

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2026

Заключительный этап 14 марта

6 класс

Задача 1. Первого мая Агроном посадил несколько цветов сорта «Супер красивые» в ряд и 30-го мая обнаружил, что неприжившихся в 4 раза меньше, чем прижившихся. Он исправил свои ошибки, и все следующие посадки приживались: каждый месяц 1-го числа он сажал по одному новому цветку между каждыми двумя прижившимися. 30-го августа всего оказалось 793 цветка. Сколько цветов было посажено первого мая, если до этого цветов сорта «Супер красивые» не было?

Ответ: 125.

Решение.

Пусть x - количество прижившихся цветов после 1 месяца. Количество высаженных после первого месяца равно $x - 1$. Тогда всего цветов стало $2x - 1$. После второго месяца прижились все цветы, количество не изменилось. После второго месяца было высажено $2x - 2$ цветов и всего их стало: $4x - 3$. Аналогично после третьего месяца все цветы прижились, их количество не изменилось. В последний раз было высажено $4x - 4$ цветов и всего их стало $8x - 7$. Из условия получим уравнение на x :

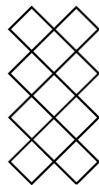
$$8x - 7 = 793 \rightarrow x = 100$$

Тогда всего первого мая Агроном посадил $100 + 25 = 125$ цветов.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Верно записано количество прижившихся цветов в конце второго месяца — 3 балла.
2. Получено правильное уравнение — 6 баллов

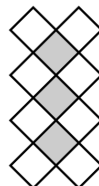
Задача 2. Злая Колдунья заточила Принцессу в темнице, схема комнат которой изображена на рисунке (одна клетка — одна комната). Между любой парой соседних по стороне комнат есть переход. Чтобы спасти Принцессу, Принц указывает на три комнаты, заплатив за это Колдунье 10 золотых. Если Принцесса находится в одной из указанных комнат, Колдунья освобождает её. Если нет, то Колдунья заставляет Принцессу перейти в соседнюю комнату (Принцесса сама выбирает, какую). Принц ни в какой момент не видит, где находится Принцесса. За какое наименьшее количество золотых Принц сможет гарантированно освободить Принцессу?



Ответ: 20

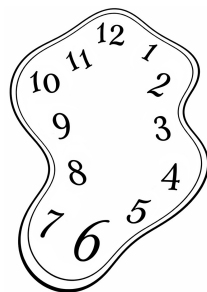
Решение.

За 10 золотых Принц не сможет гарантированно освободить Принцессу. Покажем, как ему освободить Принцессу за 20 золотых. Для этого ему нужно два раза указать на серые клетки (см. рисунок). Действительно, если Принцесса в самом начале стояла на серой клетке, то Принц сможет ее освободить уже за 10 золотых. Если же Принцесса изначально была на белой клетке, то после первой неудачи Принца она обязательно перейдет на серую клетку, а тогда во второй раз Принц обязательно ее освободит.



Любое полное решение оценивается в 7 баллов.

Задача 3. При регистрации на сайте с математическими задачами необходимо пройти проверку «Я – не робот». Для этого нужно предложенную картинку с числами разделить на несколько необязательно равных и ровных частей так, чтобы в полученных частях суммы чисел были одинаковыми. Мише попалось изображение, как на рисунке. Помогите Мише пройти проверку, если изображение нужно разделить на 4 части.



Решение.

Сумма чисел от 1 до 12 равна 78, что на 4 не делится, поэтому будем проводить разрезы между цифрами одного числа так, что части не будут пересекаться. Например, так. Разобьем 11 и 10, получив 1, 1, 1, 0. Тогда пусть первая часть состоит из $8 + 7$, вторая из $9 + 6 + 0$, третья из $1 + 3 +$

$4+5+1+1$ (по единичке от 10 и 11), а четвертая – $12+2+1$ (оставшаяся единичка от 11).

Также, например, можно разделить на пересекающиеся части, суммы в которых равны 21: $10+11$, $9+12$, $8+7+6$, $6+5+4+3+2+1$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов.

Задача 4. Найдите последнюю цифру числа $1^3+3^3+5^3\ldots+2025^3+2027^3$.

Ответ: 6.

Решение.

Заметим, что для каждой пятерки чисел $1^3+3^3+5^3+7^3+9^3$; $11^3+13^3+15^3+17^3+19^3$; ... сумма слагаемых оканчивается на одно и то же число – на 5. Таких пятерок 202, значит, их сумма оканчивается на 0. Сумма оставшихся чисел $2021^3+2023^3+2025^3+2027^3$ оканчивается на 6. Значит, исходная сумма оканчивается на 6.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Верно определена последняя цифра одной пятерки — 2 балла.
2. Верно посчитано число пятерок — 2 балла.
3. В целом верное решение, но допущена одна арифметическая ошибка — 6 баллов.

Задача 5. Найдите наименьшее натуральное число, сумма цифр которого делится на 11 с остатком 3 и сумма цифр следующего за ним числа делится на 11 с остатком 7.

Ответ: 69999999.

Решение.

Пусть $S(n)$, $S(n+1)$ — сумма цифр в числах n , $n+1$ соответственно. Заметим, что при добавлении 1 к числу сумма его цифр меняется на $-9k+1$, где k — количество девяток в последних разрядах числа. Тогда соотношение между суммами можно записать так:

$$S(n) - 9k + 1 = S(n+1)$$

Исходя из условия $S(n)$ можно представить так: $S(n) = 11a + 3$. Аналогично $S(n + 1) = 11b + 7$. Теперь:

$$11a + 3 - 9k + 1 = 11b + 7$$

$$11(a - b) = 9k + 3$$

Найдем k , при котором $9k + 3$ кратно 11. Недолго поумножать, найдем, что $k = 7$. Значит в числе n в конце стоит семь девяток. Осталось подобрать первую цифру числа (начинаем с одной, так как нужно наименьшее), такую что сумма цифр делится на 11 с остатком 3. Подходит 6.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Записано, как меняется сумма цифр числа после добавления к нему 1 — 2 балла.
2. Сделан один из следующих шагов — 1 балл:
 - составлено уравнение на соотношение между суммами,
 - суммы представлены в виде $11x + \text{остаток}$
3. Доказано, что $k = 7$ — 5 баллов

Задача 1. В городе N есть n домов. Дом в этом городе считается многоэтажным, если в нём больше 5 этажей. Выясните, что больше: доля многоэтажных домов от всех домов в городе или доля этажей, которые находятся во всех многоэтажных домах, от общего числа этажей во всех домах в городе?

Ответ: доля этажей в многоэтажных домах $\geq$ доля многоэтажных домов.

Решение.

Обозначим:

n - общее количество домов в городе

k - количество многоэтажных домов

Очевидно, $k \leq n$.

Заметим, что достаточно сравнить доли, а не проценты. Доля многоэтажных домов по отношению к общему числу домов $= \frac{k}{n}$.

Посчитаем долю этажей в многоэтажных домах к общему количеству этажей во всех домах. Пусть P_1 – общее количество этажей во всех многоэтажных домах, а P_2 - общее количество этажей в низких домах (≤ 5) этажей. Всего этажей во всех домах $P = P_1 + P_2$.

Доля этажей в многоэтажных домах к общему количеству этажей во всех домах $= \frac{P_1}{P}$.

Вычтем:

$$\frac{P_1}{P} - \frac{k}{n} = \frac{nP_1 - kP}{Pn} = \frac{nP_1 - k(P_1 + P_2)}{Pn} = \frac{(n - k)P_1 - kP_2}{Pn}$$

Рассмотрим числитель, так как знаменатель всегда положительный. По условию: $P_1 > 5k$, $P_2 \leq 5(n - k)$. Тогда нижняя оценка числителя:

$$\text{Числитель} \geq (n - k)5k - k5(n - k) = 0$$

Значит этажей в многоэтажных домах $\geq$ многоэтажных домов. Равенство достигается, когда все дома многоэтажные.

Замечание:

Также можно решить, введя среднее количество этажей в многоэтажных домах: $a = \frac{a_1 k_1 + \dots + a_n k_n}{k}$, где k_i — количество многоэтажных домов с количеством этажей, равным a_i . Тогда вместо $P1$ можно написать ak , где $a > 5$. Провести аналогичные рассуждения.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Введены обозначения и правильно посчитаны доли, которые нужно сравнивать (либо введено среднее количество этажей, см. замечание) — 2 балла.
2. Правильно написано выражение для разности долей — 5 баллов
3. Есть оценка числителя, но не написан случай равенства — 6 баллов

Задача 2. Астроном Иван изучает звёзды с помощью своего нового телескопа. За время исследования он нашёл n ярких звёзд и $n-1$ тусклых и хочет их запомнить. У Ивана отличная зрительная память, поэтому он придумал следующий способ запоминания: для каждой яркой звезды он строит связи с n любыми другими звёздами, а для каждой тусклой звезды — с $n+1$ любыми другими звёздами. Докажите, что у Ивана не получится таким способом запомнить все звёзды.

Решение.

Иван пытается построить граф, в котором звезды являются вершинами, а связи между ними — ребрами. Посчитаем сумму степеней вершин в таком графе:

$$n^2 + (n-1)(n+1) = 2n^2 - 1$$

Заметим, что $2n^2 - 1$ — нечетное число. Вспомним, что сумма степеней вершин в графе четна, так как каждое ребро, соединяя две вершины, учитывается дважды. Значит Ивану не удастся построить такой граф и запомнить все звезды.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Задача сведена к теории графов. Сказано, что звезды — вершины, связи — ребра — 1 балл.

2. Сделан один из следующих шагов — 4 балла:

- посчитано количество вершин в графе
- написано, что сумма степеней вершин в графе чётна

Задача 3. Ира и Саша играют в игру, делая ходы по очереди. У них есть прямая линия из 20 клеток, в первой клетке сидит кузнечик. В свой ход его можно подтолкнуть либо на 4 клетки вперёд, либо на одну клетку назад. Например, из второй клетки кузнечик может попасть либо в первую, либо в шестую клетку. Побеждает тот, кто подтолкнет кузнечика в двадцатую клетку. За границы линии выходить нельзя. Ира ходит первая. Кто победит при правильной игре?

Ответ: выиграет первый игрок, Ира.

Решение.

Нужно расписать выигрышные и проигрышные позиции (В и П соответственно). Проигрышной считается та, из которой можно попасть в выигрышную, а выигрышной та, из которой ТОЛЬКО в проигрышную. Делается это с конца (с самой правой, 20й клетки).

20 клетка - В

В 20 можно прийти из 16 $\Rightarrow$ 16 клетка - П

В 16 можно прийти из 12 и 17. Из 17 можем только в 16 $\Rightarrow$ 17 - В

про 12 пока не можем точно сказать, так как из нее можем прийти в 16 и 11. Пропускаем пока что. Рассмотрим 17. в 17 можно прийти из 18 и 13. Так как 17 - В, то и 13 - П и 18 - П.

Продолжая эти рассуждения, получим:

П В П П В П П В П П В П П В П П В

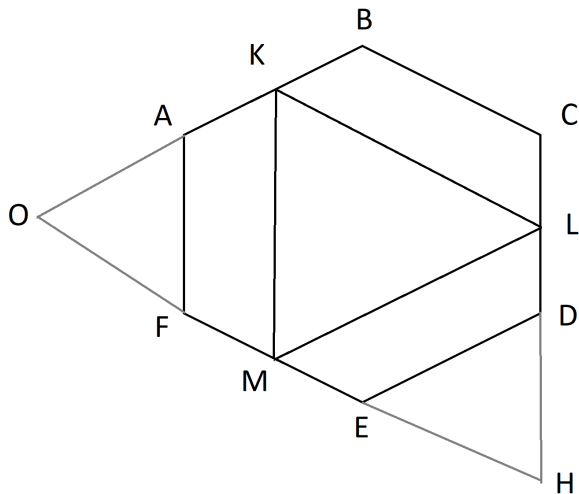
Выигрывает тот, кто после своего первого хода ставит кузнечика в клетку В. То есть, первый игрок, Ира.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Задача сведена к записи выигрышных и проигрышных позиций с конца и определено, что такое выигрышная и проигрышная позиции — 2 балла.
2. Правильно расписаны позиции как минимум первых 5 клеток в порядке рассуждения (20я, 16я, 17я, 13я, 18я) — 5 баллов

Задача 4. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. На серединах сторон AB , CD и EF отметили точки K , L и M соответственно. Докажите, что треугольник KLM - равносторонний.

Решение.



Вспомним, что углы в правильном шестиугольнике равны 120 градусам. Продолжим стороны многоугольника за точки A и F до пересечения. Получим треугольник AOF . Углы OFA , OAF равны по 60 градусам. Следовательно оставшийся угол в треугольнике OAF равен 60 градусам и треугольник является равносторонним. Треугольник $МОК$ равнобедренный, следовательно углы при стороне $МК$ по 60 градусам и он тоже равносторонний.

Выполним аналогичное построение до треугольника за точки E , D . Получим треугольник EDH . Выполним аналогичные рассуждения по поводу углов и получим, что угол EML равен 60 градусам.

Тогда, так как угол FME развернутый и равен 180 гградусам, с одной стороны, а с другой стороны, равен сумме углов FMK , KML , LME , два из которых равны по 60 градусам, то угол KML также равен 60 градусам.

Выполняя аналогичные построения и рассуждения можно найти еще один угол в треугольнике KML . Он будет равен 60 градусам.

Таким образом докажем, что треугольник равносторонний.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Сделан один из следующих шагов — 2 балла:

- дополнительное построение
- определение величины угла в правильном шестиугольнике
- использование свойств параллельности прямых или свойств треугольников для нахождения нужных в решении углов

Задача 5. Найдите значение выражения при $x = 2$:

$$\frac{x^{2026} + x^{2024} + x^{2023} + x^5 + 3x^3 + x^2 + 2x + 2}{x^{2025} + x^{2023} + x^4 + 3x^2 + 2}.$$

Ответ: $\frac{11}{5}$.

Решение.

Сократим дробь. Обозначим числитель $P(x)$, знаменатель $Q(x)$. Найдем НОД($P(x)$, $Q(x)$). Поделим столбиком $P(x)$ на $Q(x)$. Получим

$$P(x) = Q(x) * x + (x^{2023} + x^2 + 2)$$

Из алгоритма Евклида следует, что НОД($P(x)$, $Q(x)$) = НОД($Q(x)$, $x^{2023} + x^2 + 2$). Разделим $Q(x)$ на $x^{2023} + x^2 + 2$. Получим:

$$Q(x) = (x^{2023} + x^2 + 2) * (x^2 + 1)$$

Таким, образом:

$$P(x) = (x^{2023} + x^2 + 2) * (x^2 + 1) * x + (x^{2023} + x^2 + 2) = (x^{2023} + x^2 + 2)(x^3 + x + 1)$$

Тогда дробь примет вид:

$$\frac{(x^{2023} + x^2 + 2)(x^3 + x + 1)}{(x^{2023} + x^2 + 2) * (x^2 + 1)} = \frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$$

Подставим $x = 2$:

$$\frac{2^3 + 2 + 1}{2^2 + 1} = \frac{11}{5}$$

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Правильно выполнен первый шаг алгоритма Евклида — 4 балла
2. Получена правильная сокращенная дробь без подстановки $x = 2$ — 6 баллов

Задача 1. Найдите наибольшее значение выражения $\frac{5bc - 6ab + ac}{a^2 - 3bc + b^2}$, если известно $a - 3b = 16c$ и $\frac{4}{a} + \frac{2}{b} = \frac{1}{2c}$.

Ответ: $\frac{20}{11}$.

Решение.

Пусть $u = \frac{a}{c}$, $v = \frac{b}{c}$. Тогда:

$$u - 3v = 16, \quad \frac{4}{u} + \frac{2}{v} = \frac{1}{2}.$$

Из первого $u = 16 + 3v$. Подставим во второе:

$$\frac{4}{16 + 3v} + \frac{2}{v} = \frac{1}{2} \Rightarrow 8v + 4(16 + 3v) = v(16 + 3v) \Rightarrow 3v^2 - 4v - 64 = 0.$$

Корни: $v = \frac{16}{3}$ или $v = -4$. Соответственно $u = 32$ или $u = 4$.

Выразим $\frac{5bc - 6ab + ac}{a^2 - 3bc + b^2}$ через u, v :

$$\frac{5bc - 6ab + ac}{a^2 - 3bc + b^2} = \frac{u + 5v - 6uv}{u^2 + v^2 - 3v}.$$

Для пары $u = 32$, $v = \frac{16}{3}$:

$$\frac{u + 5v - 6uv}{u^2 + v^2 - 3v} = -\frac{543}{583};$$

для пары $u = 4$, $v = -4$:

$$\frac{u + 5v - 6uv}{u^2 + v^2 - 3v} = \frac{20}{11}.$$

Ясно, что наибольшее значение равно $\frac{20}{11}$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Верно найдены две пары решений u, v — 3 балла.
2. Вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения — 6 баллов.

Задача 2. На островах необъятного океана расположено $N > 10$ пиратских баз, среди которых есть база «Тортуга», причём все пиратские базы находятся на попарно разном удалении друг от друга. В некоторый момент времени из каждой базы отправился корабль, причём каждый корабль взял курс на ближайшую морскую базу. Какое наибольшее число кораблей могло прибыть на «Тортугу»?

Ответ: 5.

Решение. Покажем, что больше пяти кораблей на Тортугу прибыть не могло. Допустим на Тортугу T прибыло 6 кораблей с баз $A_1, A_2, \dots, A_6$. Рассмотрим шестиугольник $A_1A_2A_3 \dots A_6$. Ясно, что $A_1A_2 > A_1T$ и $A_1A_2 > A_2T$. То есть по неравенству треугольника $\angle A_1TA_2 > 60^\circ$. Но аналогично $\angle A_2TA_3 > 60^\circ, \dots, \angle A_6TA_1 > 60^\circ$, то есть

$$\angle A_1TA_2 + \dots + \angle A_6TA_1 > 360^\circ - \text{противоречие.}$$

Осталось показать, что 5 кораблей могли приплыть на Тортугу. Конструктивный пример даётся, например, так: отложим от точки T углы $64^\circ, 68^\circ, 72^\circ, 76^\circ, 80^\circ$. Достаточно теперь положить на сторонах полученных углов вершины $A_1, A_2, \dots, A_5$ так, чтобы $TA_1 > TA_2 > TA_3 > \dots > TA_5$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведена оценка, но пример отсутствует — 3 балла.

Задача 3. В клубе дискуссий по одному историческому вопросу 31 участник придерживается мнения “а”, 13 участников – мнения “b” и 6 – мнения “с”. Если два участника с разными мнениями начинают диалог, каждый из них меняет свое мнение на третье (например, если говорят участники с мнениями “а” и “с”, то оба меняют мнение на “b”). В какой-то момент времени в клубе ровно 4 участника придерживаются мнения “с”. Какое наибольшее число участников с мнением “а” может оказаться в клубе после этого?

Ответ: 44.

Решение. Пусть A человек представляют мнение “а”, B человек — мнение “б”, C человек — мнение “с”. Заметим, что разности $A - B$, $B - C$, $A - C$ не меняют остаток при делении на 3. Например, диалог представителей мнений “а” и “б” меняет их мнение на “с”; до диалога представителей мнений A , B и C , после: $A' = A - 1$, $B' = B - 1$, $C' = C + 2$. Проверим:

$$A' - B' = (A - 1) - (B - 1) = A - B$$

— разность не изменилась,

$$A' - C' = (A - 1) - (C + 2) = A - C - 3$$

— остаток при делении на 3 не изменился,

$$B' - C' = (B - 1) - (C + 2) = B - C - 3$$

— аналогично.

Рассмотрим остатки от деления на 3 разностей мнений, которых придерживались участники изначально:

$$A - B = 18 \equiv 0 \pmod{3}$$

$$A - C = 25 \equiv 1 \pmod{3}$$

$$B - C = 7 \equiv 1 \pmod{3}$$

В какой-то момент $C = 4$, тогда:

$$A - C \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A - 4 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow A \equiv 2 \pmod{3}.$$

$$A + B + C = 50 \Rightarrow A + B = 46$$

$A \equiv 2 \pmod{3}$ и $A \leq 46$, тогда наибольшее значение $A = 44$ и $B = 2$.

$$B - C = -2 \equiv 1 \pmod{3}$$

Найдем последовательность диалогов, приводящих к данному состоянию. Например, три диалога между представителями мнений “а” и “б” и восемь диалогов между представителями мнений “б” и “с” (возможна и другая последовательность диалогов).

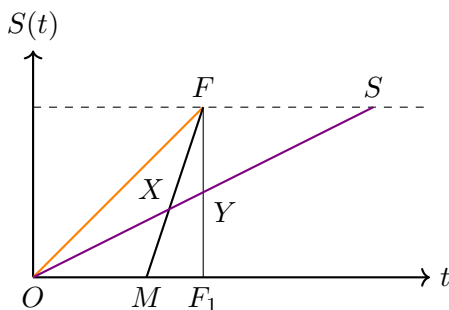
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведена оценка, но пример отсутствует — 5 баллов.
2. Верно найден инвариант, но дальнейшая оценка и пример отсутствуют — 3 балла.

Задача 4. Кот Матроскин, Шарик и Дядя Фёдор решили провести в Простоквашино триатлон – гонку из трёх последовательных этапов: велогонки, заплыва и бега. Герои стартуют одновременно, причём известно, что скорость, с которой дядя Фёдор едет на велосипеде, равна скорости плавания Шарика, а бежит Шарик в два раза медленнее дяди Фёдора, зато Матроскин едет на велосипеде в два раза быстрее Шарика и бежит в три раза быстрее дяди Фёдора. Оказалось, что дядя Фёдор вышел на берег после заплыва одновременно с Шариком, а финишировал одновременно с Матроскиным. Дистанции для заплыва и велобега одинаковы, а дистанция бега в два раза больше. Какую часть общего пути осталось преодолеть Шарiku, когда его обогнал кот Матроскин?

Ответ: 0.3 пути.

Решение. Ясно, что для ответа на вопрос задачи нам достаточно рассмотреть лишь промежуток бега персонажей. Поступим сообразно решению аналогичной задачи из отборочного этапа олимпиады и рассмотрим графики движения персонажей в координатах $t, S(t)$:



Движение Матроскина отмечено отрезком MF , дяди Фёдора – отрезком OF , а движение Шарика – отрезком OS . Тогда X – точка обгона Шарика Матроскиным.

Заметим, что на момент финиша Матроскина и дяди Фёдора Шарик преодолел ровно половину от дистанции бега, так как его скорость вдвое

меньше скорости дяди Фёдора, то есть $FY : YF_1 = 1 : 1$, если F_1 – проекция F на ось времени. Аналогично $MF_1 : MO = 1 : 2$. Применим к треугольнику MF_1F и прямой XY теорему Менелая:

$$\frac{FY}{YF_1} \cdot \frac{F_1O}{OM} \cdot \frac{MX}{XF} = 1,$$

откуда $MX : XY = 2 : 3$. Остаётся вспомнить, что участок бега по протяжённости равен сумме участков с заплывом и велопробежкой, обозначим их за ℓ . Получаем, что Шарику осталось пробежать:

$$\frac{\frac{3}{5} \cdot 2\ell}{4\ell} = 0.3$$

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения — 6 баллов.
2. Доказано, что $MX : XF = 2 : 3$ или аналогичное утверждение при отличном от графического решении — 4 балла.

Задача 5. В равностороннем треугольнике ABC на стороне AB как на диаметре построена окружность. На окружности внутри треугольника выбрана точка F . Точка H – основание перпендикуляра из точки C , лежит на продолжении AF за точку F , причём $FH = 2\sqrt{3}$ и $CH = 1$. Найдите сторону треугольника ABC .

Ответ: $\sqrt{76}$.

Решение. Обозначим $AF = m$, $BF = x$, $AB = a$. Тогда по т. Пифагора в $\triangle ABF$:

$$a^2 = m^2 + x^2. \quad (1)$$

По т. Пифагора в $\triangle AHC$:

$$a^2 = (m + 2\sqrt{3})^2 + 1^2 \iff a^2 = m^2 + 4\sqrt{3}m + 13. \quad (2)$$

Наконец, по т. Пифагора для прямоугольного треугольника BCK (K – основание перпендикуляра из C на BF):

$$a^2 = (x + 1)^2 + (2\sqrt{3})^2 \iff a^2 = x^2 + 2x + 13. \quad (3)$$

Приравнивая (1) и (2) и (1) и (3) уравнения, получим систему:

$$\begin{cases} x^2 = 4\sqrt{3}m + 13, \\ m^2 = 2x + 13. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы имеем

$$4\sqrt{3}m = x^2 - 13 \iff m = \frac{x^2 - 13}{4\sqrt{3}}.$$

Тогда

$$m^2 = \frac{(x^2 - 13)^2}{48}.$$

Приравнивая выражения для m^2 , получаем:

$$\frac{(x^2 - 13)^2}{48} = 2x + 13 \iff (x^2 - 13)^2 = 48(2x + 13).$$

Раскрываем скобки:

$$x^4 - 26x^2 + 169 = 96x + 624,$$

$$x^4 - 26x^2 - 96x - 455 = 0.$$

По следствию из теоремы Безу находим корень $x_1 = -5$. Выполним деление многочлена на $x + 5$:

$$(x + 5)(x^3 - 5x^2 - x - 91) = 0.$$

Продолжая перебор делителей свободного члена, находим корень $x_2 = 7$. Тогда уравнение приобретает вид:

$$(x + 5)(x - 7)(x^2 + 2x + 13) = 0,$$

причём уравнение $x^2 + 2x + 13 = 0$ действительных корней не имеет (дискриминант отрицательный). Значит, единственное положительное решение $x = 7$.

Тогда $AF^2 = m^2 = 2 \cdot 7 + 13 = 27$ и $a = \sqrt{m^2 + x^2} = \sqrt{27 + 49} = \sqrt{76}$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения — 6 баллов.
2. Получено уравнение $x^4 - 26x^2 - 96x - 455 = 0$ — 4 балла.

Задача 1. Для некоторых натуральных чисел n : $n^2 - 5n - 23$ – квадрат целого числа. Найдите сумму всех таких чисел n .

Ответ: 53.

Решение. Пусть $n^2 - 5n - 23 = k^2$, $k \in \mathbb{Z}$. Домножим обе части равенства на 4:

$$4n^2 - 20n - 4k^2 = 92 \Leftrightarrow (2n-5)^2 - 4k^2 = 117 \Leftrightarrow (2n-2k-5)(2n+2k-5) = 117.$$

Найдём все пары целых чисел, произведение которых равно 117: $(1; 117)$, $(-1; -117)$, $(3; 39)$, $(-3; -39)$, $(9; 13)$, $(-9; -13)$, $(13; 9)$, $(-13; -9)$, $(39; 3)$, $(-39; -3)$, $(117; 1)$, $(-117; -1)$.

Пусть $a \cdot b = 117$, тогда

$$\begin{cases} n = \frac{a+b+10}{4}, \\ k = \frac{b-a}{4}. \end{cases}$$

Заметим, что для симметричных пар чисел значения n одинаковые и для всех перечисленных пар $(a; b)$ $k \in \mathbb{Z}$. Найдём значения n для всех $(a; b)$:

1. Для $(1; 117)$: $n = \frac{1+117+10}{4} = \frac{128}{4} = 32$;

2. Для $(3; 39)$: $n = \frac{3+39+10}{4} = \frac{52}{4} = 13$;

3. Для $(9; 13)$: $n = \frac{9+13+10}{4} = \frac{32}{4} = 8$.

Все остальные значения n совпадают с найденными. Для $(a; b)$: $a, b < 0$ значения n отрицательны.

Таким образом, натуральные n : 8, 13 и 32 – их сумма: $8 + 13 + 32 = 53$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Допущена вычислительная ошибка, не влияющая на ход решения — 6 баллов.
2. Исходное выражение преобразовано в вид $(2n-2k-5)(2n+2k-5) = 117 - 4$ балла.

Задача 2. Ковбой Джон хватает со стола револьвер и случайно расстреливает весь семизарядный барабан в три манекена (без единого промаха!) Какова вероятность того, что в первом манекене появится ровно пять дыр от пуль, а в двух оставшихся — по одной?

Ответ: $\frac{14}{729}$.

Решение. Ясно, что вероятность попадания в первый манекен равна $\frac{1}{3}$, во второй — $\frac{1}{3}$ и ровно такая же в третий. Тогда остается вычислить сколькими способами можно «расстрелять» манекены. Рассмотрим перестановки из семи патронов, пять из которых подписаны цифрой 1, а из оставшихся двух один помечен цифрой 2, а другой — цифрой 3. Тогда последовательностей из пяти единиц, одной двойки и одной тройки ровно столько, сколько нужно. Таких последовательностей

$$\frac{7!}{5!1!1!} = 42,$$

так как 7 патроном можно переставить 7! способами, с учетом повторов патронов с единичкой — каждую последовательность пересчитали в 5! раз больше чем нужно. Итого, в силу независимости:

$$\mathbb{P} = 42 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{14}{729}.$$

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Верно вычислено число «подходящих» элементарных исходов — 3 балла.

Задача 3. Города Альфск, Бетск и Гаммск с населением, соответственно равным α, β и γ в тысячах человек, расположены в вершинах остроугольного треугольника ABC (Альфск — вершина A , Бетск — вершина B ,

Гаммск – вершина C), причём $\angle ABC = 45^\circ$. Мэры этих городов решили договориться и построить аэропорт в такой точке, чтобы сумма расстояний, увеличенных пропорционально населению от городов до построенного аэропорта, была минимальна, то есть в точке X , минимизирующей сумму $AX \cdot \alpha + BX \cdot \beta + CX \cdot \gamma$. Оказалось, что построить аэропорт пришлось в центре описанной около треугольника ABC окружности. Чему равно населения Бетска, если $\alpha = 30$ и $\gamma = 40$?

Ответ: 50 (тыс. человек)

Решение. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC , R – её радиус. Тогда $OA = OB = OC = R$. Единичные векторы от O к вершинам:

$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{OA}}{R}, \quad \vec{b} = \frac{\overrightarrow{OB}}{R}, \quad \vec{c} = \frac{\overrightarrow{OC}}{R}.$$

Условие того, что точка O минимизирует взвешенную сумму расстояний:

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0},$$

что равносильно

$$\alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} + \gamma \overrightarrow{OC} = \vec{0}.$$

Угол $\angle ABC = 45^\circ$ является вписанным и опирается на дугу AC . Поэтому центральный угол $\angle AOC$, опирающийся на ту же дугу, равен $\angle AOC = 2\angle ABC = 90^\circ$. Значит, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OC}$.

Выразим $\beta \overrightarrow{OB} = -(\alpha \overrightarrow{OA} + \gamma \overrightarrow{OC})$ и возведём в квадрат обе части:

$$\beta^2 R^2 = \alpha^2 R^2 + \gamma^2 R^2 + 2\alpha\gamma(\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC}).$$

Но $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = 0$ из-за перпендикулярности. Следовательно,

$$\beta^2 = \alpha^2 + \gamma^2.$$

Подставляем $\alpha = 30$ тыс. чел., $\gamma = 40$ тыс. чел.:

$$\beta^2 = 30^2 + 40^2 = 50^2,$$

откуда $\beta = 50$ (тыс. чел.).

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что $OA \perp OC$ — 3 балла.

Задача 4. Решите систему:

$$\begin{cases} \frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} \leq 6 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 12. \end{cases}$$

Ответ: $|x| = |y| = |z| = 2$.

Решение. Пусть $\frac{xy}{z} + \frac{yz}{x} + \frac{zx}{y} = a$, тогда

$$a^2 = \left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2.$$

Но из неравенства $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ — следствия неравенства Коши-Буняковского, имеем оценку:

$$\left(\frac{xy}{z}\right)^2 + \left(\frac{yz}{x}\right)^2 + \left(\frac{zx}{y}\right)^2 + 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 \geq 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 = 36.$$

То есть $|a| \geq 6$, то есть в неравенстве выполнено равенство и $|x| = |y| = |z| = 2$.

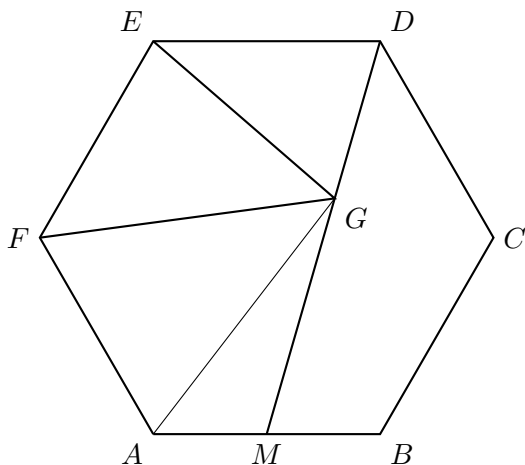
Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что $a \geq 6$, и получено решение $x = y = z = 2$ — 4 балла.

Задача 5. В правильном шестиугольнике $ABCDEF$ точка M — середина стороны AB . На отрезке MD выбрана такая точка G , что $S_{MBCD} = S_{MAFG}$. При этом $S_{DEG} = 2$. Найдите площадь шестиугольника $ABCDEF$.

Ответ: 15.

Решение.



Пусть $\frac{MG}{MD} = k$ и S – искомая площадь шестиугольника. Тогда по свойствам площадей:

$$S_{MBCD} = \frac{S}{3}, \quad S_{AMG} = \frac{kS}{6}, \quad S_{AFG} = \frac{(1+3k)S}{12}$$

$$\text{и } S_{DEG} = \frac{(1-k)S}{3}.$$

По условию $S_{AFG} + S_{AMG} = S_{MBCD}$, то есть

$$\frac{(1+3k)S}{12} + \frac{kS}{6} = \frac{S}{3} \iff k = \frac{3}{5}.$$

Остаётся воспользоваться площадью треугольника DEG :

$$S_{DEG} = 2 = \frac{(1-k)S}{3} \iff S = 15.$$

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения следующие критерии *суммируются*:

1. Получено выражение для площади AMG — 1 балл.
2. Получены выражения для площадей AMG и $MBCD$ — 3 балла.

Олимпиада школьников «Курчатов» по математике – 2026

Заключительный этап 14 марта

10 класс

Задача 1. Найти наименьшее натуральное число n , большее 1000, такое, что среди чисел $n - 1000$, $n - 999$, $n - 998$, $\dots$, $n - 1$, n , $n + 1$, $\dots$, $n + 998$, $n + 999$, $n + 1000$ наибольшую сумму цифр имеет число n .

Ответ: 9999.

Решение. Заметим, что если в каком-либо из чисел $n + 1$, $n + 10$, $n + 100$, $n + 1000$ при выполнении операции сложения не происходит перехода через разряд, то такое число n нам не годится. Значит, число n должно заканчиваться на 9999, поскольку в первых четырех разрядах должны стоять девятки. С другой стороны, несложно видеть, что число $n = 9999$ подходит: при вычитании любого числа от 1 до 1000 сумма цифр строго уменьшится, а при прибавлении любого числа от 1 до 1000 получится число, лежащее на отрезке $[10000; 10999]$. Ясно, что сумма цифр чисел от этом отрезке не превосходит $1 + 0 + 9 + 9 + 9 < 9 + 9 + 9 + 9$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведен только ответ — 1 балл.
2. Доказано, что число 9999 удовлетворяет условию — 2 балла.
3. Доказано, что число имеет вид $\dots 9999$, но дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.

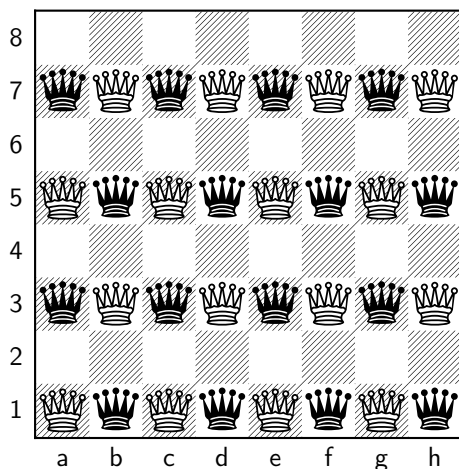
Задача 2. Скажем, что два ферзя на шахматной доске *видят друг друга*, если они стоят или на одной горизонтали, или на одной вертикали, или на одной диагонали, и между ними нет других ферзей. Какое наибольшее количество ферзей (белых и черных) можно расставить на клетчатой доске 8×8 так, чтобы ферзи одного цвета не видели друг друга?

Ответ: 32.

Решение. Докажем оценку. Для этого разобьем нашу доску на шестнадцать квадратов 2×2 . Заметим, что в квадрате 2×2 не могут стоять

два ферзя одного цвета, поэтому в каждом таком квадратике не больше двух ферзей, а значит, всего на доске может стоять не более $2 \cdot 16 = 32$ ферзей.

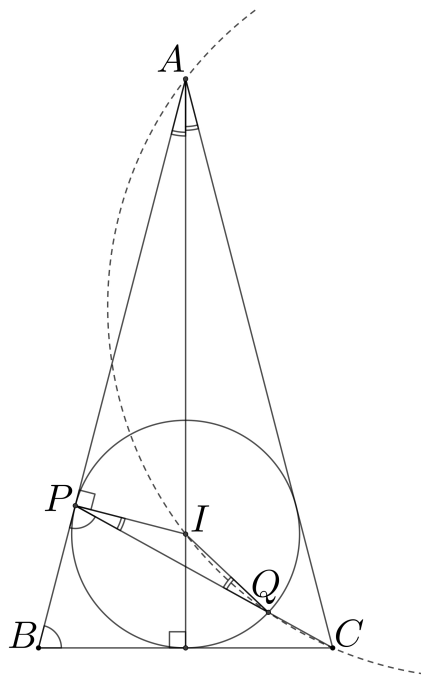
Пример с 32 ферзями строится следующим образом (см. рисунок).



Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведен пример — 2 балла.
2. Присутствует идея рассмотрения небольшого фрагмента доски с верной и обоснованной оценкой количества ферзей (в квадрате 2×2 не больше двух ферзей, в прямоугольнике 2×4 не больше 4 ферзей. . .), но дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.
3. Доказана оценка на 32 ферзя — 4 балла.

Задача 3. Дан равнобедренный остроугольный треугольник ABC ($AB = AC$). Его вписанная окружность ω с центром в точке I касается стороны AB в точке P . Отрезок CP вторично пересекает окружность ω в точке Q . Известно, что точки C, Q, I, A лежат на одной окружности. Найдите $AB : BC$.



Ответ: 2.

Решение. Сначала заметим, что $\angle CAI = \angle IPQ$ в силу вписанности четырехугольника $ACQI$. Далее, поскольку треугольники ABC и IPQ — равнобедренные, $\angle BAI = \angle CAI$ и $\angle IPQ = \angle IQP$. Из этих равенств следует, что $\angle BAI = \angle IPQ$. Тогда $\angle CBP = 90^\circ - \angle BAI = 90^\circ - \angle IPQ = \angle BPC$, поэтому треугольник BPC равнобедренный.

В свою очередь отсюда следует, что треугольники ABC и CBP подобны: они оба равнобедренные и имеют одинаковый угол при вершине B .

Отсюда $\frac{BC}{BP} = \frac{AB}{BC}$. Из отрезков касательных следует, что $BC = 2 \cdot BP$, поэтому $AB = 2 \cdot BC$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что треугольник BPC равнобедренный (или счетом углов, или вычислением длин отрезков) — 3 балла.

Задача 4. Найдите все неотрицательные числа x, y, z , удовлетворяющие равенству $x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} = 3$.

Ответ: $(1, 0, \sqrt{2})$.

Решение. Оценим левую часть равенства, пользуясь неравенством Коши (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим):

$$\begin{aligned} x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{2-z^2} + z\sqrt{3-x^2} &= \\ &= \sqrt{x^2(1-y^2)} + \sqrt{y^2(2-z^2)} + \sqrt{z^2(3-x^2)} \leq \\ &\leq \frac{x^2 + (1-y^2)}{2} + \frac{y^2 + (2-z^2)}{2} + \frac{z^2 + (3-x^2)}{2} = 3. \end{aligned}$$

Значит, каждое из неравенств $\sqrt{x^2(1-y^2)} \leq \frac{x^2 + (1-y^2)}{2}$, $\sqrt{y^2(2-z^2)} \leq \frac{y^2 + (2-z^2)}{2}$, $\sqrt{z^2(3-x^2)} \leq \frac{z^2 + (3-x^2)}{2}$ должно обратиться в равенство. Это в свою очередь означает, что

$$x^2 = 1 - y^2, \quad y^2 = 2 - z^2, \quad z^2 = 3 - x^2.$$

Складывая эти три равенства, получаем, что $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, откуда уже легко найти $x^2 = 1$, $y^2 = 0$ и $z^2 = 2$. Вспоминая, что числа x, y и z неотрицательны, находим единственную тройку $(1, 0, \sqrt{2})$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. В ответ включены отрицательные числа — 6 баллов.
2. Только ответ — 1 балл.
3. В решении содержится идея использования неравенства Коши без дальнейших продвижений — 1 балл.

Задача 5. Множество натуральных чисел S называется *свободным*, если для любых $a, b \in S$ число ab не принадлежит S , и для любого $c \in S$ число c^2 также не принадлежит S . На какое наименьшее количество свободных множеств можно разбить множество $\{2, 3, 4, \dots, 2^{14} - 1\}$?

Ответ: 3.

Решение. Выделим из нашего множества степени двойки, т.е. числа $2, 2^2, 2^3, \dots, 2^{13}$, и поймем, на какое наименьшее количество свободных множеств можно разбить эти степени двойки. Заметим, что, переходя к показателям степеней двойки, мы получаем следующий вопрос: *на сколько множеств, свободных от сумм, можно разбить числа от 1 до 13?* (Множество называется *свободным от сумм*, если оно не содержит сумму никаких двух своих элементов, в том числе совпадающих.)

Легко заметить, что уже числа 1, 2, 3, 4 и 5 нельзя разбить на два множества, свободные от сумм. В самом деле, если 1 — в первом множестве, то $2 = 1 + 1$ — во втором, а $4 = 2 + 2$ — опять в первом. Значит, 5 = 4 + 1 во втором, и в какое бы множество мы ни добавили 3, возникнет противоречие: в первом — $1 + 3 = 4$, во втором — $2 + 3 = 5$.

Пример на три множества выглядит следующим образом: $\{1, 4, 7, 10, 13\}$, $\{2, 3, 11, 12\}$, $\{5, 6, 8, 9\}$. Сразу заметим, что эти множества обладают более сильным условием: если числа k и ℓ (возможно, совпадающие) лежат в одном множестве, то числа $k + \ell$ и $k + \ell + 1$ в нем не лежат.

Осталось заметить, что наше распределение степеней двойки порождает и распределение для всех остальных чисел. Для этого будем к каждой степени двойки 2^k добавлять отрезок $[2^k, 2^{k+1} - 1]$, т.е. отрезок, начинающийся данной степенью двойки и заканчивающийся перед следующей степенью. Например, множество $\{5, 6, 8, 9\}$ порождает множество $[2^5, 2^7 - 1] \cup [2^8, 2^{10} - 1]$. Легко видеть, что это разбиение подходит. В самом деле, если числа a и b лежат в одном из получившихся множеств разбиения A , то $2^k \leq a \leq 2^{k+1} - 1$ и $2^\ell \leq b \leq 2^{\ell+1} - 1$ для некоторых натуральных k и ℓ . Тогда $2^{k+\ell} \leq ab \leq 2^{k+\ell+2} - 2^{k+1} - 2^{\ell+1} + 1 < 2^{k+\ell+2}$. Поскольку числа из отрезков $[2^{k+\ell}, 2^{k+\ell+1} - 1]$ и $[2^{k+\ell+1}, 2^{k+\ell+2} - 1]$ не лежат в A , то и произведение ab в нем не лежит, что и требовалось доказать.

Замечание. Пример можно построить и по-другому. Для этого для каждого натурального числа n вычислим количество его простых делителей (не обязательно различных). Тогда можно разбить наши числа на свободные множества по количеству простых делителей: в первое свободное множество отнесем числа, которые содержат 1, 4, 7, 10 или 13 простых делителей, во второе — 2, 3, 11 или 12, а в третье — 5, 6, 8 или 9. Легко видеть, что такое разбиение также подходит.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного

решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что двух множеств недостаточно — 2 балла.
2. Построено верное разбиение степеней двоек на свободные множества — 2 балла.
3. Указано, что разбиение можно проводить по количеству простых делителей, но дальнейшие продвижения отсутствуют — 1 балл.
4. Построен верный пример, но не доказана оценка — 5 баллов.
5. Решение в целом верное, но при построении примера допущена ошибка при разбиении чисел от 1 до 13 на множества, свободные от сумм — 5 баллов.

Задача 1. Назовем *интересными* рациональные числа вида $\frac{a^2 + b^2}{ab}$, где a и b — произвольные натуральные числа. Какие натуральные числа можно представить в виде суммы нескольких (возможно, одного или повторяющихся) интересных чисел?

Ответ: Все натуральные числа, кроме 1 и 3.

Решение. Ясно, что если два натуральных числа m и n представимы в виде суммы интересных чисел, то и число $m + n$ представимо в таком виде. Заметим, что числа

$$2 = \frac{1^2 + 1^2}{1 \cdot 1} \quad \text{и} \quad 5 = \frac{2^2 + 1^2}{2 \cdot 1} + \frac{2^2 + 1^2}{2 \cdot 1}$$

представимы. Поэтому представимы все четные числа (как суммы двоек) и все нечетные числа, большие 3 (как сумма пятерки и некоторого количества двоек).

Осталось понять, что числа 1 и 3 непредставимы. Для этого заметим, что каждое интересное число не меньше 2, потому что по неравенству Коши (неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим) $\frac{a^2 + b^2}{ab} \geq \frac{2ab}{ab} = 2$. Отсюда сразу следует, что 1 нельзя представить в виде суммы интересных чисел. Если число 3 представимо, то оно в точности равно интересному числу, т.к. иначе сумма двух и более интересных чисел будет не меньше 4. Но уравнение $a^2 - 3ab + b^2 = 0$ не имеет натуральных решений, т.к. из него следует, что $\frac{a}{b} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \notin \mathbb{Q}$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что представимы отдельные числа (2, 4, 5...), но не доказано представление бесконечного множества натуральных чисел — 0 баллов.
2. Приведен верный ответ, но отсутствуют какие-либо доказательства — 0 баллов.

3. Доказано, что можно представить бесконечно много натуральных чисел, но верного ответа нет — 1 балл.
4. Доказано, что представимы 2 и все числа, большие 3 — 2 балла.
5. Доказано, что 1 непредставимо — 1 балл.
6. Доказано, что 3 непредставимо — 2 балла.

Задача 2. Числа x , y и z таковы, что

$$\frac{\sin x + \sin y + \sin z}{\sin(x + y + z)} = \frac{\cos x + \cos y + \cos z}{\cos(x + y + z)} = 2.$$

Вычислите $\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x)$.

Ответ: 2.

Решение. Преобразуем наши равенства следующим образом:

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y + \sin z &= 2 \sin(x + y + z) = 2(\sin(x + y) \cos z + \cos(x + y) \sin z), \\ \cos x + \cos y + \cos z &= 2 \cos(x + y + z) = 2(\cos(x + y) \cos z - \sin(x + y) \sin z).\end{aligned}$$

Домножая первую строку на $\sin z$, вторую на $\cos z$ и складывая, получаем следующее соотношение:

$$\sin z(\sin x + \sin y + \sin z) + \cos z(\cos x + \cos y + \cos z) = 2 \cos(x + y)$$

(в правой части сокращаются слагаемые, содержащие $\sin(x + y)$, а коэффициент при $\cos(x + y)$ будет равен $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$).

Сложим аналогичные равенства для $\cos(y + z)$ и $\cos(z + x)$ и получим следующее:

$$\begin{aligned}(\sin x + \sin y + \sin z)(\sin x + \sin y + \sin z) + \\ + (\cos x + \cos y + \cos z)(\cos x + \cos y + \cos z) = \\ = 2(\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x)).\end{aligned}$$

Подставляя в левую часть формулы $\sin x + \sin y + \sin z = 2 \sin(x + y + z)$ и $\cos x + \cos y + \cos z = 2 \cos(x + y + z)$, получаем, что

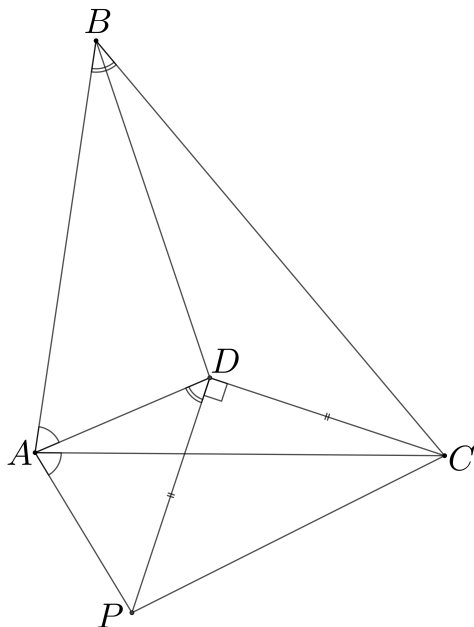
$$\begin{aligned}2(\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x)) = \\ = (\sin x + \sin y + \sin z)^2 + (\cos x + \cos y + \cos z)^2 = \\ = 4(\sin^2(x + y + z) + \cos^2(x + y + z)) = 4,\end{aligned}$$

откуда следует, что $\cos(x + y) + \cos(y + z) + \cos(z + x) = 2$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Получено выражение величины $\cos(x + y)$ (или или суммы других двух переменных) через синусы и косинусы чисел x , y и z , но дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.

Задача 3. Внутри остроугольного треугольника ABC отмечена точка D , такая, что $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Также известно, что $\angle ADC = \angle ABC + 90^\circ$. Чему равна величина $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD}$?



Ответ: $\sqrt{2}$.

Решение. Проведем в точке D перпендикуляр к отрезку CD и отложим на нем отрезок $DP = DC$, как на рисунке. Заметим, что тогда соотношение $AB \cdot CD = AD \cdot BC$ переписывается в виде $\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DP}$. Кроме того, $\angle ABC = \angle ADC - 90^\circ = \angle ADP$. Значит, треугольники ABC и

ADP подобны по двум сторонам и углу между ними. Отсюда получаются два равенства. Во-первых, $\angle BAC = \angle DAP$, откуда следует, что $\angle BAD = \angle CAP$. Во-вторых, соотношение $\frac{AC}{AP} = \frac{AB}{AD}$. Из этих двух равенств следует еще одно подобие по двум сторонам и углу между ними: на этот раз треугольников BAD и CAP . Из этого подобия следует, что $\frac{BD}{CP} = \frac{AB}{AC}$. Поскольку по теореме Пифагора $CP = \sqrt{2}CD$, окончательно находим $\frac{AC \cdot BD}{AB \cdot CD} = \frac{AC}{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}BD}{CP} = \sqrt{2}$.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Отмечена точка P , но других продвижение нет — 1 балл.
2. Доказано подобие треугольников ABC и ADP , дальнейшие продвижения отсутствуют — 2 балла.
3. Доказано подобие треугольников BAD и CAP , дальнейшие продвижения отсутствуют — 4 балла.
4. Полученный ответ неверен из-за вычислительной ошибки, но все логические рассуждения правильные — 5 баллов.

Задача 4. В таблице $n \times n$ произвольным образом расставлены числа от 1 до n^2 . Для каждой пары чисел, находящихся в одном столбце или в одной строке, посчитаем отношение большего числа к меньшему. Назовем *характеристикой* таблицы наименьшее из полученных чисел. Каково наибольшее возможное значение характеристики таблицы?

Ответ: $\frac{n+1}{n}$.

Решение. Пример таблицы с характеристикой $\chi = \frac{n+1}{n}$ строится следующим образом. Рассмотрим таблицу

1	$n^2 - n + 2$	...	$2n$
$n + 1$	2	...	$3n$
$2n + 1$	$n + 2$	...	$4n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n^2 - n + 1$	$n^2 - 2n + 2$	...	n

В каждом столбце любые два числа отличаются не менее чем на n , а в каждой строке — не менее чем на $n - 1$. Значит, отношение любых двух чисел в одном столбце не меньше $\frac{a+n}{a} = 1 + \frac{n}{a} \geq 1 + \frac{n}{n^2 - n} = \frac{n}{n-1} < \frac{n+1}{n}$, а отношение любых двух чисел в одной строке не меньше $\frac{a+(n-1)}{a} = 1 + \frac{n-1}{a}$. Если $a \leq n^2 - n$, то $1 + \frac{n-1}{a} \geq 1 + \frac{n-1}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n}$, что и требовалось. Если $a = n^2 - n + 1$, то несложно видеть, что все остальные числа в строке строго меньше a , поэтому число a не может появиться в знаменателе.

Теперь докажем, что характеристика χ любой таблицы не превосходит числа $\frac{n+1}{n}$. Построенный нами пример показывает, что наименьшее значение отношения двух чисел, стоящих в одном ряду таблицы, достигается на числах, близких к n^2 . Поэтому будем рассматривать самые большие числа в нашей таблице и оценивать отношения пар среди них. Сначала возьмем числа $n^2, n^2 - 1, \dots, n^2 - (n - 1)$. Если какие-то два числа из этого набора стоят в одном столбце или в одной строке, то $\chi \leq \frac{n^2}{n^2 - n + 1} < \frac{n+1}{n}$ (т.к. $n^3 < (n^2 - n + 1)(n + 1) = n^3 + 1$). Если же все эти числа стоят в разных строках и в разных столбцах, рассмотрим следующее по величине число $n^2 - n$. Рассмотрим строку и столбец, содержащие число $n^2 - n$. Тогда максимальное число в одном ряду с ним не больше n^2 , а второе по величине — не больше $n^2 - 1$. Значит, посчитав отношение этого числа к $n^2 - n$, получаем, что $\chi \leq \frac{n^2 - 1}{n^2 - n} = \frac{n+1}{n}$, что и требовалось.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Приведен верный ответ — 1 балл.
2. Построен обоснованный пример таблицы с характеристикой $\frac{n+1}{n}$ — 2 балла.
3. Доказано, что характеристика таблицы не больше $\frac{n+1}{n}$ — 4 балла.

Задача 5. Дан квадратный трехчлен $f(x) = x^2 + ax - 1$. Паша нашел три вещественных решения уравнения $f(f(f(x))) = x$. Докажите, что если Паша постарается, то найдет еще два вещественных решения.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — решения уравнения $f(x) = x$ (такие решения существуют, поскольку квадратный трехчлен $f(x) - x$ принимает отрицательное значение -1 в точке $x = 0$ и имеет положительный старший коэффициент). Далее, пусть $t \neq x_1, x_2$ — некоторое решение уравнения $f(f(f(x))) = x$, найденное Пашей (такое есть, поскольку Паша нашел три решения). Заметим, что тогда числа $f(t)$ и $f(f(t))$ также являются решениями нашего уравнения. Более того, эти числа различны и не равны t : в самом деле, если $f(t) = t$, то $t = x_1$ или $t = x_2$, что неверно; если $f(f(t)) = t$, то $t = f(f(f(t))) = f(t)$, что невозможно, и наконец, если $f(t) = f(f(t))$, то $f(f(t)) = f(f(f(t))) = t$, что также невозможно..

Таким образом, уравнение $f(f(f(x))) = x$ имеет не менее пяти корней: $x_1, x_2, t, f(t), f(f(t))$. Поэтому, если Паша постарается, еще два корня найдутся.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Присутствует идея рассмотрения корней x_1 и x_2 , но решение не получено — 2 балла.
2. Сформулировано и доказано, что уравнение $f(f(f(x))) = x$ имеет решение, отличное от x_1, x_2 — 3 балла.
3. В решении присутствуют мелкие недочеты (например, не доказано, что числа $t, f(t), f(f(t))$ различны) — 6 баллов.

Задача 6. По кругу стоят n школьников попарно разного роста $h_1 < h_2 < \dots < h_n$ (школьники стоят в произвольном порядке). Если школьник ростом h_k стоит рядом по часовой стрелке со школьником ростом не больше h_{k-2} , они меняются местами. В каждой перестановке меняется местами одна пара школьников. Докажите, что не более чем через C_n^3 перестановок школьники перестанут меняться местами.

Решение. Докажем, что школьники с ростом h_i и h_j , где $i < j$, поменяются местами не более $j - i - 1$ раз. Будем вести доказательство индукцией по $j - i$. Для $j - i = 1$ утверждение следует из условия. Чтобы сделать переход, рассмотрим только трех школьников: $i, i + 1$, и j . Тогда после первой перестановки, произошедшей между школьниками i и j , они будут стоять по кругу в порядке $i, j, i + 1$. Значит, чтобы им поменяться местами еще раз, сначала придется поменяться местами школьникам $i + 1$

и j , а это можно сделать не более $j - (i + 1) - 1$ раз по предположению индукции.

Таким образом, искомое количество перестановок не превосходит

$\sum_{1 \leq i < j \leq n} (j - i - 1)$. Докажем, что эта сумма равна C_n^3 . Проще всего это сделать так. Обозначим нашу сумму через $f(n)$. Заметим, что $f(3) = 1 = C_3^3$. Кроме того,

$$f(n) - f(n-1) = \sum_{1 \leq i \leq n-1} (n-i-1) = (n-1)^2 - \frac{n(n-1)}{2} = C_{n-1}^2 = C_n^3 - C_{n-1}^3.$$

Таким образом, величины $f(n)$ и C_n^3 совпадают при $n = 3$, а также изменяются на одну и ту же величину при увеличении n на единицу. Значит, $f(n) = C_n^3$, что и требовалось.

Решение. Рассмотрим школьника с наибольшим ростом h_n . Он сможет сделать не более $n - 2$ перестановок, пока не встанет рядом со школьником роста h_{n-1} . Будем теперь мыслить этих двух школьников как одного школьника роста h_{n-1} . Теперь он сможет сделать не более $2 \cdot (n - 3)$ перестановок, пока не встанет рядом со школьником роста h_{n-2} (множитель «2» возникает из-за того, что на самом деле теперь шаги совершают два школьника h_n и h_{n-1}). Продолжая аналогично, мы получаем, что общее количество перестановок не превосходит суммы

$$1 \cdot (n - 2) + 2 \cdot (n - 3) + \dots + (n - 2) \cdot (n - (n - 1)).$$

Преобразуем эту сумму следующим образом. Сначала посчитаем сумму первых слагаемых: она равна $n \cdot (1 + 2 + \dots + (n - 2)) = \frac{n(n-1)(n-2)}{2} = 3C_n^3$. Теперь посчитаем вторую часть (слагаемые со знаком «-»): она равна $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + (n - 2) \cdot (n - 1)$. Докажем, что она равна $2C_n^3$ (тогда итоговая сумма будет в точности равна C_n^3). Это легко сделать по индукции или использовав соображение из первого решения: $2C_{n+1}^3 - 2C_n^3 = (n - 1)n$, что верно.

Любое полное решение оценивается в 7 баллов. В отсутствие полного решения используются следующие критерии:

1. Доказано, что количество перестановок школьников конечно — 1 балл.
2. Сформулировано и доказано, что количество перестановок школьников i, j не превосходит $|j - i| - 1$ (решение 1) — 2 балла.

3. Приведена формула для оценки количества перестановок в виде суммы (как в решениях 1 и 2 или эквивалентных им) — 4 балла.