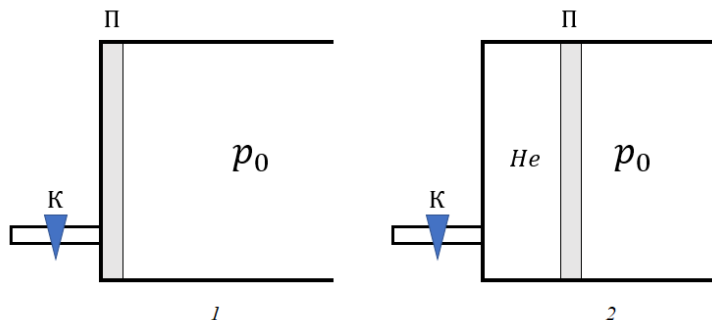
$$l_0 = \left(\frac{l}{\sqrt{\left(\frac{mg}{2k}\right)^2 + \Delta x^2}} - 1 \right) \Delta x$$

Ответ: 33 см.

Задача 2 / 2. Тонкий однородный стержень массы $m = 2,5$ кг и длины $l = 121$ см одним концом опирается на гладкий горизонтальный пол, а вторым опирается на гладкую вертикальную стену. Стержень удерживается в равновесии с помощью горизонтальной пружины, соединяющей нижний конец доски с основанием стены. Жесткость пружины $k = 44 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$, удлинение пружины в состоянии равновесия системы $\Delta x = 5$ см. Ускорение свободного падения $g = 10 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$. Найдите длину пружины l_0 в нерастянутом состоянии. Ответ дайте в сантиметрах с точностью до целых.

Ответ: 16 см.

Задача 3 / 1. Цилиндр с подвижным, плотно прилегающим к стенкам поршнем расположен горизонтально. В начальном положении поршень П прилегает к левому основанию цилиндра (положение 1). В цилиндр через кран К в левом основании медленно закачали гелий. В результате поршень немного передвинулся вправо (положение 2). После этого кран закрыли, цилиндр медленно нагрели, объём гелия увеличился от начального значения V_0 до максимального значения $V_{\max}$, а затем цилиндр начали охлаждать. Когда от гелия отвели количество теплоты, равное $\frac{1}{5}$ части того, что было передано ему при нагревании, поршень вновь пришел в движение. Найдите отношение силы атмосферного давления к силе трения, действующей на поршень, если отношение максимального объёма гелия $V_{\max}$ к начальному объёму V_0 перед нагреванием равно $\frac{V_{\max}}{V_0} = 5$. Ответ дайте с точностью до десятых.



Возможное решение

При достаточно медленном заполнении цилиндра сила давления гелия на поршень равна сумме атмосферного давления и силы трения покоя:

$$p_0 S = F_{\text{атм}} + F_{\text{тр}},$$

где p_0 — давление гелия непосредственно перед его нагреванием, а S — площадь поршня.

Поскольку величина силы трения скольжения равна максимальному значению силы трения покоя и не зависит от температуры цилиндра, а после закрытия крана количество ν гелия в цилиндре под поршнем не изменяется, то при нагревании давление в цилиндре должно оставаться неизменным — изобарный процесс, а объём гелия должен увеличиваться. Пусть температура гелия непосредственно перед нагреванием равна T_0 , перед охлаждением $T_{\max}$. После нагревания гелий изохорно охлаждает; при температуре $T_{\text{к}}$ поршень начинает двигаться — при этом сила трения покоя уже направлена в противоположную сторону, а ее модуль достиг максимально возможного значения.

Запишем уравнения Менделеева-Клапейрона для гелия в описанных состояниях:

$$p_0 V_0 = \nu R T_0, \quad p_0 V_{\max} = \nu R T_{\max}, \quad p_{\text{к}} V_{\max} = \nu R T_{\text{к}},$$

где V_0 и $V_{\max}$ — объём гелия до и после нагревания.

Из уравнения состояния находим отношение давлений:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_0} = \frac{T_{\text{к}}}{T_{\max}}.$$

Также из уравнений состояния получим связь между температурами:

$$k = \frac{V_{\max}}{V_0} = \frac{T_{\max}}{T_0}.$$

Известно, что отведённое количество теплоты в n раз меньше полученного при нагревании. Для одноатомного идеального газа:

$$Q_{\text{нагрев}} = \frac{5}{2} \nu R (T_{\max} - T_0), \quad Q_{\text{охлажд}} = \frac{3}{2} \nu R (T_{\max} - T_{\text{к}}).$$

По условию $Q_{\text{нагрев}} = n Q_{\text{охлажд}}$:

$$5(T_{\max} - T_0) = 3n(T_{\max} - T_{\text{к}}).$$

Отсюда, подставляя $T_{\max} = k T_0$, получаем:

$$T_{\text{к}} = k T_0 \left(1 - \frac{5(k-1)}{3nk} \right).$$

Тогда отношение давлений:

$$\frac{p_{\text{к}}}{p_0} = 1 - \frac{5(k-1)}{4 \cdot 3nk}.$$

Когда поршень начинает двигаться при охлаждении гелия, выполняется соотношение:

$$p_{\kappa} S = F_{\text{атм}} - F_{\text{тр}},$$

так как сила трения теперь направлена противоположно движению.

Следовательно:

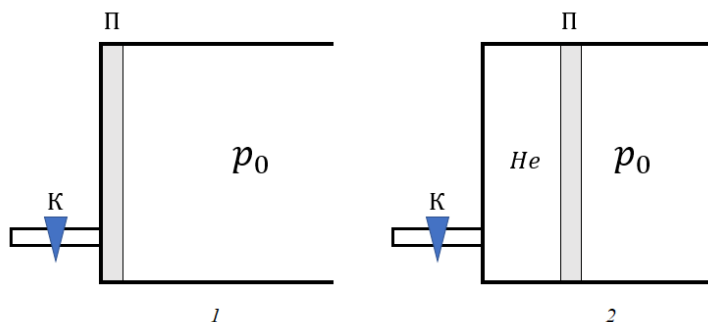
$$p_{\kappa} = \frac{F_{\text{атм}} - F_{\text{тр}}}{S}, \quad p_0 = \frac{F_{\text{атм}} + F_{\text{тр}}}{S}.$$

Разделим полученные уравнения друг на друга и выразим искомое отношение сил:

$$\frac{F_{\text{атм}}}{F_{\text{тр}}} = \frac{1 + \frac{p_{\kappa}}{p_0}}{1 - \frac{p_{\kappa}}{p_0}} = \frac{6nk - 5(k - 1)}{5(k - 1)}.$$

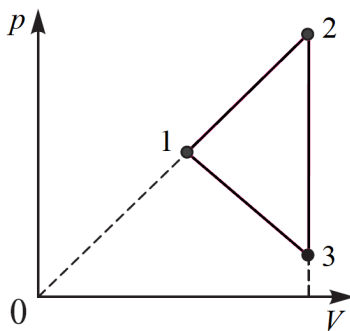
Ответ: 6,5.

Задача 3 / 2. Цилиндр с подвижным, плотно прилегающим к стенкам поршнем расположен горизонтально. В начальном положении поршень П прилегает к левому основанию цилиндра (положение 1). В цилиндр через кран К в левом основании медленно закачали гелий. В результате поршень немного передвинулся вправо (положение 2). После этого кран закрыли, цилиндр медленно нагрели, объём гелия увеличился от начального значения V_0 до максимального значения V_{max} , а затем цилиндр начали охлаждать. Когда от гелия отвели количество теплоты, равное $\frac{1}{4}$ части того, что было передано ему при нагревании, поршень вновь пришел в движение. Найдите отношение силы атмосферного давления к силе трения, действующей на поршень, если отношение максимального объёма гелия V_{max} к начальному объёму V_0 перед нагреванием равно $\frac{V_{\text{max}}}{V_0} = 4$. Ответ дайте с точностью до десятых.



Ответ: 5,4.

Задача 4 / 1. Найдите работу A , совершаемую $\nu = 2$ моль одноатомного идеального газа в цикле (1–2–3–1), состоящем из трех линейных участков на pV -диаграмме. Точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат. На участке 2–3 объем газа не изменялся. Температура газа в точке 2 равна $T_2 = 576$ К, а температуры в точках 1 и 3 равны $T_1 = T_3 = 324$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Ответ дайте в джоулях с точностью до целого.



Возможное решение

По условию, точки 1 и 2 лежат на одной прямой, проходящей через начало координат, поэтому выполняется соотношение:

$$p = \alpha V.$$

Используем уравнение Менделеева–Клапейрона:

$$pV = \nu RT \Rightarrow \alpha V^2 = \nu RT.$$

Следовательно:

$$\frac{V^2}{T} = \text{const}, \quad \Rightarrow \quad \frac{V_2^2}{T_2} = \frac{V_1^2}{T_1}.$$

Отсюда:

$$V_2 = V_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}, \quad p_2 = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}}.$$

На участке 2–3 объём постоянен:

$$V_2 = V_3.$$

Из уравнения состояния:

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_3}{T_3} \Rightarrow p_3 = p_2 \frac{T_3}{T_2} = p_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} \cdot \frac{T_3}{T_2}.$$

Так как $T_3 = T_1$, получаем:

$$p_3 = p_1 \sqrt{\frac{T_1}{T_2}}.$$

Работу газа за цикл вычислим, как площадь, ограниченную диаграммой процесса:

$$A_{12} = \frac{p_2 - p_3}{2} (V_2 - V_1).$$

Подставим найденные выражения для p_2 , p_3 , V_2 :

$$A = \frac{p_2 - p_3}{2} (V_2 - V_1) = \frac{p_1}{2} \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) (V_1 \sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - V_1).$$

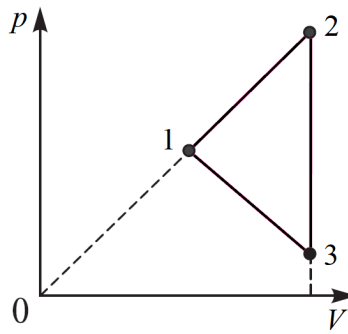
Используя $p_1 V_1 = \nu R T_1$, получаем:

$$A = \frac{\nu R T_1}{2} \cdot \frac{T_2 - T_1}{\sqrt{T_1 T_2}} \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1 \right) = \frac{\nu R (T_2 - T_1)}{2} \cdot \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \cdot \left(\sqrt{\frac{T_2}{T_1}} - 1 \right) = \frac{\nu R (T_2 - T_1)}{2} \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right).$$

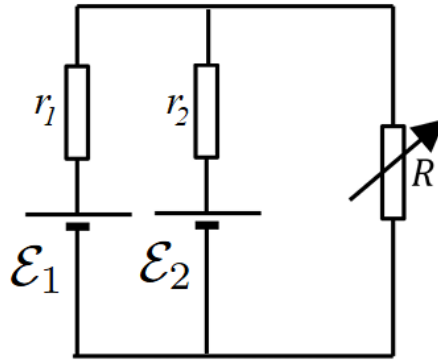
Ответ: 524 Дж.

Задача 4 / 2. Найдите работу A , совершаемую $\nu = 3$ моль одноатомного идеального газа в цикле (1–2–3–1), состоящем из трех линейных участков на pV -диаграмме. Точки 1 и 2 лежат на прямой, проходящей через начало координат. На участке 2–3 объем газа не изменялся. Температура газа в точке 2 равна $T_2 = 529$ К, а температуры в точках 1 и 3 равны $T_1 = T_3 = 361$ К. Универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$. Ответ дайте в джоулях с точностью до целого.

Ответ: 364 Дж.



Задача 5 / 1. Два источника с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 12$ В и $\mathcal{E}_2 = 15$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 15$ Ом и $r_2 = 10$ Ом соответственно включены параллельно друг другу, как показано на рисунке. К общим контактам такого составного источника ЭДС подключают переменный резистор, сопротивление которого меняется в пределах $R \in [3; 20]$ Ом. Какова максимальная тепловая мощность $P_{\max}$, выделяющаяся на переменном резисторе, если очень медленно изменять его сопротивление от минимального до максимального? Ответ дайте в ваттах с точностью до целого числа.



Возможное решение

По первому и второму законам Кирхгофа для данной схемы имеем:

$$I_1 + I_2 - I = 0,$$

$$I_1 r_1 + IR = \mathcal{E}_1,$$

$$I_2 r_2 + IR = \mathcal{E}_2.$$

Из этой системы уравнений выражаем ток, проходящий через нагрузку (резистор R):

$$I = \frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)}.$$

Мощность на сопротивлении R :

$$P = I^2 R = \left(\frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 r_2 + R(r_1 + r_2)} \right)^2 R = \left(\frac{\frac{r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1}{r_1 + r_2}}{\frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2} + R} \right)^2 R.$$

Воспользуемся аналогией с задачей для одиночного источника. Известно, что максимум мощности соответствует равенству внешнего сопротивления эффективному внутреннему сопротивлению системы:

$$R^* = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

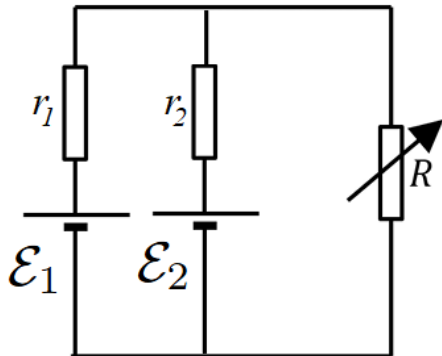
Так как значение R^* попадает в диапазон $[R_{\min}; R_{\max}]$, максимальная мощность действительно достигается в этом интервале.

Подставим найденное условие в формулу мощности:

$$P_{\max} = \frac{(r_1 \mathcal{E}_2 + r_2 \mathcal{E}_1)^2}{4r_1 r_2 (r_1 + r_2)}.$$

Ответ: 8 Вт.

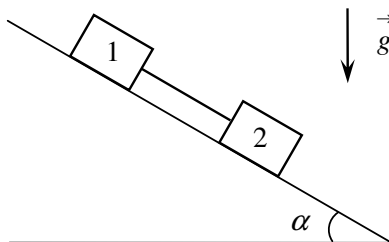
Задача 5 / 2. Два источника с ЭДС $\mathcal{E}_1 = 10$ В и $\mathcal{E}_2 = 15$ В и внутренними сопротивлениями $r_1 = 10$ Ом и $r_2 = 15$ Ом соответственно включены параллельно друг другу, как показано на рисунке. К общим контактам такого составного источника ЭДС подключают переменный резистор, сопротивление которого меняется в пределах $R \in [1; 10]$ Ом. Какова максимальная тепловая мощность $P_{\max}$, выделяющаяся на переменном резисторе, если очень медленно изменять его сопротивление от минимального до максимального? Ответ дайте в ваттах с точностью до целого числа.



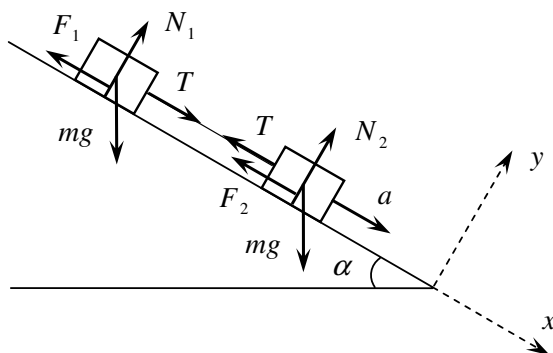
Ответ: 6 Вт.

Отборочный этап. 11 класс

Задача 1 / 1. Два прямоугольных бруска 1 и 2 массой $m = 0,4$ кг каждый, соединённые невесомой и нерастяжимой нитью, соскальзывают с наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол $\alpha = 30^\circ$. Коэффициенты трения брусков о плоскость равны $\mu_1 = 0,3$ и $\mu_2 = 0,15$. Найдите силу натяжения нити T при движении брусков. Ответ выразите в ньютонах и округлите до сотых. Считайте, что нить параллельна наклонной плоскости. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Возможное решение



Рассмотрим движение брусков в неподвижной системе отсчёта, связанной с наклонной плоскостью. В этой системе на первый брусок действует сила тяжести mg , сила нормальной реакции плоскости N_1 , сила трения скольжения F_1 и сила натяжения нити T . Для второго бруска имеем силы mg , N_2 , F_2 и T . Обозначим через a ускорение брусков. Направим ось x вдоль вектора ускорения, а ось y перпендикулярно наклонной плоскости вверх. Запишем уравнения движения брусков в проекциях на выбранные оси:

$$ma = mg \sin \alpha - F_1 + T, \quad N_1 - mg \cos \alpha = 0,$$

$$ma = mg \sin \alpha - F_2 - T, \quad N_2 - mg \cos \alpha = 0.$$

Далее имеем:

$$N_1 = N_2 = mg \cos \alpha, \quad F_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg \cos \alpha, \quad F_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 mg \cos \alpha,$$

$$ma = mg \sin \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha + T,$$

$$ma = mg \sin \alpha - \mu_2 mg \cos \alpha - T.$$

Приравнявая правые части двух последних уравнений, находим силу натяжения нити:

$$mg \sin \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha + T = mg \sin \alpha - \mu_2 mg \cos \alpha - T,$$

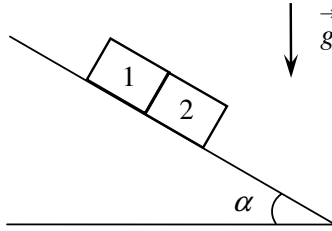
$$2T = \mu_1 mg \cos \alpha - \mu_2 mg \cos \alpha,$$

$$T = \frac{mg}{2} (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha = 0,26 \text{ Н}.$$

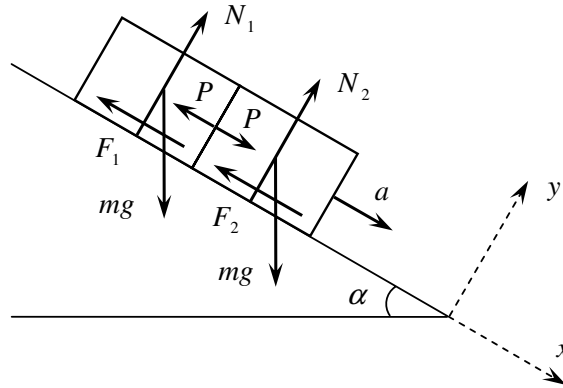
Ответ:

$$T = \frac{mg}{2} (\mu_1 - \mu_2) \cos \alpha = 0,26 \text{ Н}.$$

Задача 1 / 2. Два прямоугольных бруска 1 и 2 одинаковых размеров и массы $m = 0,5$ кг каждый поставлены вплотную друг к другу на наклонную плоскость, образующую с горизонтом угол $\alpha = 45^\circ$. Коэффициенты трения брусков о плоскость равны $\mu_1 = 0,2$ и $\mu_2 = 0,4$. Найдите силу давления P бруска 1 на брусок 2 при соскальзывании брусков с плоскости. Ответ выразите в ньютонах и округлите до сотых. Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Возможное решение



Рассмотрим движение брусков в неподвижной системе отсчёта, связанной с наклонной плоскостью. В этой системе на первый брусок действует сила тяжести mg , сила нормальной реакции плоскости N_1 , сила трения скольжения F_1 и сила давления P со стороны второго бруска. Для второго бруска имеем силы mg , N_2 , F_2 и P . Обозначим через a ускорение брусков. Направим ось x вдоль вектора ускорения, а ось y перпендикулярно наклонной плоскости вверх. Запишем уравнения движения брусков в проекциях на выбранные оси:

$$ma = mg \sin \alpha - F_1 - P, \quad N_1 - mg \cos \alpha = 0,$$

$$ma = mg \sin \alpha - F_2 + P, \quad N_2 - mg \cos \alpha = 0.$$

Далее имеем:

$$N_1 = N_2 = mg \cos \alpha, \quad F_1 = \mu_1 N_1 = \mu_1 mg \cos \alpha, \quad F_2 = \mu_2 N_2 = \mu_2 mg \cos \alpha,$$

$$ma = mg \sin \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha - P,$$

$$ma = mg \sin \alpha - \mu_2 mg \cos \alpha + P.$$

Приравняв правые части двух последних уравнений, находим силу давления P :

$$mg \sin \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha - P = mg \sin \alpha - \mu_2 mg \cos \alpha + P,$$

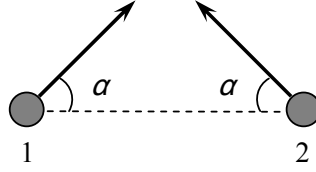
$$2P = \mu_2 mg \cos \alpha - \mu_1 mg \cos \alpha,$$

$$P = \frac{mg}{2} (\mu_2 - \mu_1) \cos \alpha = 0,35 \text{ Н}.$$

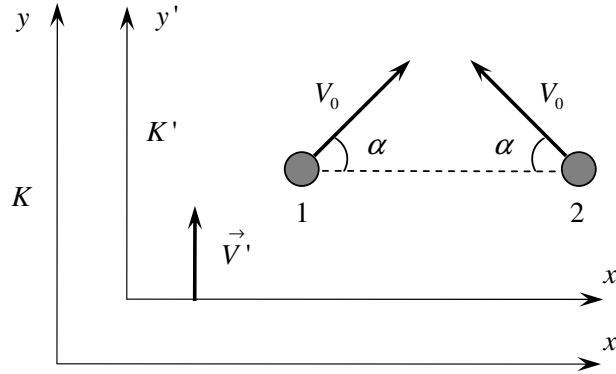
Ответ:

$$P = \frac{mg}{2} (\mu_2 - \mu_1) \cos \alpha = 0,35 \text{ Н}.$$

Задача 2 / 1. Две круглые резиновые шайбы 1 и 2 скользят по льду с одинаковыми по абсолютной величине скоростями. Отношение масс шайб $m_1/m_2 = 3$. В некоторый момент времени векторы скоростей шайб образуют угол $\alpha = 30^\circ$ с отрезком, соединяющим центры шайб. Найдите угол β между направлениями скоростей шайб после их абсолютно упругого столкновения. Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения. Трение и вращение шайб не учитывайте.



Возможное решение



Введём неподвижную систему отсчёта K , связанную со льдом. Направим ось x этой системы вдоль отрезка, соединяющего шайбы, а ось y в сторону движения шайб. Обозначим через V_0 начальную скорость шайб в системе K . Перейдём в систему отсчёта K' , движущуюся поступательно относительно системы K в направлении оси y со скоростью $V' = V_0 \sin \alpha$. Оси системы K' будем считать параллельными осям системы K . В системе K' имеем центральное абсолютно упругое столкновение шайб, движущихся навстречу друг другу вдоль оси x' с одинаковыми начальными скоростями $V_0 \cos \alpha$. Обозначим через $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ скорости шайб после столкновения в системе K' . Эти векторы направлены по или против оси x' . Запишем законы сохранения импульса и энергии в системе K' :

$$m_1 V_0 \cos \alpha - m_2 V_0 \cos \alpha = m_1 U_1 + m_2 U_2 ,$$

$$\frac{m_1 V_0^2 \cos^2 \alpha}{2} + \frac{m_2 V_0^2 \cos^2 \alpha}{2} = \frac{m_1 U_1^2}{2} + \frac{m_2 U_2^2}{2} .$$

Здесь U_1 и U_2 - проекции векторов $\vec{U}_1$ и $\vec{U}_2$ на ось x' . Обозначим через k отношение масс шайб:

$$k = \frac{m_1}{m_2} .$$

Тогда уравнения принимают вид:

$$k V_0 \cos \alpha - V_0 \cos \alpha = k U_1 + U_2 \quad \longrightarrow \quad k (V_0 \cos \alpha - U_1) = U_2 + V_0 \cos \alpha ,$$

$$k V_0^2 \cos^2 \alpha + V_0^2 \cos^2 \alpha = k U_1^2 + U_2^2 \quad \longrightarrow \quad k (V_0^2 \cos^2 \alpha - U_1^2) = U_2^2 - V_0^2 \cos^2 \alpha .$$

Перепишем последнее уравнение так:

$$k (V_0 \cos \alpha - U_1) (V_0 \cos \alpha + U_1) = (U_2 + V_0 \cos \alpha) (U_2 - V_0 \cos \alpha) .$$

Поскольку подчёркнутые сомножители совпадают, уравнение упрощается:

$$V_0 \cos \alpha + U_1 = U_2 - V_0 \cos \alpha \quad \longrightarrow \quad U_2 = 2V_0 \cos \alpha + U_1 .$$

Отметим, что формально подчёркнутые сомножители могут обращаться в нуль при $U_1 = V_0 \cos \alpha$ и $U_2 = -V_0 \cos \alpha$. Этот случай соответствует отсутствию взаимодействия между шайбами и должен быть отброшен как нефизический. Окончательно получаем систему двух линейных уравнений для скоростей U_1 и U_2 :

$$k (V_0 \cos \alpha - U_1) = U_2 + V_0 \cos \alpha ,$$

$$U_2 = 2V_0 \cos \alpha + U_1 .$$

Подставляя значение U_2 в первое уравнение, получаем:

$$k V_0 \cos \alpha - k U_1 = 2V_0 \cos \alpha + U_1 + V_0 \cos \alpha \quad \longrightarrow \quad U_1 = \left(\frac{k-3}{k+1} \right) V_0 \cos \alpha ,$$

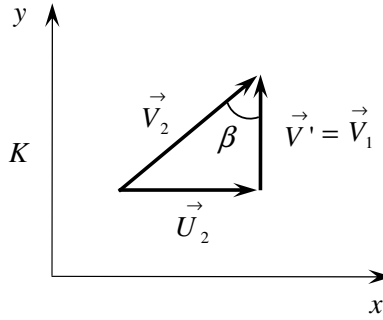
$$U_2 = 2V_0 \cos \alpha + U_1 = 2V_0 \cos \alpha + \left(\frac{k-3}{k+1} \right) V_0 \cos \alpha = \left(\frac{3k-1}{k+1} \right) V_0 \cos \alpha$$

При $k = 3$ имеем:

$$U_1 = 0 , \quad U_2 = 2V_0 \cos \alpha .$$

Таким образом, в системе отсчёта K' тяжёлая шайба 1 после столкновения останавливается, а лёгкая шайба 2 движется в направлении оси x' с удвоенной скоростью. Конечные скорости шайб в неподвижной системе отсчёта K равны:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}' + \vec{U}_1 = \vec{V}' , \quad \vec{V}_2 = \vec{V}' + \vec{U}_2 .$$



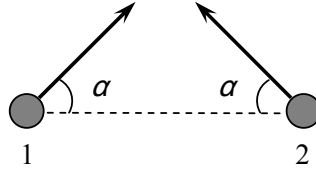
Векторы $\vec{V}'$, $\vec{U}_2$ и $\vec{V}_2$ образуют прямоугольный треугольник, из которого можно легко найти угол β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{U_2}{V'} = \frac{2V_0 \cos \alpha}{V_0 \sin \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha \quad \longrightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg} (2 \operatorname{ctg} \alpha) = 74^\circ .$$

Ответ:

$$\beta = \operatorname{arctg} (2 \operatorname{ctg} \alpha) = 74^\circ .$$

Задача 2 / 2. Две круглые резиновые шайбы 1 и 2 скользят по льду с одинаковыми по абсолютной величине скоростями. Отношение масс шайб $m_1/m_2 = 1/3$. В некоторый момент времени векторы скоростей шайб образуют угол $\alpha = 60^\circ$ с отрезком, соединяющим центры шайб. Найдите угол β между направлениями скоростей шайб после их абсолютно упругого столкновения. Ответ выразите в градусах и округлите до целого значения. Трение и вращение шайб не учитывайте.



Возможное решение

Воспользуемся результатами предыдущей задачи:

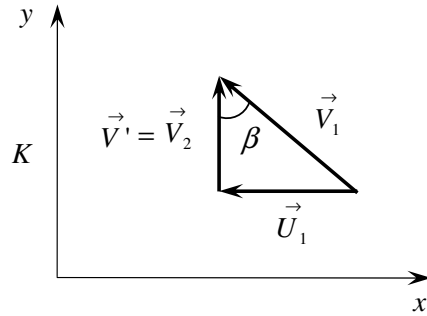
$$U_1 = \left(\frac{k-3}{k+1} \right) V_0 \cos \alpha, \quad U_2 = \left(\frac{3k-1}{k+1} \right) V_0 \cos \alpha, \quad k = \frac{m_1}{m_2}.$$

При $k = 1/3$ имеем:

$$U_1 = -2V_0 \cos \alpha, \quad U_2 = 0.$$

Таким образом, в системе отсчёта K' тяжёлая шайба 2 после столкновения останавливается, а лёгкая шайба 1 движется против оси x' с удвоенной скоростью. Конечные скорости шайб в неподвижной системе отсчёта K равны:

$$\vec{V}_1 = \vec{V}' + \vec{U}_1, \quad \vec{V}_2 = \vec{V}' + \vec{U}_2 = \vec{V}'.$$



Векторы $\vec{V}'$, $\vec{U}_1$ и $\vec{V}_1$ образуют прямоугольный треугольник, из которого можно легко найти угол β :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{|U_1|}{V'} = \frac{2V_0 \cos \alpha}{V_0 \sin \alpha} = 2 \operatorname{ctg} \alpha \quad \longrightarrow \quad \beta = \operatorname{arctg} (2 \operatorname{ctg} \alpha) = 49^\circ.$$

Ответ:

$$\beta = \operatorname{arctg} (2 \operatorname{ctg} \alpha) = 49^\circ.$$

Задача 3 / 1. В горизонтальном цилиндре объёмом $V_1 = 10$ л находится насыщенный пар некоторой жидкости при температуре $T_1 = 480$ К. Пар изохорически охлаждают до температуры $T_2 = 400$ К, а затем изотермически расширяют. При этом пар совершает работу $A = 1$ кДж. Считая, что пар всё время остаётся насыщенным, найдите число молей ν_x сконденсировавшейся жидкости. Ответ округлите до десятых. Давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2 равны соответственно $P_1 = 0,48$ МПа и $P_2 = 0,1$ МПа, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К). Объёмом жидкости по сравнению с объёмом пара пренебрегите, пар считайте идеальным газом.

Возможное решение

Обозначим через ν_1 и ν_2 количества молей пара в начальном и конечном состояниях. Выразим их из уравнения состояния:

$$P_1 V_1 = \nu_1 R T_1, \quad P_2 V_2 = \nu_2 R T_2 \quad \longrightarrow \quad \nu_1 = \frac{P_1 V_1}{R T_1}, \quad \nu_2 = \frac{P_2 V_2}{R T_2}.$$

Здесь V_2 — конечный объём пара. При расширении насыщенного пара при температуре T_2 его давление P_2 остаётся постоянным. Поэтому работа пара равна:

$$A = P_2 (V_2 - V_1).$$

Выразим отсюда произведение $P_2 V_2$ и подставим его в формулу для ν_2 :

$$P_2 V_2 = A + P_2 V_1, \quad \nu_2 = \frac{A + P_2 V_1}{R T_2}.$$

Число молей сконденсировавшейся жидкости равно:

$$\nu_x = \nu_1 - \nu_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} - \frac{A + P_2 V_1}{T_2} \right) = 0,6 \text{ моля}.$$

Ответ:

$$\nu_x = \frac{1}{R} \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} - \frac{A + P_2 V_1}{T_2} \right) = 0,6 \text{ моля}.$$

Задача 3 / 2. В горизонтальном цилиндре объёмом $V_1 = 16$ л находится насыщенный пар некоторой жидкости при температуре $T_1 = 400$ К. Пар изотермически сжимают, совершая над ним работу $A = 1,2$ кДж, а затем изохорически нагревают до температуры $T_2 = 440$ К. Считая, что пар всё время остаётся насыщенным, найдите число молей ν_x сконденсировавшейся жидкости. Ответ округлите до сотых. Давления насыщенного пара при температурах T_1 и T_2 равны соответственно $P_1 = 0,1$ МПа и $P_2 = 0,22$ МПа, универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К). Объёмом жидкости по сравнению с объёмом пара пренебрегите, пар считайте идеальным газом.

Возможное решение

Обозначим через ν_1 и ν_2 количества молей пара в начальном и конечном состояниях. Выразим их из уравнения состояния:

$$P_1 V_1 = \nu_1 R T_1, \quad P_2 V_2 = \nu_2 R T_2 \quad \longrightarrow \quad \nu_1 = \frac{P_1 V_1}{R T_1}, \quad \nu_2 = \frac{P_2 V_2}{R T_2}.$$

Здесь V_2 — конечный объём пара. При сжатии насыщенного пара при температуре T_1 его давление P_1 остаётся постоянным. Поэтому работа внешних сил равна:

$$A = P_1 (V_1 - V_2).$$

Выразим отсюда объём V_2 и подставим его в формулу для ν_2 :

$$V_2 = \frac{P_1 V_1 - A}{P_1}, \quad \nu_2 = \frac{P_2 (P_1 V_1 - A)}{P_1 R T_2}.$$

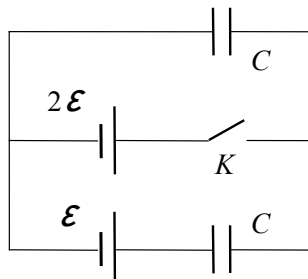
Число молей сконденсировавшейся жидкости равно:

$$\nu_x = \nu_1 - \nu_2 = \frac{1}{R} \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} - \frac{P_2 (P_1 V_1 - A)}{P_1 T_2} \right) = 0,24 \text{ моля}.$$

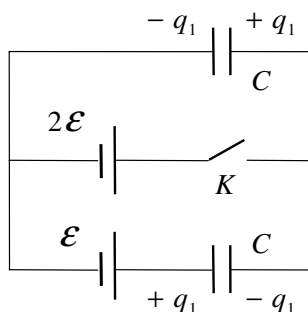
Ответ:

$$\nu_x = \frac{1}{R} \left(\frac{P_1 V_1}{T_1} - \frac{P_2 (P_1 V_1 - A)}{P_1 T_2} \right) = 0,24 \text{ моля}.$$

Задача 4 / 1. Электрическая цепь состоит из ключа K , двух одинаковых конденсаторов ёмкостью $C = 4$ мкФ, батареи с ЭДС $\varepsilon = 10$ В и батареи с ЭДС 2ε . Найдите количество теплоты, выделившейся в цепи после замыкания ключа. Ответ выразите в миллиджоулях.



Возможное решение

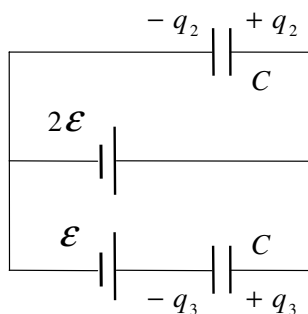


До замыкания ключа напряжение на каждом конденсаторе равно $\varepsilon/2$. Заряды конденсаторов совпадают:

$$q_1 = \frac{C\varepsilon}{2}.$$

Суммарная начальная энергия конденсаторов:

$$W_1 = 2 \cdot \frac{C(\varepsilon/2)^2}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{4}.$$



Обозначим через q_2 и q_3 заряды верхнего и нижнего конденсаторов, установившиеся после замыкания ключа. Напряжения на этих конденсаторах равны соответственно 2ε и ε . Заряды конденсаторов:

$$q_2 = 2C\varepsilon, \quad q_3 = C\varepsilon.$$

Суммарная конечная энергия конденсаторов:

$$W_2 = \frac{C(2\varepsilon)^2}{2} + \frac{C\varepsilon^2}{2} = \frac{5C\varepsilon^2}{2}.$$

Приращение энергии:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{5C\varepsilon^2}{2} - \frac{C\varepsilon^2}{4} = \frac{9C\varepsilon^2}{4}.$$

Рассмотрим работу, которую совершили батареи при перераспределении зарядов. Через батарею с ЭДС ε , против направления её действия, прошёл положительный заряд $(q_1 + q_3)$. Работа батареи равна:

$$A_1 = -\varepsilon (q_1 + q_3) = -\varepsilon \left(\frac{C\varepsilon}{2} + C\varepsilon \right) = -\frac{3C\varepsilon^2}{2}.$$

В направлении действия батареи с ЭДС 2ε прошёл положительный заряд $(q_2 + q_3)$. Работа этой батареи равна:

$$A_2 = 2\varepsilon (q_2 + q_3) = 2\varepsilon (2C\varepsilon + C\varepsilon) = 6C\varepsilon^2.$$

Суммарная работа батарей:

$$A = A_1 + A_2 = -\frac{3C\varepsilon^2}{2} + 6C\varepsilon^2 = \frac{9C\varepsilon^2}{2}.$$

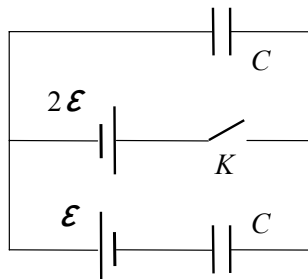
Обозначим через Q количество теплоты, выделившейся в цепи после замыкания ключа. Найдём его из уравнения баланса энергии:

$$A = \Delta W + Q \quad \longrightarrow \quad Q = A - \Delta W = \frac{9C\varepsilon^2}{2} - \frac{9C\varepsilon^2}{4} = \frac{9C\varepsilon^2}{4} = 0,9 \text{ мДж}.$$

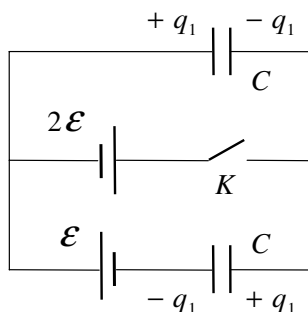
Ответ:

$$Q = \frac{9C\varepsilon^2}{4} = 0,9 \text{ мДж}.$$

Задача 4 / 2. Электрическая цепь состоит из ключа K , двух одинаковых конденсаторов ёмкостью $C = 3$ мкФ, батареи с ЭДС $\varepsilon = 12$ В и батареи с ЭДС 2ε . Найдите количество теплоты, выделившейся в цепи после замыкания ключа. Ответ выразите в миллиджоулях.



Возможное решение

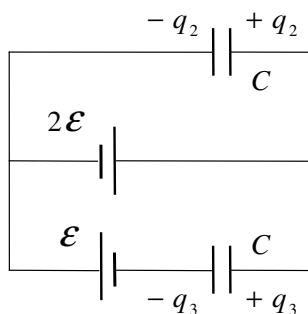


До замыкания ключа напряжение на каждом конденсаторе равно $\varepsilon/2$. Заряды конденсаторов совпадают:

$$q_1 = \frac{C\varepsilon}{2}.$$

Суммарная начальная энергия конденсаторов:

$$W_1 = 2 \cdot \frac{C(\varepsilon/2)^2}{2} = \frac{C\varepsilon^2}{4}.$$



Обозначим через q_2 и q_3 заряды верхнего и нижнего конденсаторов, установившиеся после замыкания ключа. Напряжения на этих конденсаторах равны соответственно 2ε и 3ε . Заряды конденсаторов:

$$q_2 = 2C\varepsilon, \quad q_3 = 3C\varepsilon.$$

Суммарная конечная энергия конденсаторов:

$$W_2 = \frac{C(2\varepsilon)^2}{2} + \frac{C(3\varepsilon)^2}{2} = \frac{13C\varepsilon^2}{2}.$$

Приращение энергии:

$$\Delta W = W_2 - W_1 = \frac{13C\varepsilon^2}{2} - \frac{C\varepsilon^2}{4} = \frac{25C\varepsilon^2}{4}.$$

Рассмотрим работу, которую совершили батареи при перераспределении зарядов. Через батарею с ЭДС ε , в направлении её действия, прошёл заряд $(q_3 - q_1)$. Работа батареи равна:

$$A_1 = \varepsilon (q_3 - q_1) = \varepsilon \left(3C\varepsilon - \frac{C\varepsilon}{2} \right) = \frac{5C\varepsilon^2}{2}.$$

В направлении действия батареи с ЭДС 2ε прошёл положительный заряд $(q_2 + q_3)$. Работа этой батареи равна:

$$A_2 = 2\varepsilon (q_2 + q_3) = 2\varepsilon (2C\varepsilon + 3C\varepsilon) = 10C\varepsilon^2.$$

Суммарная работа батарей:

$$A = A_1 + A_2 = \frac{5C\varepsilon^2}{2} + 10C\varepsilon^2 = \frac{25C\varepsilon^2}{2}.$$

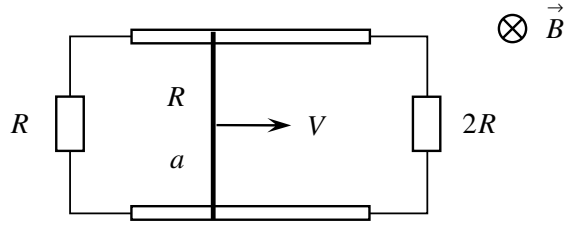
Обозначим через Q количество теплоты, выделившейся в цепи после замыкания ключа. Найдём его из уравнения баланса энергии:

$$A = \Delta W + Q \quad \longrightarrow \quad Q = A - \Delta W = \frac{25C\varepsilon^2}{2} - \frac{25C\varepsilon^2}{4} = \frac{25C\varepsilon^2}{4} = 2,7 \text{ мДж}.$$

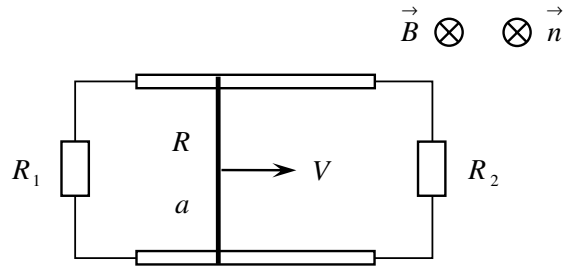
Ответ:

$$Q = \frac{25C\varepsilon^2}{4} = 2,7 \text{ мДж}.$$

Задача 5 / 1. Плоский контур состоит из двух узких параллельных проводящих шин, замкнутых через сопротивления $R = 0,3 \text{ Ом}$ и $2R$. По шинам с постоянной скоростью $V = 0,2 \text{ м/с}$ движется тонкий металлический стержень сопротивлением R и длиной $a = 0,5 \text{ м}$. Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,1 \text{ Тл}$. Вектор индукции перпендикулярен плоскости контура. Найдите силу тока I , текущего по движущемуся стержню. Ответ выразите в миллиамперах. Сопротивление шин и соединительных проводов не учитывайте.



Возможное решение



Рассмотрим общую схему, в которой сопротивление движущегося стержня равно R , а шины замкнуты через сопротивления R_1 и R_2 . В этой схеме имеем два плоских замкнутых контура 1 и 2. Первый контур включает в себя движущийся стержень и сопротивление R_1 , второй — стержень и сопротивление R_2 . Направим вектор $\vec{n}$ единичной нормали к плоскости контуров вдоль вектора магнитной индукции. Положительное направление обхода контуров связано с направлением вектора $\vec{n}$ правилом правого винта (правилом буравчика). В нашем случае это направление по часовой стрелке. Рассмотрим ЭДС индукции, возникающие в контурах при движении стержня. За время Δt стержень перемещается на расстояние $V \Delta t$. Приращение площади первого контура равно:

$$\Delta S_1 = a V \Delta t.$$

Приращение магнитного потока через первый контур:

$$\Delta \Phi_1 = \vec{B} \vec{n} \Delta S_1 = B a V \Delta t.$$

ЭДС индукции, действующая в первом контуре:

$$\varepsilon_1 = -\frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} = -B a V.$$

Знак минус означает, что ЭДС действует против положительного направления обхода, то есть против часовой стрелки. Площадь второго контура при движении стержня уменьшается. Поэтому её приращение за время Δt отрицательно:

$$\Delta S_2 = -\Delta S_1.$$

Приращение магнитного потока через второй контур:

$$\Delta \Phi_2 = \vec{B} \vec{n} \Delta S_2 = -B a V \Delta t.$$

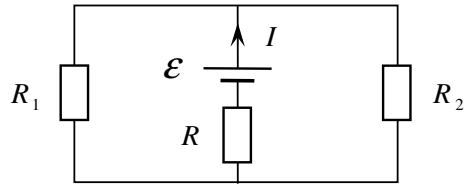
ЭДС индукции, действующая во втором контуре:

$$\varepsilon_2 = -\frac{\Delta \Phi_2}{\Delta t} = B a V.$$

Эта ЭДС действует по часовой стрелке.

Обозначим

$$\varepsilon = |\varepsilon_1|_{12} = \varepsilon_2 = B a V.$$



Рассмотрим эквивалентную схему, обеспечивающую правильное направление действия ЭДС индукции ε (против часовой стрелки в первом контуре и по часовой стрелке во втором). Учитывая, что в нашей задаче физической причиной возникновения ЭДС является действие силы Лоренца на электроны проводимости в движущемся стержне, в эквивалентной схеме заменим стержень батареей с ЭДС ε и сопротивлением R . В этой схеме нужно найти силу тока I , текущего через батарею. Это простая задача. Сопротивления R_1 и R_2 соединены параллельно. Их общее сопротивление равно $R_1 R_2 / (R_1 + R_2)$. Общее сопротивление цепи:

$$R_0 = R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Искомая сила тока:

$$I = \frac{\varepsilon}{R_0} = \frac{\varepsilon (R_1 + R_2)}{R (R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

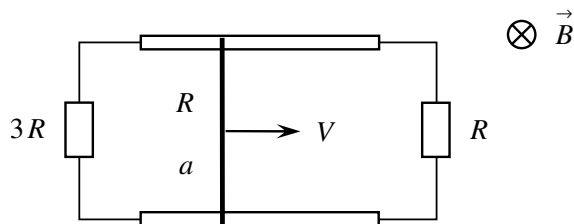
В частном случае, когда $R_1 = R$ и $R_2 = 2R$, получаем:

$$I = \frac{\varepsilon \cdot 3R}{R \cdot 3R + 2R^2} = \frac{3\varepsilon}{5R} = \frac{3B a V}{5R} = 20 \text{ мА}.$$

Ответ:

$$I = \frac{3B a V}{5R} = 20 \text{ мА}.$$

Задача 5 / 2. Плоский контур состоит из двух узких параллельных проводящих шин, замкнутых через сопротивления $R = 0,4$ Ом и $3R$. По шинам с постоянной скоростью $V = 0,3$ м/с движется тонкий металлический стержень сопротивлением R и длиной $a = 0,7$ м. Вся система находится в постоянном однородном магнитном поле с индукцией $B = 0,05$ Тл. Вектор индукции перпендикулярен плоскости контура. Найдите силу тока I , текущего по движущемуся стержню. Ответ выразите в миллиамперах. Сопротивление шин и соединительных проводов не учитывайте.



Возможное решение

Воспользуемся общим результатом предыдущей задачи:

$$I = \frac{\varepsilon (R_1 + R_2)}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}.$$

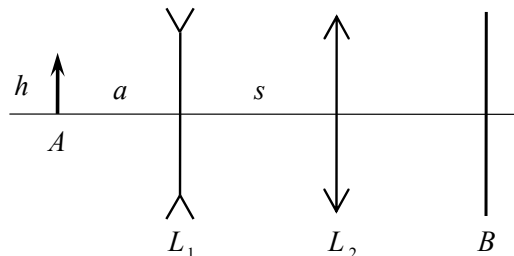
Полагая $R_1 = 3R$ и $R_2 = R$, получаем:

$$I = \frac{\varepsilon \cdot 4R}{R \cdot 4R + 3R^2} = \frac{4\varepsilon}{7R} = \frac{4BaV}{7R} = 15 \text{ мА}.$$

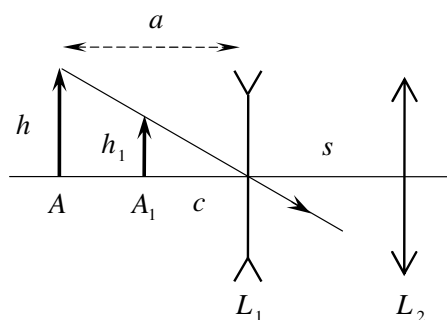
Ответ:

$$I = \frac{4BaV}{7R} = 15 \text{ мА}.$$

Задача 6 / 1. Оптическая система состоит из рассеивающей линзы L_1 с фокусным расстоянием $F_1 = 40$ см и собирающей линзы L_2 с фокусным расстоянием $F_2 = 20$ см. Главные оптические оси линз совпадают, расстояние между линзами $s = 52$ см. На расстоянии $a = 10$ см от линзы L_1 , перпендикулярно главной оптической оси, расположена маленькая светящаяся стрелка A высотой h . Изображение стрелки получено на экране B , находящемся справа от линзы L_2 . Найдите отношение $x = H/h$, где H — высота изображения стрелки на экране.



Возможное решение



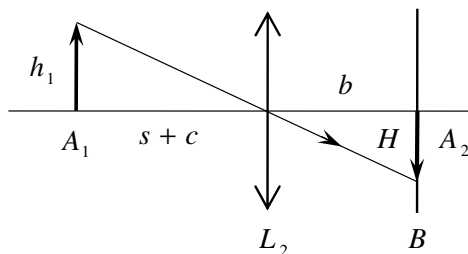
Обозначим через A_1 прямое мнимое изображение стрелки A , построенное рассеивающей линзой L_1 . Это изображение расположено между стрелкой A и линзой. Его вершина лежит на луче, проходящем через вершину A и оптический центр линзы. Обозначим через h_1 высоту этого изображения и через c его расстояние до линзы L_1 . По формуле линзы:

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{c} = -\frac{1}{F_1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{a} + \frac{1}{F_1}, \quad c = \frac{a F_1}{a + F_1}.$$

Высоту изображения h_1 находим из подобия треугольников:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{c}{a} \quad \rightarrow \quad h_1 = \frac{h c}{a} = \frac{h F_1}{a + F_1}.$$

Изображение A_1 играет роль предмета для собирающей линзы L_2 , которая строит его действительное переверну-



тое изображение A_2 на экране B . Вершина стрелки A_2 лежит на луче, проходящем через вершину стрелки A_1 и оптический центр линзы L_2 . Высота этой стрелки равна H . Обозначим через b расстояние от линзы L_2 до экрана. Учитывая, что расстояние от изображения A_1 до линзы L_2 равно $(s + c)$, получаем:

$$\frac{1}{s+c} + \frac{1}{b} = \frac{1}{F_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{b} = \frac{1}{F_2} - \frac{1}{s+c}, \quad b = \frac{F_2(s+c)}{s+c-F_2}.$$

Из подобия треугольников следует, что:

$$\frac{H}{h_1} = \frac{b}{s+c} \quad \rightarrow \quad H = h_1 \cdot \frac{b}{s+c} = \frac{h F_1}{a+F_1} \cdot \frac{F_2}{s+c-F_2}.$$

Здесь имеем:

$$(a + F_1)(s + c - F_2) = (a + F_1) \left(s - F_2 + \frac{a F_1}{a + F_1} \right) = (a + F_1)(s - F_2) + a F_1.$$

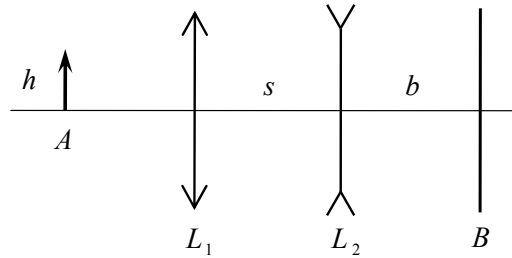
Окончательно получаем:

$$x = \frac{H}{h} = \frac{F_1 F_2}{(a + F_1)(s - F_2) + a F_1} = 0,4.$$

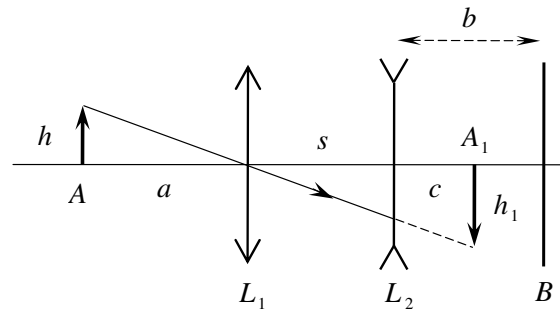
Ответ:

$$x = \frac{F_1 F_2}{(a + F_1)(s - F_2) + a F_1} = 0,4.$$

Задача 6 / 2. Оптическая система состоит из собирающей линзы L_1 с фокусным расстоянием $F_1 = 5$ см и рассеивающей линзы L_2 с фокусным расстоянием $F_2 = 20$ см. Главные оптические оси линз совпадают, расстояние между линзами $s = 18$ см. Слева от линзы L_1 , перпендикулярно главной оптической оси, расположена маленькая светящаяся стрелка A высотой h . Изображение стрелки получено на экране B , находящемся на расстоянии $b = 30$ см от линзы L_2 . Найдите отношение $x = H/h$, где H — высота изображения стрелки на экране.



Возможное решение



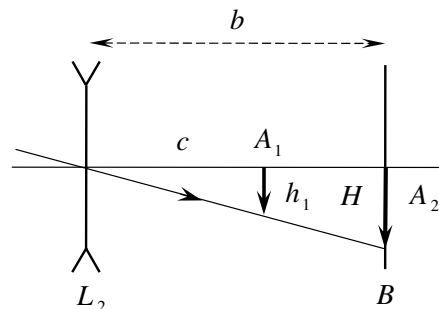
Лучи, испущенные из основания стрелки A и прошедшие через линзу L_1 , должны попасть на линзу L_2 сходящимся пучком. Только в этом случае на экране получится действительное изображение основания стрелки A . Таким образом, изображение A_1 стрелки A , построенное линзой L_1 , расположено правее линзы L_2 . Обозначим через h_1 высоту этого изображения и через c его расстояние до линзы L_2 . Учитывая, что изображение A_1 играет роль мнимого предмета для линзы L_2 , и что изображение A_2 на экране расположено на расстоянии b от L_2 , получаем:

$$-\frac{1}{c} + \frac{1}{b} = -\frac{1}{F_2} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{F_2}, \quad c = \frac{bF_2}{b + F_2}.$$

Так как $c < b$, изображение A_1 расположено между линзой L_2 и экраном. Обозначим через a расстояние от стрелки A до линзы L_1 . По формуле линзы:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{s+c} = \frac{1}{F_1} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a} = \frac{1}{F_1} - \frac{1}{s+c}, \quad a = \frac{(s+c)F_1}{s+c-F_1}.$$

Вершина стрелки A_1 лежит как на луче, проходящем через вершину стрелки A и оптический центр линзы L_1 , так и на луче, проходящем через вершину изображения A_2 и оптический центр линзы L_2 .



Обозначив высоту изображения A_2 через H , из подобия треугольников получаем:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{s+c}{a} \quad \rightarrow \quad h_1 = \frac{h(s+c)}{a} = \frac{h(s+c-F_1)}{F_1}.$$

$$\frac{H}{h_1} = \frac{b}{c} \quad \longrightarrow \quad H = h_1 \cdot \frac{b}{c} = \frac{h(s+c-F_1)}{F_1} \cdot \frac{b+F_2}{F_2}.$$

Здесь имеем:

$$(s+c-F_1)(b+F_2) = \left(s-F_1 + \frac{bF_2}{b+F_2}\right)(b+F_2) = (s-F_1)(b+F_2) + bF_2.$$

Окончательно получаем:

$$x = \frac{H}{h} = \frac{(s-F_1)(b+F_2) + bF_2}{F_1 F_2} = 12,5.$$

Ответ:

$$x = \frac{(s-F_1)(b+F_2) + bF_2}{F_1 F_2} = 12,5.$$