

Задача 1. Невесомый жёсткий рычаг закреплён на оси в точке O и находится в равновесии в горизонтальном положении. На правом плече на расстоянии $a = 20$ см от оси закреплён груз массой $M = 0,50$ кг. На левом плече лежит кубик льда массы m , который в момент $t = 0$ находится на расстоянии $x_0 = 10$ см от оси. Кубик слегка подтолкнули вдоль рычага от оси, и он начал движение со скоростью $v = 0,02$ см/с. В процессе движения кубика лёд тает так, что рычаг всё время остаётся в равновесии. Край левого плеча находится на расстоянии $x_1 = 50$ см от оси. Найдите среднюю скорость таяния льда за время, за которое кубик достигнет края рычага. Под средней скоростью таяния льда понимается отношение массы растаявшего льда за всё время движения к этому времени движения. Трением между кубиком и рычагом можно пренебречь. Ответ выразите в г/с.

Возможное решение

Поскольку рычаг остается в равновесии, моменты сил тяжести, приложенных к кубику льда и грузу, относительно оси O равны по модулю:

$$mg \cdot x = Mg \cdot a.$$

Сокращая g , получаем

$$mx = Ma.$$

В силу пренебрежимо малого трения между рычагом и кубиком кубик движется равномерно, при этом его координата меняется по закону:

$$x(t) = x_0 + vt,$$

с учетом записанного выражения получим зависимость массы кубика от времени:

$$m(t) = \frac{Ma}{x(t)} = \frac{Ma}{x_0 + vt}.$$

Время движения t_1 кубика до края рычага ($x(t_1) = x_1$):

$$t_1 = \frac{x_1 - x_0}{v}.$$

Для определения средней скорости таяния выразим начальную и конечную массы кубика льда в процессе его движения:

$$m_0 = \frac{Ma}{x_0}, \quad m_1 = \frac{Ma}{x_1}.$$

Средняя скорость таяния в соответствии с определением из условия задачи:

$$\langle \mu \rangle = \frac{m_0 - m_1}{t_1} = \frac{\frac{Ma}{x_0} - \frac{Ma}{x_1}}{\frac{x_1 - x_0}{v}} = \frac{Ma v}{x_0 x_1}.$$

Подставляя значения из условия:

$$\langle \mu \rangle = \frac{0,50 \cdot 20 \cdot 0,02}{10 \cdot 50} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ кг/с} = 0,40 \text{ г/с}.$$

$$\text{Ответ: } \langle \mu \rangle = \frac{Ma v}{x_0 x_1} = 0,40 \text{ г/с}.$$

Критерии

1. Верно записано условие равновесия рычага. (+ 2 балла)
2. Верно определена зависимость массы кубика от координаты. (+ 2 балла)
3. Верно найдено время движения кубика до края рычага. (+ 2 балла)
4. Верно записано выражение для средней скорости таяния. (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

Задача 2. Садовод плотно упаковал яблоки в мешок так, чтобы их суммарная масса составила $M = 24$ кг. Пытаясь сдвинуть мешок вдоль горизонтальной поверхности при помощи пружины, садовод заметил, что при длине пружины $l_1 = 140$ мм мешок с яблоками сдвинулся с места. Подвесив мешок на той же пружине вертикально, садовод вновь измерил длину пружины и обнаружил, что её длина в состоянии равновесия составила $l_2 = 170$ мм. Найдите длину пружины l_0 в недеформированном состоянии. Коэффициент трения между мешком и горизонтальной поверхностью составляет $\mu = 0,5$. Ускорение свободного падения $g = 10$ Н/кг.

Возможное решение

При равномерном горизонтальном движении сила упругости пружины равна по модулю силе трения:

$$F_{\text{упр1}} = \mu Mg = 0,5 \cdot 24 \cdot 10 = 120 \text{ Н.}$$

В случае вертикального равновесия сила упругости равна по модулю силе тяжести:

$$F_{\text{упр2}} = Mg = 24 \cdot 10 = 240 \text{ Н.}$$

Согласно закону Гука, сила упругости пропорциональна абсолютной деформации пружины:

$$F_{\text{упр}} = k \cdot \Delta l,$$

где k — жёсткость пружины, $\Delta l = |l - l_0|$ — удлинение пружины относительно недеформированной длины l_0 .

Для первого случая (горизонтальное растяжение):

$$F_{\text{упр1}} = k(l_1 - l_0).$$

Для второго случая (вертикальное растяжение):

$$F_{\text{упр2}} = k(l_2 - l_0).$$

Вычтем из второго уравнения первое:

$$F_{\text{упр2}} - F_{\text{упр1}} = k[(l_2 - l_0) - (l_1 - l_0)] = k(l_2 - l_1).$$

Отсюда находим жёсткость:

$$k = \frac{F_{\text{упр2}} - F_{\text{упр1}}}{l_2 - l_1} = \frac{240 - 120}{0,170 - 0,140} = \frac{120}{0,030} = 4000 \text{ Н/м.}$$

Определим длину недеформированной пружины:

$$l_0 = l_1 - \frac{F_{\text{упр1}}}{k} = 0,14 - \frac{120}{4000} = 0,11 \text{ м}$$

Ответ: 110 мм.

Критерии

1. Верно записана сила упругости при горизонтальном движении мешка. (+ 2 балла)
2. Верно записана сила упругости при вертикальном подвесе мешка. (+ 2 балла)
3. Верно вычислена жёсткость пружины из закона Гука. (+ 2 балла)
4. Верно определена длина недеформированной пружины. (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

Задача 3. Пират опускает в воду ($\rho_v = 1000 \text{ кг/м}^3$) лёгкий жёсткий колокол объёмом $V = 3,0 \text{ л}$ в виде цилиндра, открытый снизу. Внутри колокола находится слой масла толщиной $h = 10 \text{ см}$ и плотностью $\rho_m = 900 \text{ кг/м}^3$, которое не смешивается с водой. Площадь основания колокола $S = 100 \text{ см}^2$. К колоколу привязан мешочек с золотыми монетами. Масса каждой монеты $m_0 = 25 \text{ г}$, а её объём $V_0 = 1,5 \text{ см}^3$. Какое максимальное количество монет N может находиться в мешочке, чтобы система всё ещё могла плавать? Массой самого колокола, верёвки и мешочка пренебречь. Считайте, что при погружении колокола в воду воздух, запертый под колоколом, практически не сжимается. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ Н/кг}$.

Возможное решение

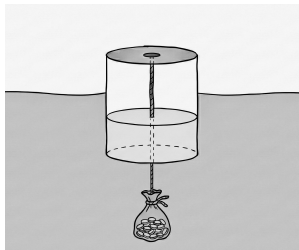


Рис. 1: Схема погружения колокола в воду.

1. Для того чтобы система плавала в полностью погруженном состоянии, сила тяжести должна быть уравновешена силой Архимеда:

$$F_g = F_A \implies (M_{oil} + N \cdot m_0)g = \rho_v g V_{total} \quad (1)$$

2. Найдем массу слоя масла внутри колокола. Объем масла $V_{oil} = S \cdot h$. Тогда:

$$M_{oil} = \rho_m \cdot S \cdot h = 900 \cdot 0,01 \cdot 0,1 = 0,9 \text{ кг}.$$

3. Суммарный объем вытесненной воды V_{total} складывается из объема полости колокола (занятой воздухом и маслом) и объема погруженных монет:

$$V_{total} = V + N \cdot V_0$$

4. Подставим выражения масс и объемов в уравнение равновесия (1) и сократим на g :

$$M_{oil} + N \cdot m_0 = \rho_v (V + N \cdot V_0)$$

$$N(m_0 - \rho_v V_0) = \rho_v V - M_{oil}$$

5. Выразим искомое количество монет N :

$$N = \frac{\rho_v V - M_{oil}}{m_0 - \rho_v V_0}$$

$$N = \frac{1000 \cdot 0,003 - 0,9}{0,025 - 1000 \cdot 1,5 \cdot 10^{-6}} = \frac{2,1}{0,025 - 0,0015} = \frac{2,1}{0,0235} \approx 89,36.$$

6. Так как N должно быть целым числом, а при $N = 90$ средняя плотность системы превысит плотность воды и она утонет, максимальное число монет равно $N_{max} = 89$.

Ответ: $N_{max} = 89$

Критерии

1. Верно записано условие плавания системы (равенство сил тяжести и Архимеда). (+ 2 балла)
2. Верно найдена масса масла внутри колокола. (+ 2 балла)
3. Верно определён суммарный объём вытесненной воды. (+ 2 балла)
4. Верно выражено количество монет из уравнения равновесия. (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ с учётом целочисленности. (+ 2 балла)

Задача 4. В прямоугольный высокий сосуд налита жидкость плотности $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$. В одной из стенок у дна сосуда имеется прямоугольное отверстие высоты $h = 5 \text{ см}$, в которое вставлена пробка такого же сечения. Расстояние от стенки сосуда до края пробки внутри жидкости равно $\ell = 1 \text{ см}$. Между пробкой и дном сосуда жидкость не проникает. При какой минимальной высоте H уровня жидкости над пробкой жидкость сможет её вытолкнуть наружу? Коэффициент трения пробки о дно сосуда равен $\mu = 0,3$. Атмосферное давление равно $p_0 = 100 \text{ кПа}$. Трением пробки о стенки сосуда пренебречь. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ Н/кг}$.

Возможное решение

Пробка удерживается в отверстии за счёт силы трения о дно сосуда и атмосферного давления, действующего на её внешний торец. Выталкиванию пробки препятствуют:

- сила атмосферного давления $p_0 S$, действующая на внешний торец пробки наружу;
- сила трения пробки о дно $F_{\text{тр}}$.

Выталкивают пробку:

- сила давления жидкости на внутренний торец пробки $p_{\text{ср}} S$, где $p_{\text{ср}}$ — среднее давление жидкости на торец пробки.

Обозначим высоту уровня жидкости над пробкой через H . Условие отсутствия движения пробки:

$$p_{\text{ср}} S \geq F_{\text{тр}} + p_0 S,$$

Поскольку отверстие имеет высоту h , давление жидкости на разных высотах пробки различно. Среднее давление жидкости на торец пробки равно давлению на глубине середины отверстия:

$$p_{\text{ср}} = p_0 + \rho g \left(H + \frac{h}{2} \right).$$

где

$$p_{\text{ср}} = p_0 + \rho g \left(H + \frac{h}{2} \right), \quad S = dh, \quad F_{\text{тр}} = \mu(\rho g H + p_0) \ell d.$$

Подставляя, получаем

$$\left(p_0 + \rho g \left(H + \frac{h}{2} \right) \right) dh \geq \mu(\rho g H + p_0) \ell d + p_0 dh.$$

Сокращая на d и приводя подобные, получаем

$$\rho g h H + \frac{\rho g h^2}{2} \geq \mu \rho g \ell H + \mu p_0 \ell,$$

откуда следует неравенство для высоты уровня жидкости в сосуде:

$$H \geq \frac{\mu p_0 \ell - \rho g h^2 / 2}{\rho g (h - \mu \ell)}.$$

Подставляя числа, определим минимальную высоту, при которой жидкость выталкивает пробку наружу:

$$H_{\min} = \frac{0,3 \cdot 100000 \cdot 0,01 - \frac{1000 \cdot 10 \cdot (0,05)^2}{2}}{1000 \cdot 10 \cdot (0,05 - 0,3 \cdot 0,01)} = \frac{300 - 12,5}{10000 \cdot 0,047} = \frac{287,5}{470} \approx 0,61 \text{ м}.$$

$$\text{Ответ: } H_{\min} \approx 0,61 \text{ м} \approx 61 \text{ см}.$$

Критерии

1. Верно записано условие выталкивания пробки (баланс сил давления). (+ 2 балла)
2. Верно определено среднее давление жидкости на пробку. (+ 2 балла)
3. Верно записана сила трения пробки о дно сосуда. (+ 2 балла)
4. Верно выведено неравенство для минимальной высоты уровня жидкости. (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

Задача 5. В цилиндрический сосуд, площадь основания которого равна S , налита сжимаемая жидкость массы $M = 750$ г, плотность ρ которой в результате действия силы тяжести зависит от глубины h по закону $\rho(h) = \rho_0(1 + \alpha h)$, где $\rho_0 = 1$ г/см³, $\alpha = 0.01$ см⁻¹. На сколько изменится высота столба жидкости, если в нее опустить кубик массы $m = 500$ г? Известно, что кубик плавает в жидкости, целиком погрузившись в неё.

Возможное решение

Выразим массу жидкости через среднюю плотность:

$$M = \rho_{\text{ср}} h_0 S = \frac{\rho_0 + \rho}{2} h_0 S = \rho_0 h_0 \left(1 + \frac{\alpha h_0}{2}\right) S.$$

Отсюда

$$\alpha h_0^2 + 2h_0 - \frac{2M}{S\rho_0} = 0, \quad h_0 = \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 + \frac{2M\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2} - 1 \right].$$

При условии плавания кубика его погружение эквивалентно увеличению общей массы жидкости:

$$h = \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 + \frac{2(M+m)\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2} - 1 \right].$$

Для обоснования полученного выше результата представим, что у сосуда с жидкостью убрали дно и поставили такую конструкцию на весы. С одной стороны показания весов определяются суммой масс жидкости и погруженного в него тела, а с другой – на чашу весов давит сила гидростатического давления столба жидкости (напомним, что кубик плавает в жидкости, то есть не касается дна сосуда). Увеличение показаний весов соответствует увеличению высоты столба жидкости, новое значение высоты жидкости в сосуде, таким образом, соответствует новой массе содержимого сосуда.

Изменение высоты столба жидкости в сосуде тогда:

$$\Delta h = h - h_0 = \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 + \frac{2(M+m)\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{2M\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2} \right].$$

$$\text{Ответ: } \Delta h = \frac{1}{\alpha} \left[\left(1 + \frac{2(M+m)\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2} - \left(1 + \frac{2M\alpha}{S\rho_0}\right)^{1/2} \right].$$

Критерии

1. Верно выражена масса жидкости через зависимость плотности от глубины. (+ 2 балла)
2. Верно найдена начальная высота столба жидкости. (+ 2 балла)
3. Верно записано условие плавания кубика в сжимаемой жидкости. (+ 2 балла)
4. Верно найдена новая высота столба жидкости после погружения кубика. (+ 2 балла)
5. Получен верный ответ для изменения высоты столба. (+ 2 балла)

Задача 1. Тонкая однородная металлическая пластинка имеет форму правильного восьмиугольника со стороной $a = 1$ см. Все вершины пронумерованы от «1» до «8» по часовой стрелке. В момент времени $t = 0$ в вершинах с номерами «1», «3», «5» и «7» одновременно зажигаются точечные источники теплоты. Тепловой фронт распространяется от источника по пластинке во всех направлениях с одинаковой постоянной скоростью v . Через некоторое время внутри восьмиугольника образуются области, нагретые одновременно двумя источниками. Найдите длину границы этой области в момент времени $t = \frac{a}{v}$.

Примечание: Длина дуги окружности радиуса R вычисляется по формуле: $l = \frac{2\pi R\alpha}{360^\circ}$, где α — градусная мера центрального угла (или дуги).

Возможное решение

Обозначим через A , C , E , G вершины восьмиугольника с номерами 1, 3, 5, 7 соответственно, то есть именно в них расположены источники теплоты. Через время

$$t = \frac{a}{v}$$

тепловой фронт от каждого источника представляет собой окружность радиуса

$$R = vt = a.$$

Рассмотрим два соседних источника, например, в вершинах A и C . Между ними находится вершина B (с номером «2»). Так как восьмиугольник правильный, то

$$AB = BC = a, \quad \angle ABC = 135^\circ.$$

Поскольку $AB = a = R$ и $CB = a = R$, точка B лежит одновременно на обеих окружностях, то есть является одной из точек их пересечения. Обозначим вторую точку пересечения через P .

Рассмотрим четырёхугольник $ABCP$. Все его стороны равны a :

$$AB = BC = a \quad (\text{стороны восьмиугольника}),$$

$$PA = PC = a \quad (\text{точка } P \text{ лежит на обеих окружностях радиуса } a).$$

Следовательно, $ABCP$ — ромб со стороной a .

В ромбе противоположные углы равны, а сумма соседних углов равна 180° . Угол при вершине B известен:

$$\angle ABC = 135^\circ.$$

Тогда противоположный ему угол:

$$\angle APC = 135^\circ,$$

а углы при вершинах A и C :

$$\angle BAP = \angle BCP = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ.$$

Граница области, нагретой одновременно от источников A и C , представляет собой «линзу», ограниченную двумя дугами окружностей, стягивающими центральный угол 45° . Тогда длина одной дуги равна

$$l_1 = \frac{2\pi a \cdot 45^\circ}{360^\circ} = \frac{\pi a}{4}.$$

Одна область пересечения двух соседних фронтов ограничена двумя такими дугами, значит её граница имеет длину

$$l = 2l_1 = \frac{\pi a}{2}.$$

Из соображений симметрии заключаем, что всего на пластине имеется четыре таких области. При этом фронты от противоположных источников не пересекаются, поэтому суммарная длина границы всей области, нагретой одновременно двумя источниками, равна

$$L = 4 \cdot \frac{\pi a}{2} = 2\pi a.$$

При $a = 1$ см получаем

$$L = 2\pi \text{ см} \approx 6,28 \text{ см.}$$

Ответ:

$$L \approx 6,28 \text{ см.}$$

Критерии

1. Верно определен радиус теплового фронта в момент времени t . (+2 балла)
2. Верно установлена граница нагретой области (+2 балла)
3. Верно найден центральный угол, соответствующий одной дуге границы. (+2 балла)
4. Верно найдена длина границы одной области пересечения двух соседних тепловых фронтов. (+2 балла)
5. Верно найдена суммарная длина всей границы области, нагретой одновременно двумя источниками. (+2 балла)

Задача 2. В ходе экспериментов в калориметр через металлическую трубку подают водяной пар при температуре 100°C . В каждом опыте наблюдения производятся после того, как температура смеси установится. Из-за нагрева трубки и деталей установки часть тепла, выделяющегося при конденсации и последующем охлаждении конденсата, рассеивается за пределы калориметра. Считайте, что одна и та же доля η этой энергии передаётся содержимому калориметра, а остальное теряется. Величина η одинакова во всех опытах.

Провели два опыта. В каждом из них в калориметре находится кусок льда массой $m = 1,20$ кг, имеющий неизвестную начальную температуру $T_0 < 0^\circ\text{C}$. В первом опыте после прекращения подачи пара и наступления равновесия в калориметре остаётся только лёд с микроскопическими капельками воды на поверхности. Масса поступившего пара $M_1 = 24,0$ г. Во втором опыте после наступления равновесия растаяло ровно $\Delta m = 300$ г льда. Масса сконденсировавшегося пара $M_2 = 90,0$ г.

Найдите долю η передаваемой энергии и начальную температуру T_0 льда. Удельная теплоёмкость воды $c_v = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$, удельная теплоёмкость льда $c_{\text{л}} = 2100 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}\cdot^\circ\text{C}}$, удельная теплота парообразования воды $r = 2,3 \cdot 10^6 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$, удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,3 \cdot 10^5 \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$. Теплотой, связанной с появлением микроскопических капелек воды в первом опыте, пренебречь.

Возможное решение

Заметим, что в обоих опытах конечная температура смеси равна 0°C , так как лёд и вода сосуществуют в равновесии. При конденсации пара массой M при 100°C и охлаждении образовавшейся воды до 0°C выделяется энергия

$$Q_0 = rM + c_v M \cdot 100 = qM,$$

где введено обозначение $q = r + c_v \cdot 100$. По условию, содержимое калориметра получает лишь долю этой теплоты:

$$Q = \eta Q_0 = \eta qM.$$

В первом эксперименте в конечном состоянии практически весь конденсат кристаллизовался. Поскольку эффектом от микроскопических капелек воды, по условию, можно пренебречь, теплота, выделившаяся при кристаллизации конденсата, составляет λM_1 . Вся теплота, оставшаяся в калориметре, пошла на нагрев исходного куска льда от T_0 до 0°C :

$$\eta q M_1 + \lambda M_1 = mc_{\text{л}}(0 - T_0).$$

Во втором эксперименте часть льда тает, поэтому можно заключить, что конденсат не кристаллизовался. Часть полученной теплоты идёт на плавление Δm льда:

$$\eta q M_2 = \lambda \Delta m + mc_{\text{л}}(0 - T_0).$$

Вычитая первое уравнение теплового баланса из второго, получаем:

$$\eta q (M_2 - M_1) = \lambda (\Delta m + M_1), \quad \eta = \frac{\lambda (\Delta m + M_1)}{q (M_2 - M_1)}.$$

Далее из уравнения теплового баланса для первого эксперимента:

$$T_0 = -\frac{\eta q M_1 + \lambda M_1}{mc_{\text{л}}}.$$

Подставляя числа, получаем:

$$\begin{aligned} q &= 2,3 \cdot 10^6 + 4200 \cdot 100 = 2,72 \cdot 10^6 \text{ Дж/кг}, \\ M_1 &= 24,0 \text{ г} = 0,0240 \text{ кг}, \quad M_2 = 90,0 \text{ г} = 0,0900 \text{ кг}, \quad \Delta m = 300 \text{ г} = 0,300 \text{ кг}. \\ \eta &= \frac{3,3 \cdot 10^5 \cdot (0,300 + 0,0240)}{2,72 \cdot 10^6 \cdot (0,0900 - 0,0240)} = \frac{106920}{179520} \approx 0,5956 \approx 0,60. \\ T_0 &= -\frac{0,5956 \cdot 2,72 \cdot 10^6 \cdot 0,0240 + 3,3 \cdot 10^5 \cdot 0,0240}{1,20 \cdot 2100} \approx -18,6^\circ\text{C} \approx -19^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Ответ: $\eta \approx 0,60$, $T_0 \approx -19^\circ\text{C}$.

Критерии

1. Верно записано уравнение теплового баланса для первого опыта. (+ 2 балла)
2. Верно записано уравнение теплового баланса для второго опыта. (+ 2 балла)
3. Верно найдена доля η из системы уравнений. (+ 2 балла)
4. Верно найдена начальная температура льда T_0 . (+ 2 балла)
5. Получены верные численные ответы. (+ 2 балла)

Задача 3. В калориметре находится вода массой $m = 1,0$ кг при температуре $t_0 = 0^\circ\text{C}$. Шар массой $M = 4,0$ кг имеет удельную теплоёмкость c и перед каждым погружением нагревается до температуры $T = 100^\circ\text{C}$. Шар погружают в воду, ждут установления теплового равновесия, затем вынимают, снова нагревают до температуры T и погружают в воду во второй раз. При каком значении удельной теплоёмкости c материала шара изменение температуры воды после второго погружения максимально? Чему равно это максимальное изменение температуры воды после второго погружения? Теплотериями и теплоёмкостью калориметра пренебречь, удельная теплоёмкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг · °C).

Возможное решение

После первого погружения температура воды становится t_1 . По тепловому балансу тепло, отданное шаром, равно теплу, полученному водой:

$$Mc(T - t_1) = mc_{\text{в}}(t_1 - t_0).$$

Так как $t_0 = 0$, получаем

$$Mc(T - t_1) = mc_{\text{в}}t_1, \quad t_1 = \frac{Mc}{Mc + mc_{\text{в}}}T.$$

После второго погружения температура становится t_2 . Снова записываем тепловой баланс, учитывая, что вода нагревается с t_1 до t_2 , а шар остывает с T до t_2 :

$$Mc(T - t_2) = mc_{\text{в}}(t_2 - t_1).$$

Отсюда

$$(Mc + mc_{\text{в}})t_2 = McT + mc_{\text{в}}t_1, \quad t_2 = \frac{McT + mc_{\text{в}}t_1}{Mc + mc_{\text{в}}}.$$

Подставляя найденное t_1 , получаем

$$t_2 = \frac{McT + mc_{\text{в}} \cdot \frac{Mc}{Mc + mc_{\text{в}}}T}{Mc + mc_{\text{в}}} = T \frac{Mc(Mc + 2mc_{\text{в}})}{(Mc + mc_{\text{в}})^2}.$$

Повышение температуры воды во втором погружении равно

$$\Delta t_2 = t_2 - t_1 = T \left(\frac{Mc(Mc + 2mc_{\text{в}})}{(Mc + mc_{\text{в}})^2} - \frac{Mc}{Mc + mc_{\text{в}}} \right) = T \frac{(Mc)(mc_{\text{в}})}{(Mc + mc_{\text{в}})^2}.$$

Обозначим $A = Mc$ и $B = mc_{\text{в}}$. Тогда

$$\Delta t_2 = T \frac{AB}{(A + B)^2}.$$

Заметим, что

$$4AB = (A + B)^2 - (A - B)^2,$$

поэтому

$$\Delta t_2 = T \frac{AB}{(A + B)^2} = \frac{T}{4} \frac{(A + B)^2 - (A - B)^2}{(A + B)^2} = \frac{T}{4} \left(1 - \left(\frac{A - B}{A + B} \right)^2 \right).$$

Так как $A > 0$ и $B > 0$, то $A + B > 0$, а величина

$$\left(\frac{A - B}{A + B} \right)^2$$

есть полный квадрат, потому неотрицательна. Её наименьшее значение равно 0 и достигается тогда и только тогда, когда $A - B = 0$, то есть $A = B$. Следовательно, Δt_2 максимальна при

$$Mc = mc_{\text{в}}, \quad c = \frac{m}{M} c_{\text{в}},$$

и при этом

$$\Delta t_{2,\text{max}} = \frac{T}{4}.$$

Подставляя числа $m = 1,0$, $M = 4,0$ кг, $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг · °C), $T = 100^\circ\text{C}$:

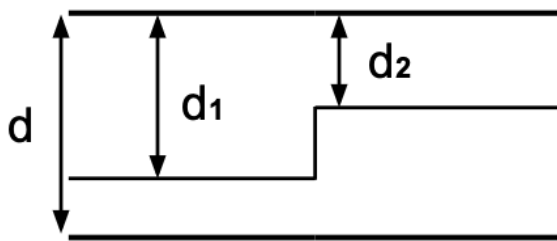
$$c_{\text{max}} = \frac{4200}{4} = 1050 \text{ Дж/(кг · °C)}, \quad \Delta t_{2,\text{max}} = \frac{100}{4} = 25^\circ\text{C}.$$

$$\text{Ответ: } c = 1050 \text{ Дж/(кг · °C)}, \quad \Delta t_{2,\text{max}} = \frac{T}{4} = 25^\circ\text{C}.$$

Критерии

1. Верно записан тепловой баланс для первого погружения и найдена температура t_1 . (+ 2 балла)
2. Верно записан тепловой баланс для второго погружения и найдена температура t_2 . (+ 2 балла)
3. Верно выражено изменение температуры после второго погружения Δt_2 . (+ 2 балла)
4. Верно проведён анализ максимума Δt_2 и найдено оптимальное значение c . (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ для максимального изменения температуры. (+ 2 балла)

Задача 4. В большом сосуде с раствором соли стоят две большие металлические пластины, параллельные друг другу. Раствор проводит электрический ток. Расстояние между пластинами равно $d = 10$ см, а сопротивление раствора между пластинами равно R . Затем между пластинами вставили тонкую идеально проводящую фольгу (её сопротивлением пренебречь) и изогнули так, как показано на рисунке: на одной стороне расстояние от верхней пластины до фольги равно $d_1 = 6$ см, а на другой стороне равно $d_2 = 4$ см. Найдите отношение нового сопротивления R' между внешними пластинами к первоначальному сопротивлению R , то есть величину $\frac{R'}{R}$. Размеры пластин намного больше расстояния между ними, поэтому влиянием краёв можно пренебречь и считать, что ток течёт строго перпендикулярно пластинам.



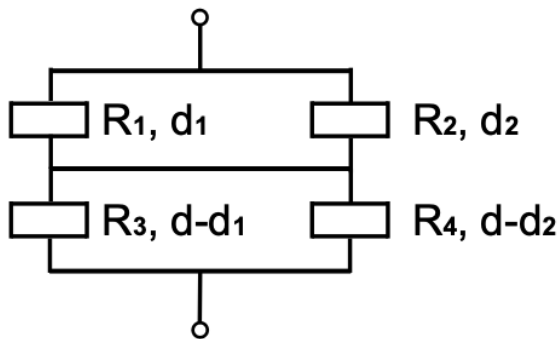
Возможное решение

Пусть удельное сопротивление раствора равно ρ , а площадь каждой пластины равна S . Тогда исходное сопротивление (однородный зазор толщины d):

$$R = \frac{\rho d}{S}.$$

Фольга идеально проводящая, значит она играет роль соединительных проводов пренебрежимо малого сопротивления между четырьмя частями сосуда с раствором соли, каждая из которых может быть представлена как отдельный резистор. Детально рассмотрим части, на которые делится сосуд с проводящим раствором.

Весь зазор распадается на два последовательных «слоя»: между верхней пластиной и фольгой, и между фольгой и нижней пластиной.



Из-за изгиба фольги каждый из этих слоёв состоит из двух параллельных участков одинаковой площади $S/2$: в одном месте толщина слоя равна d_1 , в другом — d_2 . Следовательно, эквивалентная схема цепи (рис.) может быть описана как:

$(R_1 \parallel R_2)$ последовательно с $(R_3 \parallel R_4)$.

Так как сопротивление слоя проводящего раствора толщины x и площади $S/2$ равно $\rho x/(S/2)$, имеем:

$$R_1 = \frac{\rho d_1}{S/2} = \frac{2\rho d_1}{S}, \quad R_2 = \frac{2\rho d_2}{S},$$

$$R_3 = \frac{2\rho(d-d_1)}{S}, \quad R_4 = \frac{2\rho(d-d_2)}{S}.$$

Тогда

$$R' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4}.$$

Подставляя выражения, получаем

$$R' = \frac{2\rho}{S} \left(\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} + \frac{(d-d_1)(d-d_2)}{2d-d_1-d_2} \right).$$

Выразим через $R = \rho d/S$:

$$\frac{R'}{R} = \frac{2}{d} \left(\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} + \frac{(d-d_1)(d-d_2)}{2d-d_1-d_2} \right).$$

Подставим $d = 10$, $d_1 = 6$, $d_2 = 4$ (в одних и тех же единицах):

$$\frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2} = \frac{6 \cdot 4}{6 + 4} = 2.4, \quad \frac{(d - d_1)(d - d_2)}{2d - d_1 - d_2} = \frac{4 \cdot 6}{20 - 10} = 2.4.$$

Тогда

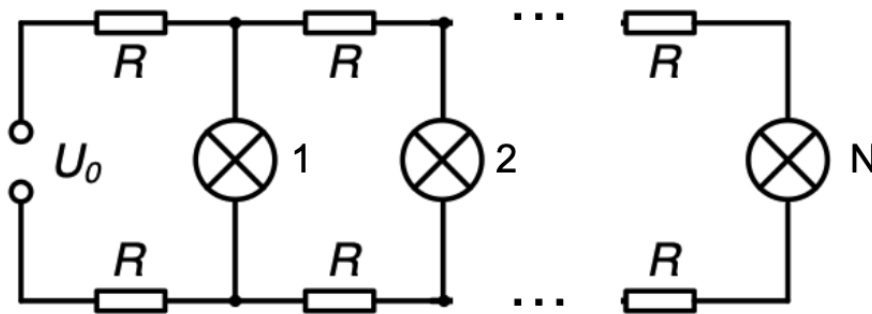
$$\frac{R'}{R} = \frac{2}{10}(2.4 + 2.4) = 0.96.$$

$$\text{Ответ: } \frac{R'}{R} = 0.96.$$

Критерии

1. Верно записано исходное сопротивление раствора между пластинами. (+ 2 балла)
2. Верно определена эквивалентная схема после вставки фольги. (+ 2 балла)
3. Верно вычислены сопротивления отдельных участков. (+ 2 балла)
4. Верно найдено новое сопротивление R' . (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ для отношения R'/R . (+ 2 балла)

Задача 5. На ёлке развесили электрическую гирлянду из N одинаковых лампочек, подключённых между двумя параллельными проводами (см. рисунок). Между соседними лампочками на каждом проводе стоит одинаковый участок провода сопротивлением R . К левому концу гирлянды подключён источник постоянного напряжения U_0 . Считайте, что после подключения каждая лампочка потребляет один и тот же ток I_0 , причём этот ток не зависит от напряжения на лампочке. Известно, что $U_0 = 240$ В, $I_0 = 40$ мА и $R = 2$ Ом. Определите число лампочек N , если напряжение на последней (самой правой) лампочке равно $0,8 U_0$.



Возможное решение

Обозначим напряжение на последней лампочке через U_N . Падение напряжения на соединительных участках провода приводит к уменьшению напряжения вдоль гирлянды.

Обозначим через U_k напряжение на k -й лампочке.

Рассмотрим участок провода между $(k - 1)$ -й и k -й лампочками. Через него протекает ток, питающий лампочки с номерами $k, k + 1, \dots, N$, то есть

$$I_k = (N - k + 1)I_0.$$

Сопротивление участка каждого провода равно R . Падение напряжения между проводами на этом участке равно

$$\Delta U_k = RI_k + RI_k = 2R(N - k + 1)I_0.$$

Напряжение на N -й лампочке равно напряжению источника минус сумма падений на всех N участках:

$$U_N = U_0 - \sum_{k=1}^N \Delta U_k = U_0 - 2RI_0 \sum_{k=1}^N (N - k + 1).$$

Так как

$$\sum_{k=1}^N (N - k + 1) = 1 + 2 + \dots + N = \frac{N(N + 1)}{2},$$

получаем

$$U_N = U_0 - RI_0 N(N + 1).$$

По условию $U_N = 0,8U_0$, значит

$$U_0 - RI_0 N(N + 1) = 0,8U_0 \Rightarrow 0,2U_0 = RI_0 N(N + 1).$$

Подставим данные, учитывая что $I_0 = 40$ мА = $0,04$ А:

$$0,2 \cdot 240 = 2 \cdot 0,04 \cdot N(N + 1) \Rightarrow 48 = 0,08 N(N + 1).$$

Отсюда

$$N(N + 1) = \frac{48}{0,08} = 600.$$

Решим уравнение $N^2 + N - 600 = 0$, рассматривая только положительный корень:

$$N = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2400}}{2} = \frac{-1 + \sqrt{2401}}{2} = \frac{-1 + 49}{2} = 24.$$

Ответ: $N = 24$.

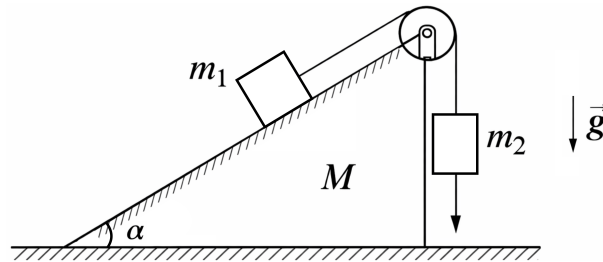
Критерии

1. Верно определён ток через каждый участок провода. (+ 2 балла)
2. Верно найдено падение напряжения на каждом участке. (+ 2 балла)
3. Верно записано выражение для напряжения на последней лампочке. (+ 2 балла)
4. Верно составлено уравнение для числа лампочек N . (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

Задача 1. Клин массой $M = 3$ кг находится на шероховатой горизонтальной поверхности стола. Через невесомый неподвижный блок, укрепленный на вершине клина, перекинута лёгкая нерастяжимая нить, связывающая бруски массами $m_1 = 2$ кг и $m_2 = 3$ кг. Брусок m_1 движется вверх по наклонной плоскости клина, брусок m_2 движется вертикально вниз, клин M остаётся неподвижным. Коэффициент трения между бруском m_1 и наклонной поверхностью клина равен $\mu_1 = 0,2$. Наклонная поверхность клина составляет угол α с горизонтом, такой, что $\sin \alpha = 0,6$.

1. Найдите силу нормальной реакции стола R , действующую на клин, при движении брусков.
2. Найдите минимальный коэффициент трения $\mu_{\min}$ между клином и столом, при котором клин остаётся неподвижным.

Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Возможное решение

Рассмотрим динамику описанной в условии системы. Кли́н покоится на шероховатой поверхности, грузы приходят в движение. Определим ускорение грузов a и силу натяжения нити T .

Напишем второй закон Ньютона для грузов в проекции на направление движения каждого из них: груз m_2 движется вниз, груз m_1 — вдоль наклонной поверхности клина. Отдельно отметим, что при подобном движении на первый груз действует сила трения скольжения, модуль которой равен $F_{\text{тр } 1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \cos \alpha$.

$$\begin{cases} m_2 a = m_2 g - T, \\ m_1 a = T - m_1 g \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha. \end{cases}$$

Решая полученную систему, получаем:

$$\begin{cases} a = g \frac{m_2 - m_1 (\sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha)}{m_1 + m_2}, \\ T = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha). \end{cases}$$

1. Найдём силу нормальной реакции стола R .

Напишем второй закон Ньютона для клина в проекции на вертикальную ось. На клин действуют следующие силы: сила тяжести; сила давления со стороны первого груза (равная по модулю силе нормальной реакции клина, действующей на этот груз); сила трения со стороны первого груза; сила трения со стороны поверхности стола; сила давления блока (равная векторной сумме сил натяжения, приложенных к блоку); сила нормальной реакции стола.

$$Mg + N_1 \cos \alpha - F_{\text{тр } 1} \sin \alpha + T \sin \alpha + T - R = 0$$

Тогда с учетом выражений для сил, действующих на клин, выражение для силы нормальной реакции стола:

$$R = Mg + m_1 g \cos^2 \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha \sin \alpha + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) (\sin \alpha + 1)$$

Рассчитаем численное значение:

$$R \approx 74,7 \text{ Н.}$$

2. Минимальный коэффициент трения $\mu_{\min}$.

Для того, чтобы клин находился на поверхности стола в состоянии покоя, необходимо, чтобы выполнялось неравенство $F_{\text{тр клин}} \leq \mu R$.

Для определения величины силы трения, действующей на клин, напишем второй закон Ньютона для покоящегося клина в проекции на горизонтальное направление:

$$-N_1 \sin \alpha - F_{\text{тр } 1} \cos \alpha + T \cos \alpha - F_{\text{тр клин}} = 0$$

Тогда сила трения, действующая на клин:

$$F_{\text{тр клин}} = -m_1 g \cos \alpha \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos^2 \alpha + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) \cos \alpha.$$

Тогда минимальный коэффициент трения, при котором клин находится в состоянии покоя, определяется выражением:

$$\mu_{\min} = \frac{F_{\text{тр клин}}}{R} = \frac{-m_1 g \cos \alpha \sin \alpha - \mu_1 m_1 g \cos^2 \alpha + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) \cos \alpha}{Mg + m_1 g \cos^2 \alpha - \mu_1 m_1 g \cos \alpha \sin \alpha + \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g (1 + \sin \alpha + \mu_1 \cos \alpha) (\sin \alpha + 1)}.$$

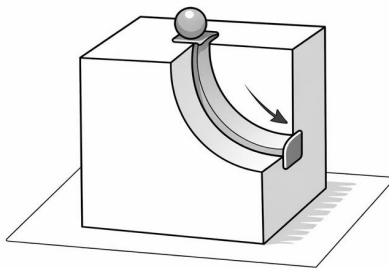
$$\mu_{\min} \approx 0,063.$$

Ответ: 1. $R \approx 74,7 \text{ Н}$; 2. $\mu_{\min} \approx 0,063$.

Критерии

1. Верно записана система уравнений движения для обоих грузов. (+ 2 балла)
2. Верно найдены ускорение и сила натяжения нити. (+ 2 балла)
3. Верно записаны составляющие сил, действующих на клин, и найдена сила реакции стола R . (+ 2 балла)
4. Верно записаны горизонтальные составляющие сил, действующих на клин. (+ 2 балла)
5. Верно найден минимальный коэффициент трения $\mu_{\min}$. (+ 2 балла)

Задача 2. Кубик массой M стоит на гладкой горизонтальной поверхности. Внутри кубика закреплён гладкий желоб в форме четверти дуги окружности. Желоб соединяет центр верхней грани с центром правой боковой грани. В верхнее отверстие кладут шарик массой m , не сообщая ему начальной скорости. Найдите скорость кубика в момент вылета шарика из бокового отверстия. Отношение массы шарика к массе кубика $k = \frac{m}{M} = 1,25$. Ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$. Длина ребра кубика составляет $0,081 \text{ м}$.



Возможное решение

Обозначим длину ребра кубика через a . Шарик стартует из центра верхней грани на высоте a , а вылетает из центра правой грани на высоте $a/2$. Следовательно, потеря потенциальной энергии шарика равна

$$\Delta U = mg \left(a - \frac{a}{2} \right) = \frac{mga}{2}.$$

Заметим, что желоб гладкий, поэтому скорость шарика в каждый момент направлена по касательной к желобу. Поскольку желоб является четвертью окружности и соединяет центры граней так, что в точке выхода касательная горизонтальна (перпендикулярна правой грани), то в момент вылета скорость шарика направлена горизонтально вправо.

Напишем закон сохранения горизонтальной проекции импульса. Внешних горизонтальных сил, действующих на систему из кубика и шарика, нет, значит горизонтальная проекция совокупного импульса системы сохраняется.

Пусть непосредственно после вылета шарик имеет в лабораторной системе скорость v вправо, а кубик — скорость V влево. Тогда при совокупном нулевом начальном импульсе:

$$mv - MV = 0 \quad \Rightarrow \quad V = \frac{m}{M} v.$$

Напишем закон сохранения энергии. Трение отсутствует, а опора гладкая и работы не совершает, поэтому

$$\frac{mga}{2} = \frac{MV^2}{2} + \frac{mv^2}{2}.$$

Подставим $V = \frac{m}{M} v$:

$$\frac{mga}{2} = \frac{M}{2} \left(\frac{m}{M} v \right)^2 + \frac{mv^2}{2} = \frac{mv^2}{2} \left(1 + \frac{m}{M} \right).$$

Сокращая на $\frac{m}{2}$, получаем

$$ga = v^2 \left(1 + \frac{m}{M} \right) \quad \Rightarrow \quad v^2 = ga \frac{M}{M + m}.$$

Тогда скорость кубика:

$$V = \frac{m}{M} v = \frac{m}{M} \sqrt{ga \frac{M}{M + m}} = \frac{m \sqrt{ga}}{\sqrt{M(M + m)}}.$$

Обозначая $k = \frac{m}{M}$, имеем

$$V = \frac{k}{\sqrt{1 + k}} \sqrt{ga}$$

Подставляя данные из условия, получаем:

$$V = \frac{1,25}{\sqrt{1 + 1,25}} \cdot 0,9 = 0,75 \text{ м/с}$$

Ответ: 0,75 м/с

Критерии

1. Верно определена потеря потенциальной энергии шарика. (+ 2 балла)
2. Верно записан закон сохранения горизонтальной проекции импульса. (+ 2 балла)
3. Верно записан закон сохранения энергии. (+ 2 балла)
4. Верно выражена скорость кубика через параметры задачи. (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

Задача 3. Большое колесо радиуса R катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности. По внутренней поверхности большого колеса без проскальзывания движется малое колесо радиуса $r = R/2$. Конфигурация колес в некоторый момент времени показана на рисунке. В этот момент времени: большое колесо вращается против часовой стрелки с угловой скоростью ω_1 относительно его центра в точке O , малое колесо вращается против часовой стрелки с угловой скоростью $\omega_2 = 14\omega_1$ относительно его центра в точке C , центры колес лежат на горизонтальной прямой.

Найдите отношение модуля скорости наивысшей точки малого колеса A в лабораторной системе отсчёта к скорости движения центра большого колеса в лабораторной системе отсчёта в положении колес в указанный момент времени.

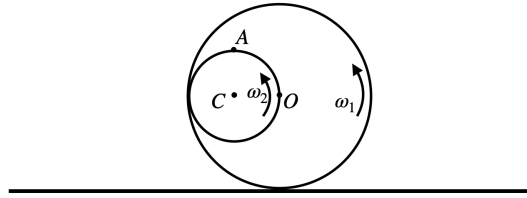


Рис. 1

Возможное решение

Мы перейдём в систему отсчёта, *поступательно движущуюся вместе с точкой контакта двух колёс P* . В такой системе в данный момент $\vec{v}'_P = 0$, а значит условие отсутствия проскальзывания превращается в: точка P на малом колесе тоже имеет нулевую скорость в этой системе.

Найдём скорость точки P в лабораторной системе. Пусть $\omega_1 > 0$ соответствует вращению против часовой стрелки, ось Ox направлена вправо, Oy вверх. Из качения большого колеса по земле без проскальзывания скорость его центра равна

$$V_O = \omega_1 R$$

Точка P расположена на ободе слева, и скорость этой точки относительно центра по модулю равна $\omega_1 R$, причём она перпендикулярна радиусу OP , то есть направлена вертикально вниз. Следовательно, в лабораторной системе скорость точки P есть сумма двух взаимно перпендикулярных скоростей одинакового модуля:

$$|v_P| = \sqrt{(\omega_1 R)^2 + (\omega_1 R)^2} = \omega_1 R \sqrt{2}.$$

$$\vec{v}_P = (v_{x,P}, v_{y,P}) = (\omega_1 R, -\omega_1 R)$$

Найдём скорость точки A в системе, связанной с P . Перейдём в систему, движущуюся поступательно со скоростью $\vec{v}_P$. В этой системе

$$\vec{v}'_P = 0.$$

Из-за отсутствия проскальзывания в контакте колёс точка P на малом колесе тоже мгновенно покоится:

$$\vec{v}'_{P, small} = 0.$$

Значит, движение малого колеса в этой системе в данный момент эквивалентно суперпозиции чистого вращения малого колеса вокруг его центра с угловой скоростью ω_2 и поступательного движения вертикально вверх.

Поступательная скорость центра малого колеса в системе $\vec{P}$ направлена вертикально вверх и равна $\omega_2 r$.

Точка A — верхняя точка малого колеса, поэтому радиус $\vec{CA}$ направлен вверх и имеет длину r . Тогда скорость A относительно центра по модулю равна $\omega_2 r$ и направлена горизонтально влево. Таким образом, скорость точки A есть сумма двух взаимно перпендикулярных скоростей:

$$|v'_A| = \sqrt{(\omega_2 r)^2 + (\omega_2 r)^2} = \omega_2 r \sqrt{2},$$

$$\vec{v}'_A = (\omega_2 r, \omega_2 r)$$

В лабораторной системе отсчёта по закону сложения скоростей получаем:

$$\vec{v}_A = \vec{v}_P + \vec{v}'_A.$$

Модуль скорости можно найти, просуммировав полученные ранее векторы, и определив длину получившегося вектора.

$$|v_A|^2 = (\omega_1 R + \omega_2 r)^2 + (-\omega_1 R + \omega_2 r)^2 = 2(\omega_1^2 R^2 + \omega_2^2 r^2).$$

Следовательно,

$$|v_A| = \sqrt{2(\omega_1^2 R^2 + \omega_2^2 r^2)}$$

Искомое отношение тогда:

$$\frac{|v_A|}{\omega_1 R_1} = \sqrt{2 \left(1 + \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} \right)^2 \left(\frac{r}{R} \right)^2 \right)}$$

Подставляя данные из условия, получаем:

$$\frac{|v_A|}{\omega_1 R_1} = \sqrt{2 \left(1 + 14^2 \cdot \frac{1}{2^2} \right)} = 10.$$

Ответ: 10.

Критерии

1. Верно определена скорость центра большого колеса. (+ 2 балла)
2. Верно найдена скорость точки контакта P в лабораторной системе. (+ 2 балла)
3. Верно выполнен переход в систему отсчёта точки контакта. (+ 2 балла)
4. Верно найдена скорость точки A в лабораторной системе. (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ для отношения скоростей. (+ 2 балла)

Задача 4. Для определения характеристик тепловых процессов в лаборатории используют калориметр, в который на разных этапах помещают воду и образцы нафталина. Исследование проводится в три независимых этапа:

- (А) В калориметр, содержащий $m_{\text{в}} = 200$ г воды при температуре $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{C}$, помещают образец твёрдого нафталина массой $m_{\text{н}} = 50$ г, нагретый до температуры плавления $t_{\text{пл}} = 79^\circ\text{C}$. После установления теплового равновесия температура в системе составила $t_{\text{см1}} = 23^\circ\text{C}$.
- (В) Тот же образец нафталина полностью расплавляют, нагревают до температуры жидкой фазы $t_{\text{ж}} = 95^\circ\text{C}$ и снова помещают в калориметр с начальными параметрами воды ($m_{\text{в}} = 200$ г при $t_{\text{в}} = 20^\circ\text{C}$). Установившаяся температура составила $t_{\text{см2}} = 30,1^\circ\text{C}$.
- (С) В калориметр при начальных параметрах воды ($m_{\text{в}} = 200$ г при $t_{\text{в}} = 20^\circ$) помещают новый образец твёрдого нафталина массой $M = 100$ г, взятый при комнатной температуре 20°C . В систему погружают электрический нагреватель мощностью $P = 100$ Вт с коэффициентом полезного действия $\eta = 84\%$ и наблюдают за содержимым калориметра.

Удельная теплоемкость воды $c_{\text{в}} = 4200$ Дж/(кг·°C), удельные теплоемкости нафталина в твердом и жидком состояниях $c_{\text{н.т}} = 1200$ Дж/(кг·°C) и $c_{\text{н.ж}} = 1700$ Дж/(кг·°C) соответственно.

1. Используя данные опытов А и В, найдите теплоёмкость калориметра $C_{\text{к}}$ и удельную теплоту плавления нафталина $\lambda_{\text{н}}$.
2. Найдите время τ работы нагревателя в минутах, необходимое для того, чтобы полностью расплавить образец нафталина и нагреть всё содержимое калориметра до конечной температуры $t_{\text{кон}} = 80^\circ\text{C}$.

Возможное решение

1. Напишем уравнение теплового баланса для первого опыта, в котором теплоту отдает остывающий твёрдый нафталин:

$$m_{\text{н}}c_{\text{н.т}}(t_{\text{пл}} - t_{\text{см1}}) = (m_{\text{в}}c_{\text{в}} + C_{\text{к}})(t_{\text{см1}} - t_{\text{в}})$$

Подставляя значения, находим теплоёмкость калориметра:

$$C_{\text{к}} = \frac{0,05 \cdot 1200 \cdot (79 - 23)}{23 - 20} - 0,2 \cdot 4200 = 1120 - 840 = 280 \text{ Дж}/^\circ\text{C}$$

Для второго опыта теплота, отданная нафталином, включает остывание жидкости, кристаллизацию и остывание твёрдой фазы:

$$Q_{\text{отд}} = m_{\text{н}}(c_{\text{н.ж}}(t_{\text{ж}} - t_{\text{пл}}) + \lambda_{\text{н}} + c_{\text{н.т}}(t_{\text{пл}} - t_{\text{см2}}))$$

Эта теплота идет на нагрев воды и калориметра: $Q_{\text{пол}} = (m_{\text{в}}c_{\text{в}} + C_{\text{к}})(t_{\text{см2}} - t_{\text{в}})$.

$$(840 + 280) \cdot (30,1 - 20) = 0,05 \cdot (1700 \cdot 16 + \lambda_{\text{н}} + 1200 \cdot 48,9)$$

$$11312 = 0,05 \cdot (85880 + \lambda_{\text{н}}) \implies \lambda_{\text{н}} = 140360 \text{ Дж/кг} \approx 140,4 \text{ кДж/кг}$$

2. Для достижения конечного состояния системе необходимо сообщить теплоту $Q_{\text{общ}}$, состоящую из четырех составляющих: теплота, соответствующая нагреванию воды и калориметра до 80°C ; теплота, соответствующая нагреванию твёрдого нафталина до температуры плавления; теплота его плавления; и теплота, соответствующая нагреванию жидкой фазы нафталина до 80°C :

$$Q_{\text{общ}} = (m_{\text{в}}c_{\text{в}} + C_{\text{к}})(t_{\text{кон}} - t_{\text{в}}) + M c_{\text{н.т}}(t_{\text{пл}} - t_{\text{в}}) + M \lambda_{\text{н}} + M c_{\text{н.ж}}(t_{\text{кон}} - t_{\text{пл}})$$

$$Q_{\text{общ}} = 1120 \cdot 60 + 0,1 \cdot 1200 \cdot 59 + 0,1 \cdot 140360 + 0,1 \cdot 1700 \cdot 1 = 88486 \text{ Дж}$$

Работа электрического тока с учётом КПД системы:

$$\eta P \tau = Q_{\text{общ}} \implies 0,84 \cdot 100 \cdot \tau = 88486$$

$$\tau = \frac{88486}{84} \approx 1053,4 \text{ с}$$

Ответ: $C_{\text{к}} = 280$ Дж/°C, $\lambda_{\text{н}} \approx 140,4$ кДж/кг; $\tau \approx 17,6$ мин.

Критерии

1. Верно записано уравнение теплового баланса для первого опыта и найдена теплоёмкость калориметра. (+ 2 балла)
2. Верно записано уравнение теплового баланса для второго опыта. (+ 2 балла)
3. Верно найдена удельная теплота плавления нафталина. (+ 2 балла)
4. Верно записан тепловой баланс для третьего этапа с нагревателем. (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ для времени работы нагревателя. (+ 2 балла)

Задача 5 Вдоль оси x расположена неоднородная по составу проволока длины L : левый конец соответствует точке $x_0 = 0$, правый – точке $x_L = L$. К концам проволоки приложено постоянное напряжение U . Радиус проволоки зависит от координаты по закону: $r(x) = r_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$, а удельное сопротивление – по закону: $\rho(x) = \rho_0 \frac{L}{L-x}$, $0 \leq x \leq L$. Координату наиболее холодной точки проволоки в установившемся режиме можно представить в виде $x_{\min} = kL$. Найдите число k .

Возможное решение

Сила тока I в установившемся режиме одинакова для любого сечения проводника. Для малого участка проводника длины Δl с центром в точке x сопротивление

$$R(x) = \rho(x) \frac{\Delta l}{S(x)}, \quad S(x) = \pi r^2(x).$$

Выделяющаяся на участке мощность:

$$P(x) = I^2 R(x)$$

Тогда мощность, приходящуюся на единицу длины проволоки, можно представить как:

$$p(x) = \frac{P(x)}{\Delta l} = I^2 \frac{\rho(x)}{S(x)}.$$

Поскольку I не зависит от x , минимум $p(x)$ достигается там же, где минимум функции

$$f(x) = \frac{\rho(x)}{S(x)}.$$

Найдем явный вид $f(x)$. Площадь сечения:

$$S(x) = \pi r(x)^2 = \pi r_0^2 \frac{x}{L}.$$

Тогда

$$f(x) = \frac{\rho(x)}{S(x)} = \frac{\rho_0 \frac{L}{L-x}}{\pi r_0^2 \frac{x}{L}} = \frac{\rho_0 L^2}{\pi r_0^2} \cdot \frac{1}{(L-x)x}.$$

Минимум $f(x)$ достигается в точке максимума знаменателя $x(L-x)$ (на рассматриваемом интервале $0 < x < L$). Это парабола с ветвями, направленными вниз, значит максимум достигается в вершине:

$$x^* = \frac{L}{2},$$

Итак,

$$x_{\min} = L/2 \quad \Rightarrow \quad k = 0,5.$$

Ответ: $k = 0,5$

Критерии

1. Верно записано выражение для удельной мощности тепловыделения $p(x)$. (+ 2 балла)
2. Верно выражена площадь сечения проволоки $S(x)$. (+ 2 балла)
3. Верно определена функция $f(x) = \rho(x)/S(x)$, подлежащая минимизации. (+ 2 балла)
4. Верно проведён анализ экстремума и найдена координата минимума. (+ 2 балла)
5. Получен верный численный ответ. (+ 2 балла)

Задача 1. Экспериментатор Глюк сидит на доске. Его ступни закреплены на доске, трения между ним и доской нет, а коэффициент трения скольжения между доской и землей равен μ . Глюк исходно сидит в положении с вытянутыми ногами. Вначале Глюк тянет ноги на себя, прикладывая постоянную горизонтальную силу F_1 , чтобы приблизить свой центр масс к ступням. Когда Глюк оказывается в положении с согнутыми коленями, его скорость относительно доски мгновенно становится равной нулю за счет действия внутренних сил, при помощи которых ступни Глюка закреплены на доске. За этот процесс перемещение его центра масс относительно центра масс доски равно l . После этого они движутся как единое целое до полной остановки.

Затем Глюк отталкивается от доски с постоянной горизонтальной силой F_2 , чтобы вернуться в положение с вытянутыми ногами. Как только ноги выпрямлены, скорость Глюка относительно доски мгновенно становится равной нулю. После этого система вновь движется как единое целое до полной остановки. Найдите смещение центра масс системы «Глюк+доска» за всё время движения. Масса человека равна m , масса доски равна M . Предполагается, что во время перехода между положениями вертикальная составляющая силы, действующей на ступни Глюка, отсутствует, при этом модули сил связаны неравенством $F_2 > F_1$. Ускорение свободного падения g .

Возможное решение

Рассмотрим весь процесс движения Глюка по отдельным этапам.

Действие 1. Глюк тянет ноги на себя.

В соответствии со вторым законом Ньютона ускорение Глюка относительно земли

$$a_{\text{ч}} = \frac{F_1}{m}. \quad (1)$$

Анализ сил, действующих на доску, показывает, что возможны два случая.

Случай 1. Когда $\mu \geq \frac{F_1}{(M+m)g}$ — доска не скользит. Сила трения покоя действует на доску по направлению движения Глюка, а её модуль равен F_1 .

В системе отсчёта, связанной с доской:

$$a'_1 = a_{\text{ч}} = \frac{F_1}{m}, \quad (2)$$

время проскальзывания

$$t_1 = \sqrt{\frac{2m\ell}{F_1}}. \quad (3)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона для центра масс системы $(M+m)a_{c1} = F_1$, ускорение центра масс

$$a_{c1} = \frac{F_1}{M+m}. \quad (4)$$

Скорость центра масс в конце проскальзывания Глюка при подтягивании ног к себе:

$$v_{c1} = a_{c1}t_1 = \sqrt{\frac{2F_1m\ell}{(M+m)^2}}. \quad (5)$$

Далее в результате неупругого взаимодействия система движется как целое, замедляясь под действием силы трения скольжения. Модуль ускорения при таком движении: $A_1 = \mu g$. Перемещение центра масс за время совершения первого действия:

$$x_{c1} = \frac{v_{c1}^2}{2a_{c1}} + \frac{v_{c1}^2}{2\mu g} = \frac{m\ell}{M+m} + \frac{F_1m\ell}{\mu(M+m)^2g}. \quad (6)$$

Случай 2. Когда $\mu < \frac{F_1}{(M+m)g}$ — доска скользит. Сила трения скольжения действует на доску по направлению движения Глюка, а её модуль равен $\mu(M+m)g$.

В соответствии со вторым законом Ньютона ускорение доски:

$$a_{\text{д}} = \frac{F_1 - \mu(M+m)g}{M}. \quad (7)$$

Знак выбран так, что положительное ускорение направлено в сторону движения Глюка. Относительное ускорение Глюка:

$$a''_1 = a_{\text{ч}} - a_{\text{д}} = \frac{F_1}{m} - \frac{F_1 - \mu(M+m)g}{M} = \frac{(M+m)(F_1 - \mu mg)}{Mm}. \quad (8)$$

Время проскальзывания:

$$t'_1 = \sqrt{\frac{2\ell}{a''_1}} = \sqrt{\frac{2Mm\ell}{(M+m)(F_1 - \mu mg)}}. \quad (9)$$

В соответствии со вторым законом Ньютона для центра масс: $(M+m)a_{c1} = \mu(M+m)g$, ускорение центра масс

$$a'_{c1} = \mu g. \quad (10)$$

Скорость центра масс в конце проскальзывания:

$$v'_{c1} = a'_{c1}t'_1 = \mu g \cdot \sqrt{\frac{2Mm\ell}{(M+m)(F_1 - \mu mg)}}. \quad (11)$$

Далее в результате неупругого взаимодействия система движется как целое, замедляясь под действием силы трения скольжения. Модуль ускорения при таком движении: $A_1 = \mu g$. Перемещение центра масс за время совершения первого действия:

$$x'_{c1} = \frac{v'^2_{c1}}{2a'_{c1}} + \frac{v'^2_{c1}}{2|A'_1|} = \frac{2\mu Mm\ell}{(M+m)(F_1 - \mu mg)}. \quad (12)$$

Действие 2. Глюк выпрямляет ноги Рассмотрение полностью аналогично. При этом сила F_2 направлена противоположно силе F_1 , поэтому перемещения будут с другим знаком. Выпишем результаты для каждого из возможных случаев.

Случай 1. $\mu \geq \frac{F_2}{(M+m)g}$ — доска не скользит.

$$a'_2 = \frac{F_2}{m}, \quad t_2 = \sqrt{\frac{2m\ell}{F_2}}, \quad (13)$$

$$a_{c2} = \frac{F_2}{M+m}, \quad v_{c2} = \sqrt{\frac{2F_2m\ell}{M+m}}, \quad (14)$$

$$x_{c2} = -\frac{m\ell}{M+m} - \frac{F_2m\ell}{\mu(M+m)^2g}. \quad (15)$$

Случай 2. $\mu < \frac{F_2}{(M+m)g}$ — доска скользит.

$$a_d = \frac{F_2 - \mu(M+m)g}{M}, \quad (16)$$

$$t'_2 = \sqrt{\frac{2Mm\ell}{(M+m)(F_2 - \mu mg)}}, \quad (17)$$

$$v'_{c2} = -\mu g \cdot \sqrt{\frac{2Mm\ell}{(M+m)(F_2 - \mu mg)}}, \quad (18)$$

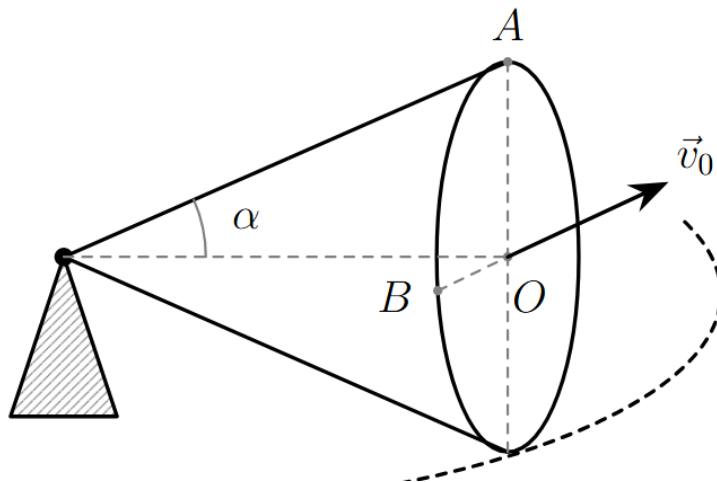
$$x'_{c2} = -\frac{2\mu Mmg\ell}{(M+m)(F_2 - \mu mg)}. \quad (19)$$

Получим окончательное выражение для смещения X . Суммируя перемещения от обоих действий, получаем

$$X = \begin{cases} \frac{(F_1 - F_2)m\ell}{\mu g(M+m)^2}, & \mu \geq \frac{F_2}{(M+m)g}, \\ \frac{m\ell}{M+m} + \frac{F_1m\ell}{\mu g(M+m)^2} - \frac{2\mu Mmg\ell}{(M+m)(F_2 - \mu mg)}, & \frac{F_2}{(M+m)g} > \mu \geq \frac{F_1}{(M+m)g}, \\ \frac{2\mu Mmg\ell}{(M+m)} \left(\frac{1}{F_1 - \mu mg} - \frac{1}{F_2 - \mu mg} \right), & \frac{F_1}{(M+m)g} > \mu > 0. \end{cases}$$

1. Сделан анализ сил, действующих на Глюка, и получено его ускорение относительно земли при подтягивании ног. (+1 балл)
2. Рассмотрены два возможных случая: доска не скользит и доска скользит. Сформулированы условия для коэффициента трения μ , разделяющие эти случаи. (+1 балл)
3. Для случая, когда доска не скользит ($\mu \geq F_1/((M + m)g)$):
 - Верно найдено относительное ускорение Глюка относительно доски и время проскальзывания. (+1 балл)
 - Верно найдено ускорение центра масс и его скорость в конце проскальзывания. (+1 балл)
 - Верно найдено перемещение центра масс за первое действие. (+1 балл)
4. Для случая, когда доска скользит ($\mu < F_1/((M + m)g)$):
 - Верно найдено ускорение доски, относительное ускорение Глюка и время проскальзывания. (+1 балл)
 - Верно найдено ускорение центра масс и его скорость в конце проскальзывания. Верно найдено перемещение центра масс за первое действие. (+1 балл)
5. Аналогично проведён анализ для второго действия (выпрямление ног) с силой F_2 :
 - Получены верные результаты для случая, когда доска не скользит. (+1 балл)
 - Получены верные результаты для случая, когда доска скользит. (+1 балл)
6. Суммированы перемещения центра масс от обоих действий для каждого из трёх возможных диапазонов μ (с учётом $F_2 > F_1$). Получены окончательные выражения для смещения центра масс системы во всех трёх случаях. (+1 балл)

Задача 2. Конус с радиусом основания r и углом полураствора $\alpha = 30^\circ$ (см. рис.) катится без проскальзывания по горизонтальной поверхности так, что его вершина остаётся неподвижной, а ось конуса горизонтальна. Точка O в центре основания конуса движется с постоянной по модулю скоростью v_0 . Найдите отношение v_A/v_B скорости точки A конуса к скорости точки B конуса относительно поверхности.



Возможное решение

Рассмотрим движение конуса. Так как вершина конуса неподвижна, а конус катится без проскальзывания, то в каждый момент времени существует мгновенная ось вращения, проходящая через неподвижную вершину и точку касания конуса с поверхностью.

Высота конуса:

$$h = r \cdot \operatorname{ctg} \alpha. \quad (1)$$

Центр основания O движется по окружности радиуса h в горизонтальной плоскости с линейной скоростью v_0 . Эта скорость обусловлена вращением конуса вокруг вертикальной оси, проходящей через вершину.

Найдём угловую скорость вращения вокруг вертикальной оси. Точка O удалена от вертикальной оси на расстояние h :

$$\omega_1 = \frac{v_0}{h} = \frac{v_0 \operatorname{tg} \alpha}{r}. \quad (2)$$

Кроме того, конус вращается вокруг своей оси (горизонтальной). Угловая скорость этого вращения связана с тем, что конус катится по поверхности без проскальзывания. Линейная скорость точек образующей, касающейся поверхности, должна быть равна нулю. Рассмотрим точку касания конуса с плоскостью. Она принадлежит основанию конуса и находится на расстоянии r от оси конуса. Скорость этой точки относительно вершины равна $\omega_2 r$. Для выполнения условия отсутствия проскальзывания эта скорость должна компенсироваться вращением вокруг вертикальной оси. Из геометрии (см. рисунок) получаем:

$$\omega_2 = \frac{v_0}{r}. \quad (3)$$

Мгновенная угловая скорость вращения конуса является векторной суммой этих двух угловых скоростей. Так как оси вращения перпендикулярны, модуль полной угловой скорости равен:

$$\omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2} = \sqrt{\left(\frac{v_0 \operatorname{tg} \alpha}{r}\right)^2 + \left(\frac{v_0}{r}\right)^2} = \frac{v_0}{r} \sqrt{\operatorname{tg}^2 \alpha + 1} = \frac{v_0}{r \cos \alpha}. \quad (4)$$

Расстояние от точки B (наиболее удалённой точки основания) до мгновенной оси вращения обозначим как $O'B$. Мгновенная ось проходит через вершину и точку касания. В треугольнике, образованном вершиной, центром основания O и точкой B , можно найти:

$$O'B = \sqrt{r^2 + (r \cos \alpha)^2} = r \sqrt{1 + \cos^2 \alpha}. \quad (5)$$

Тогда скорость точки B :

$$v_B = \omega \cdot O'B = \frac{v_0}{r \cos \alpha} \cdot r \sqrt{1 + \cos^2 \alpha} = v_0 \sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}. \quad (6)$$

Верхняя точка конуса A находится в 2 раза дальше от оси вращения по сравнению с точкой O , следовательно, скорость точки A равна $v_A = 2v_0$.

Искомое отношение

$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1 + \cos^2 \alpha}{\cos^2 \alpha}}} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}}. \quad (7)$$

Для $\alpha = 30^\circ$, $\cos \alpha = \sqrt{3}/2$:

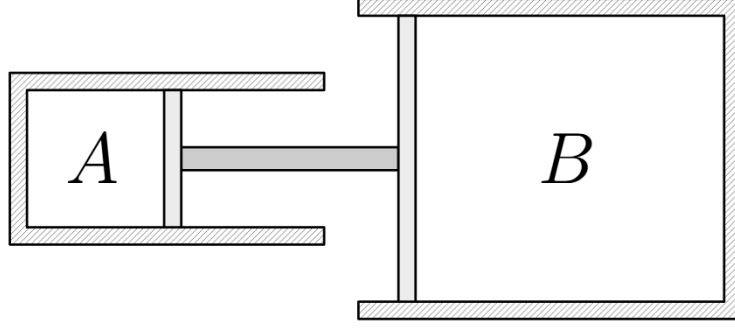
$$\frac{v_A}{v_B} = \frac{2 \cdot (\sqrt{3}/2)}{\sqrt{1 + 3/4}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}. \quad (8)$$

$$\text{Ответ: } \frac{v_A}{v_B} = \frac{2 \cos \alpha}{\sqrt{1 + \cos^2 \alpha}} = \frac{2\sqrt{21}}{7}.$$

Критерии

1. Записано выражение для высоты конуса через радиус основания и угол полураствора. (+1 балл)
2. Обосновано, что центр основания O движется по окружности радиуса h с линейной скоростью v_0 , и найдена угловая скорость вращения конуса вокруг вертикальной оси. (+1 балл)
3. Из условия отсутствия проскальзывания найдена угловая скорость вращения конуса вокруг своей горизонтальной оси. (+2 балла)
4. Найдена полная мгновенная угловая скорость вращения конуса. (+1 балл)
5. Определено расстояние от точки B до мгновенной оси вращения. (+1 балл)
6. Найдена скорость точки B . (+1 балл)
7. Обосновано, что скорость точки A равна $v_A = 2v_0$. (+1 балл)
8. Получено выражение для отношения скоростей v_A/v_B (7). (+1 балл)
9. Для заданного угла $\alpha = 30^\circ$ получен численный ответ $\frac{2\sqrt{21}}{7}$. (+1 балл)

Задача 3. Поршни двух цилиндров A и B соединены съёмным невесомым жёстким стержнем. Поршни, стенки цилиндров и стержень не проводят теплоту. Поршни могут свободно скользить без трения. Площади поперечного сечения цилиндров равны S_0 и $4S_0$ соответственно. В цилиндре B имеется электронагреватель. Атмосферное давление p_0 . Универсальная газовая постоянная R .



При снятом стержне в каждый из цилиндров A и B помещено ν_0 моль одноатомного идеального газа при температуре T_0 . Затем устанавливают стержень таким образом, что в момент установки механическое напряжение в нём отсутствует. После этого включают нагреватель, который подводит тепло с достаточно малой мощностью, так что температура газа в цилиндре B медленно повышается на ΔT (при этом $\Delta T \ll T_0$), после чего нагрев прекращают.

1. Найдите температуру и давление газа в цилиндре A после окончания нагревания.
2. Найдите полное количество теплоты, подведённое системе в процессе нагревания.

Примечание: При $x \ll 1$ справедлива формула приближенных вычислений $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$.

Возможное решение

До присоединения стержня объёмы цилиндров A и B :

$$V_{A0} = V_{B0} = \frac{\nu_0 R T_0}{p_0}. \quad (1)$$

После присоединения стержня поршни не движутся. После начала нагревания при достижении равновесия обозначим давления в цилиндрах A и B как p_{A1} и p_{B1} , а силу в стержне как F (положительное направление соответствует сжатию стержня). Условия равновесия поршней:

$$\begin{cases} p_0 S_0 + F = p_{A1} S_0, \\ 4p_0 S_0 + F = 4p_{B1} S_0. \end{cases} \quad (2)$$

Отсюда

$$4p_{B1} - p_{A1} = 3p_0 \quad \Rightarrow \quad 4\Delta p_B = \Delta p_A, \quad (3)$$

где $\Delta p_A = p_{A1} - p_0$, $\Delta p_B = p_{B1} - p_0$.

Пусть объём цилиндра A уменьшился на ΔV_A , а объём цилиндра B увеличился на ΔV_B . Из условия жёсткости стержня и равенства перемещений поршней:

$$\Delta V_B = 4\Delta V_A. \quad (4)$$

Уравнения состояния газов:

$$\begin{cases} p_{A1}(V_{A0} - \Delta V_A) = \nu_0 R T_A, \\ p_{B1}(V_{B0} + \Delta V_B) = \nu_0 R (T_0 + \Delta T). \end{cases} \quad (5)$$

Газ в цилиндре A претерпевает адиабатический процесс, так как стенки и поршень не проводят тепло:

$$p_{A1}(V_{A0} - \Delta V_A)^\gamma = p_0 V_{A0}^\gamma, \quad (6)$$

где $\gamma = 5/3$. Поскольку все изменения малы, линеаризуем (6):

$$p_{A1} \approx p_0 + \frac{p_0 \gamma \Delta V_A}{V_{A0}}. \quad (7)$$

Подставим (1) и (7) в уравнения состояния (5), учитывая (4) и $V_{A0} = V_{B0}$:

$$\left(p_0 + \frac{p_0 \gamma \Delta V_A}{V_{A0}} \right) (V_{A0} - \Delta V_A) = \nu_0 R T_A, \quad (8)$$

$$\left(p_0 + \frac{p_0 \gamma \Delta V_A}{4V_{A0}} \right) (V_{A0} + 4\Delta V_A) = \nu_0 R (T_0 + \Delta T). \quad (9)$$

Раскрывая скобки и пренебрегая членами второго порядка малости ($\sim (\Delta V_A)^2$), получим:

$$p_0 V_{A0} + p_0 \gamma \Delta V_A - p_0 \Delta V_A = \nu_0 R T_A, \quad (10)$$

$$p_0 V_{A0} + \frac{p_0 \gamma \Delta V_A}{4} + 4p_0 \Delta V_A = \nu_0 R (T_0 + \Delta T). \quad (11)$$

Учитывая, что $p_0 V_{A0} = \nu_0 R T_0$, из (10) и (11) находим:

$$\nu_0 R (T_A - T_0) = p_0 \Delta V_A (\gamma - 1), \quad (12)$$

$$\nu_0 R \Delta T = p_0 \Delta V_A \left(\frac{\gamma}{4} + 4 \right). \quad (13)$$

Из (13) выражаем ΔV_A :

$$\Delta V_A = \frac{\nu_0 R \Delta T}{p_0 \left(\frac{\gamma}{4} + 4 \right)} = \frac{4\nu_0 R \Delta T}{p_0 (16 + \gamma)}. \quad (14)$$

Подставляя $\gamma = 5/3$:

$$\Delta V_A = \frac{4\nu_0 R \Delta T}{p_0 (16 + 5/3)} = \frac{12\nu_0 R \Delta T}{53p_0}. \quad (15)$$

Из (12) находим приращение температуры газа в цилиндре А:

$$\nu_0 R \Delta T_A = p_0 \Delta V_A (\gamma - 1) = p_0 \cdot \frac{12\nu_0 R \Delta T}{53p_0} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8\nu_0 R \Delta T}{53}, \quad (16)$$

откуда

$$\Delta T_A = \frac{8}{53} \Delta T, \quad T_A = T_0 + \frac{8}{53} \Delta T. \quad (17)$$

Давление в цилиндре А из (7):

$$p_{A1} = p_0 \left(1 + \frac{\gamma \Delta V_A}{V_{A0}} \right) = p_0 \left(1 + \frac{5/3}{V_{A0}} \cdot \frac{12\nu_0 R \Delta T}{53p_0} \right) = p_0 \left(1 + \frac{20}{53} \cdot \frac{\nu_0 R \Delta T}{p_0 V_{A0}} \right). \quad (18)$$

Так как $p_0 V_{A0} = \nu_0 R T_0$, то

$$p_{A1} = p_0 \left(1 + \frac{20 \Delta T}{53 T_0} \right). \quad (19)$$

Количество теплоты: Применяя первый закон термодинамики ко всей системе:

$$Q = \Delta U_A + \Delta U_B - A_{\text{атм}}, \quad (20)$$

где $A_{\text{атм}}$ — работа атмосферы над системой. Работа атмосферы:

$$A_{\text{атм}} = p_0 (\Delta V_A - \Delta V_B) = p_0 (\Delta V_A - 4 \Delta V_A) = -3p_0 \Delta V_A = -3p_0 \cdot \frac{12\nu_0 R \Delta T}{53p_0} = -\frac{36\nu_0 R \Delta T}{53}. \quad (21)$$

Изменения внутренней энергии:

$$\Delta U_A = \frac{3}{2} \nu_0 R \Delta T_A = \frac{3}{2} \nu_0 R \cdot \frac{8}{53} \Delta T = \frac{12\nu_0 R \Delta T}{53}, \quad (22)$$

$$\Delta U_B = \frac{3}{2} \nu_0 R \Delta T. \quad (23)$$

Подставляя (21), (22) и (23) в (20):

$$Q = \frac{12\nu_0 R \Delta T}{53} + \frac{3}{2} \nu_0 R \Delta T - \left(-\frac{36\nu_0 R \Delta T}{53} \right) = \frac{255\nu_0 R \Delta T}{106}. \quad (24)$$

Ответ:

$$1. \quad T_A = T_0 + \frac{8}{53} \Delta T, \quad p_{A1} = p_0 \left(1 + \frac{20 \Delta T}{53 T_0} \right).$$

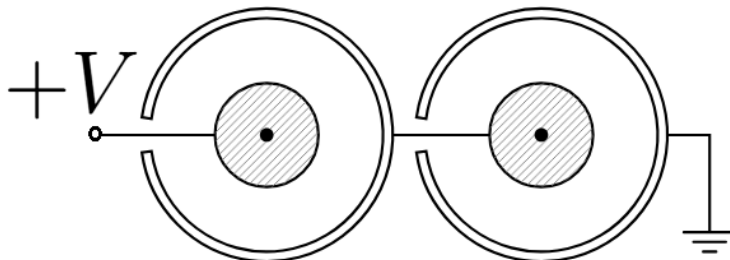
$$2. \quad Q = \frac{255\nu_0 R \Delta T}{106}.$$

Критерии

1. Получены начальные объёмы газов в цилиндрах с использованием уравнения состояния идеального газа. (+1 балл)
2. Записаны условия равновесия поршней после нагревания, из которых получена связь между давлениями. (+1 балл)
3. Записаны уравнения состояния газов после нагревания с учетом связи между изменениями объёмов. (+1 балл)
4. Записано условие адиабатичности процесса в цилиндре A . (+1 балл)
5. Верно найдено изменение объёма ΔV_A с пренебрежением величинами второго порядка малости. (+1 балл)
6. Верно найдено изменение температуры газа в цилиндре A и его конечная температура. (+1 балл)
7. Верно найдено конечное давление газа в цилиндре A . (+1 балл)
8. Записан первый закон термодинамики для всей системы или аналогичные выражения для каждого из цилиндров. (+1 балл)
9. Найдена работа атмосферы. (+1 балл)
10. Получено выражение для подведённого количества теплоты. (+1 балл)

Задача 4. Сферический конденсатор состоит из проводящего сферического слоя со внутренним радиусом b и толщиной стенок d и металлического шара радиуса a . Центры сферического слоя и шара совпадают. Электрическая постоянная равна ε_0 .

1. Внутренний шар заземляют, оставляя внешний слой незаземлённым. Каким будет отношение $\frac{q_{\text{внеш}}}{q_{\text{внутр}}}$ заряда внешней поверхности сферической оболочки к заряду внутренней поверхности, если внешнюю оболочку зарядить?
2. Возьмём две одинаковые системы из пункта 1 и расположим их очень далеко друг от друга (расстояние между шарами на рисунке преуменьшено). В одной из систем внешний слой заземлен, а внутренний шар соединен со внешним слоем другой системы. Какова ёмкость C подобной системы, если напряжение подается на внутренний шар второй системы?



Возможное решение

1. Описанная в условии система эквивалентна параллельному соединению двух ёмкостей: C_1 — ёмкость между внешней оболочкой и внутренним шаром (шар при этом заземлен), и C_2 — ёмкость внешнего сферического слоя радиуса $b+d$. При этом ёмкость C_1 — это ёмкость сферического конденсатора с радиусами сферических оболочек a и b :

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 \frac{ab}{b-a},$$

а ёмкость C_2 — ёмкость уединенного сферического слоя определяется, как отношение заряда проводника к потенциалу его поверхности при отсчете потенциала от 0 на пространственной бесконечности:

$$C_2 = 4\pi\varepsilon_0(b+d).$$

Поскольку потенциалы внешней и внутренней поверхностей внешней оболочки равны, имеем

$$\frac{q_{\text{внутр}}}{C_1} = \frac{q_{\text{внеш}}}{C_2},$$

откуда

$$\frac{q_{\text{внеш}}}{q_{\text{внутр}}} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(b+d)(b-a)}{ab}.$$

2. Рассмотрим две системы, расположенные далеко друг от друга. В системе I внешний слой заземлён, внутренний шар соединён с внешним слоем системы II. Напряжение подаётся на внутренний шар системы II. Поскольку системы находятся далеко, их взаимной ёмкостью можно пренебречь.

Данная система эквивалентна последовательному соединению ёмкости C_1 (ёмкость между шаром и оболочкой системы II) с параллельно соединёнными ёмкостями C_2 (ёмкость внешней оболочки системы II) и C_1 (ёмкость между шаром и оболочкой системы I).

В соответствии с законами параллельного и последовательного соединения конденсаторов общая ёмкость:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2 + C_1}.$$

После преобразований получаем

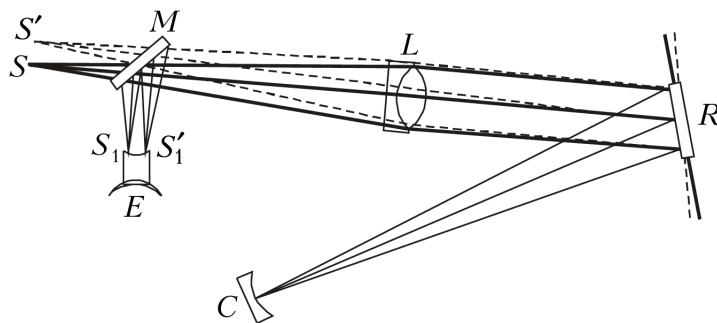
$$C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \cdot \frac{ab + (b+d)(b-a)}{2ab + (b+d)(b-a)}.$$

$$\text{Ответ: 1. } \frac{q_{\text{внеш}}}{q_{\text{внутр}}} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{(b+d)(b-a)}{ab}. \quad 2. \quad C = \frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a} \cdot \frac{ab + (b+d)(b-a)}{2ab + (b+d)(b-a)}.$$

Критерии

1. Обосновано, что система эквивалентна параллельному соединению двух ёмкостей: C_1 (между шаром и внутренней поверхностью оболочки) и C_2 (ёмкость внешней поверхности оболочки). (+1 балл)
2. Записано выражение для ёмкости C_1 как ёмкости сферического конденсатора. (+1 балл)
3. Записано выражение для ёмкости C_2 как ёмкости уединённого сферического слоя. (+2 балла)
4. Использовано условие равенства потенциалов внешней и внутренней поверхностей оболочки, получено искомое отношение $\frac{q_{\text{внеш}}}{q_{\text{внутр}}}$. (+2 балла)
5. Обосновано, что в системе II ёмкость между шаром и оболочкой равна C_1 , а ёмкость внешней оболочки относительно земли равна C_2 . (+1 балл)
6. Определена эквивалентная схема соединения: ёмкость C_1 системы II соединена последовательно с параллельно соединёнными ёмкостями C_2 (внешняя оболочка системы II) и C_1 (ёмкость между шаром системы I и заземлённой оболочкой). (+1 балл)
7. Верно записана формула эквивалентной ёмкости для последовательного соединения конденсаторов. (+1 балл)
8. Верно получено окончательное выражение для ёмкости системы. (+1 балл)

Задача 5. На рисунке ниже показана установка, использованная Жаном Бернаром Фуко (1819–1868) для измерения скорости света. На схеме E — окулярный микрометр, M — неподвижное плоское зеркало, L — собирающая линза. R — вращающееся плоское зеркало. Зеркало C , на поверхности которого формируется промежуточное действительное изображение источника, закреплено на дуге окружности радиуса a . Центр этой окружности лежит на оси вращения быстрого вращающегося плоского зеркала R , ось вращения которого перпендикулярна плоскости рисунка. Зеркало R вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω . Расстояние от мнимого источника S до линзы равно l , расстояние от линзы до оси вращения зеркала равно b . Свет, испущенный из точки S_1 , после прохождения через систему вновь даёт изображение в точке S'_1 ; измеренное расстояние между этими точками равно y . Найдите скорость света c .



Возможное решение

Свет, отразившись от зеркала R , проходит путь до зеркала C , на поверхности которого формируется промежуточное изображение S'' , в соответствии с законом отражения точка фокусировки лучей сама становится изображением, лучи от которого возвращаются обратно к зеркалу R . На это затрачивается время t , за которое зеркало R поворачивается на угол θ .

Время прохождения света от зеркала R до зеркала C и обратно:

$$t = \frac{2a}{c}. \quad (1)$$

За это время зеркало R поворачивается на угол:

$$\theta = \omega t = \frac{2a\omega}{c}. \quad (2)$$

В результате после отражения от R лучи поворачиваются на угол 2θ от первоначального направления. Это соответствует линейному смещению изображения S'' на расстояние:

$$Y = 2a\theta = \frac{4a^2\omega}{c}. \quad (3)$$

Это смещение наблюдается в окуляре E . Оптическая система (линза L и зеркало R) переносит изображение из плоскости зеркала C в плоскость окуляра E с увеличением. Поскольку расстояние от линзы до мнимого источника S равно l , а расстояние от линзы до оси вращения зеркала R равно b , то увеличение системы:

$$\Gamma = \frac{l}{a+b}. \quad (4)$$

Тогда измеряемое смещение y в окуляре:

$$y = \Gamma \cdot Y = \frac{l}{a+b} \cdot \frac{4a^2\omega}{c}. \quad (5)$$

Из полученного соотношения (5) выражаем скорость света:

$$c = \frac{4a^2l\omega}{y(a+b)}. \quad (6)$$

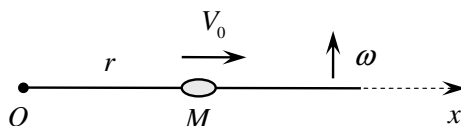
$$\text{Ответ: } c = \frac{4a^2l\omega}{y(a+b)}.$$

Критерии

1. Записано время прохождения света от зеркала R до зеркала C и обратно через скорость света. (+1 балл)
2. Записано выражение для угла поворота зеркала R за это время. (+1 балл)
3. Обосновано, что после отражения от повернувшегося зеркала лучи поворачиваются на угол 2θ относительно первоначального направления. (+2 балла)
4. Записано выражение для линейного смещения изображения S'' в плоскости зеркала C через угол поворота. (+1 балл)
5. Обосновано, что оптическая система (линза L и зеркало R) переносит изображение из плоскости зеркала C в плоскость окуляра E с увеличением Γ . (+2 балла)
6. Записано выражение для увеличения оптической системы. (+1 балл)
7. Записано соотношение между измеряемым смещением y в окуляре и смещением Y в плоскости зеркала C через увеличение. (+1 балл)
8. Из полученного соотношения выражена скорость света. (+1 балл)

Задача 1. Стержень равномерно вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через конец стержня O . Угловая скорость вращения $\omega = 0,2$ рад/с. По стержню, в направлении от оси вращения, ползёт муравей M . Скорость муравья относительно стержня постоянна и равна $V_0 = 4$ см/с. В некоторый момент времени муравей находится на расстоянии $r = 30$ см от оси. Считая муравья материальной точкой, найдите следующие величины:

1. Абсолютную величину V скорости муравья относительно плоскости вращения и угол α , который вектор скорости образует с осью x , направленной вдоль стержня.
2. Абсолютную величину a ускорения муравья и угол β , который вектор ускорения образует с осью x .
3. Радиус кривизны R траектории муравья.

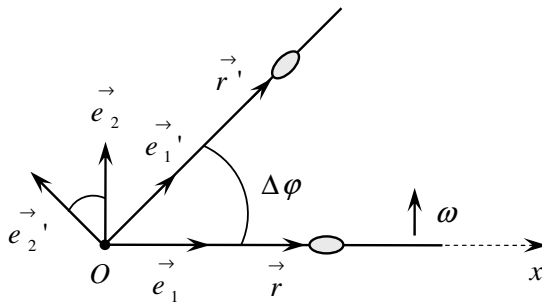


Возможное решение

1. Выберем начало координат в точке O и будем задавать положение муравья при помощи радиус-вектора $\vec{r}$, направленного вдоль стержня. Введём два единичных взаимно ортогональных вектора $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$. Вектор $\vec{e}_1$ направлен вдоль $\vec{r}$:

$$\vec{e}_1 = \frac{\vec{r}}{r},$$

r — длина радиус-вектора. Вектор $\vec{e}_2$ перпендикулярен $\vec{e}_1$ и направлен в сторону вращения стержня. Важно отметить, что векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ жёстко связаны с радиус-вектором и поворачиваются вместе с ним, оставаясь единичными и взаимно ортогональными.



Рассмотрим перемещение муравья за малый промежуток времени Δt . За это время радиус-вектор переходит в новое положение $\vec{r}'$, повернувшись на малый угол $\Delta \varphi = \omega \Delta t$. На такой же угол поворачиваются векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, переходя в новые положения $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_2'$. Учитывая, что длина радиус-вектора увеличивается на $V_0 \Delta t$, для перемещения муравья получаем:

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = (r + V_0 \Delta t) \vec{e}_1' - r \vec{e}_1 = r \Delta \vec{e}_1 + V_0 \Delta t \vec{e}_1',$$

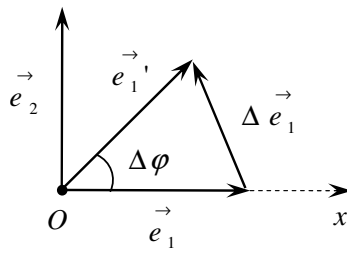
$$\Delta \vec{e}_1 = \vec{e}_1' - \vec{e}_1.$$

Векторы $\Delta \vec{e}_1$, $\vec{e}_1'$ и $\vec{e}_1$ образуют равнобедренный треугольник с единичными боковыми сторонами и углом $\Delta \varphi$ между ними. При малых значениях $\Delta \varphi$ имеем:

$$|\Delta \vec{e}_1| = 2 \sin \frac{\Delta \varphi}{2} \approx \Delta \varphi.$$

При $\Delta t \rightarrow 0$ угол между векторами $\vec{e}_1$ и $\Delta \vec{e}_1$ стремится к 90° . В этом пределе

$$\Delta \vec{e}_1 = \Delta \varphi \vec{e}_2 = \omega \Delta t \vec{e}_2.$$



Во втором слагаемом формулы для перемещения уже имеется малый сомножитель Δt . Поэтому там можно заменить $\vec{e}_1'$ на $\vec{e}_1$. Получаем:

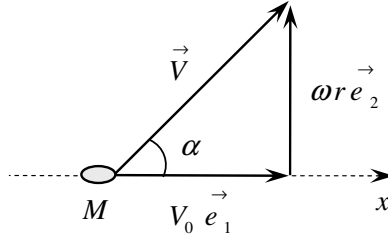
$$\Delta \vec{r} = V_0 \Delta t \vec{e}_1 + \omega r \Delta t \vec{e}_2.$$

Скорость муравья равна:

$$\vec{V} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = V_0 \vec{e}_1 + \omega r \vec{e}_2.$$

Абсолютная величина скорости:

$$V = \sqrt{V_0^2 + (\omega r)^2} \approx 7,2 \text{ см/с}.$$



Для угла α между вектором скорости и осью x получаем:

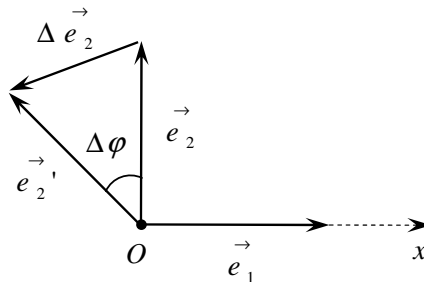
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\omega r}{V_0} \longrightarrow \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\omega r}{V_0} \approx 56^\circ.$$

2. Рассмотрим ускорение муравья. За время Δt скорость муравья меняется от значения $\vec{V}$, найденного в пункте 1, до значения

$$\vec{V}' = V_0 \vec{e}_1' + \omega (r + V_0 \Delta t) \vec{e}_2'.$$

Приращение вектора скорости равно:

$$\begin{aligned} \Delta \vec{V} &= \vec{V}' - \vec{V} = V_0 \vec{e}_1' + \omega (r + V_0 \Delta t) \vec{e}_2' - (V_0 \vec{e}_1 + \omega r \vec{e}_2) = V_0 \Delta \vec{e}_1 + \omega r \Delta \vec{e}_2 + V_0 \omega \Delta t \vec{e}_2', \\ \Delta \vec{e}_2 &= \vec{e}_2' - \vec{e}_2. \end{aligned}$$



Вектор $\Delta \vec{e}_1$ был найден в пункте 1. Вектор $\Delta \vec{e}_2$ нетрудно найти с помощью аналогичных рассуждений:

$$\Delta \vec{e}_2 = -\omega \Delta t \vec{e}_1.$$

Знак минус учитывает тот факт, что в пределе $\Delta t \rightarrow 0$ вектор $\Delta \vec{e}_2$ направлен против вектора $\vec{e}_1$. В последнем слагаемом формулы для $\Delta \vec{V}$, содержащем малый сомножитель Δt , можно заменить $\vec{e}_2'$ на $\vec{e}_2$. Получаем:

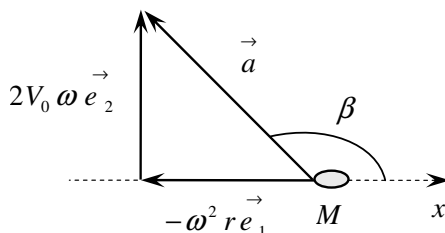
$$\Delta \vec{V} = V_0 \omega \Delta t \vec{e}_2 - \omega^2 r \Delta t \vec{e}_1 + V_0 \omega \Delta t \vec{e}_2 = -\omega^2 r \Delta t \vec{e}_1 + 2 V_0 \omega \Delta t \vec{e}_2.$$

Ускорение муравья равно:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = -\omega^2 r \vec{e}_1 + 2 V_0 \omega \vec{e}_2.$$

Абсолютная величина ускорения:

$$a = \sqrt{(2 V_0 \omega)^2 + (\omega^2 r)^2} = \omega \sqrt{(2 V_0)^2 + (\omega r)^2} = 2 \text{ см/с}^2.$$



Вектор ускорения образует с осью x тупой угол β :

$$\beta = 180^\circ - \arctg \frac{2 V_0 \omega}{\omega^2 r} = 180^\circ - \arctg \frac{2 V_0}{\omega r} \approx 127^\circ.$$

3. В данной задаче траекторией муравья является спираль Архимеда. Для того чтобы найти её радиус кривизны, разложим вектор ускорения на две взаимно перпендикулярные составляющие:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Составляющая $\vec{a}_\tau$, направленная по касательной к траектории, называется тангенциальным или касательным ускорением. Составляющая $\vec{a}_n$ называется нормальным или центростремительным ускорением. Она направлена перпендикулярно касательной в сторону вогнутости траектории. Радиус кривизны траектории R связан с абсолютной величиной нормального ускорения соотношением:

$$a_n = \frac{V^2}{R}.$$

Поскольку полное ускорение муравья уже было рассмотрено в пункте 2, величину a_n можно найти, зная тангенциальное ускорение:

$$a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2}.$$

Так как вектор скорости $\vec{V}$ направлен по касательной к траектории, абсолютная величина тангенциального ускорения определяется проекцией полного ускорения $\vec{a}$ на направление вектора $\vec{V}$. Учитывая, что угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{V}$ равен $(\beta - \alpha)$, получаем:

$$a_\tau = a \cos(\beta - \alpha), \quad a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = a \sin(\beta - \alpha),$$

$$R = \frac{V^2}{a_n} = \frac{V^2}{a \sin(\beta - \alpha)} \approx 27,5 \text{ см}.$$

Ответ:

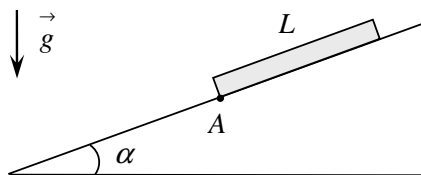
- $V = \sqrt{V_0^2 + (\omega r)^2} \approx 7,2 \text{ см/с}, \quad \alpha = \arctg(\omega r / V_0) \approx 56^\circ.$
- $a = \omega \sqrt{(2 V_0)^2 + (\omega r)^2} = 2 \text{ см/с}^2, \quad \beta = 180^\circ - \arctg(2 V_0 / \omega r) \approx 127^\circ.$
- $R = V^2 / (a \sin(\beta - \alpha)) \approx 27,5 \text{ см}.$

Критерии

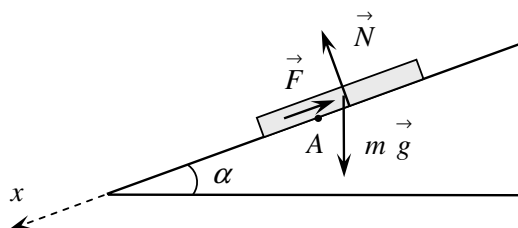
- Правильно вычислены приращения векторов $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ за малый промежуток времени (+1 балл).

2. Правильно записано выражение для перемещения (+1 балл).
3. Правильные буквенный и числовой ответы для абсолютной величины скорости (+1 балл).
4. Правильные буквенный и числовой ответы для угла между вектором скорости и осью x (+1 балл).
5. Правильно записано выражение для приращения вектора скорости (+1 балл).
6. Правильные буквенный и числовой ответы для абсолютной величины ускорения (+1 балл).
7. Правильные буквенный и числовой ответы для угла между вектором ускорения и осью x (+1 балл).
8. Правильно найдено тангенциальное ускорение (+1 балл).
9. Правильно найдено нормальное ускорение (+1 балл).
10. Правильные буквенный и числовой ответы для радиуса кривизны траектории (+1 балл).

Задача 2. Наклонная плоскость, образующая с горизонтом угол $\alpha = \arcsin(0.2)$, состоит из двух полуплоскостей, соприкасающихся по прямой, проходящей через точку A перпендикулярно плоскости рисунка (в дальнейшем прямая A). Верхняя полуплоскость гладкая, нижняя шероховатая. На верхней полуплоскости удерживают однородную прямоугольную доску длиной $L = 1$ м так, что её нижний край лежит на прямой A . Затем доску отпускают без толчка, она начинает двигаться и через некоторое время останавливается, переместившись вдоль плоскости на расстояние L . Найдите время движения доски τ . Ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Возможное решение



Рассмотрим промежуточное положение доски, в котором она переместилась на расстояние x вдоль наклонной плоскости. На доску действует сила трения скольжения $\vec{F}$, сила $\vec{N}$ нормальной реакции наклонной плоскости и сила тяжести $m \vec{g}$ (m — масса доски). Запишем уравнение движения доски в проекции на ось x , выбранную вдоль направления движения:

$$m a_x = -F + m g \sin \alpha,$$

a_x — проекция ускорения доски на ось x . Сила трения равна:

$$F = \mu N_x,$$

μ — коэффициент трения, N_x — сила нормальной реакции, действующая на нижнюю часть доски, лежащую на шероховатой полуплоскости. Длина этой части равна перемещению x , её масса

$$m_x = \frac{x}{L} m.$$

Получаем:

$$\begin{aligned} N_x &= m_x g \cos \alpha = \frac{m g x}{L} \cos \alpha, & F &= \frac{\mu m g x}{L} \cos \alpha, \\ m a_x &= -\frac{\mu m g x}{L} \cos \alpha + m g \sin \alpha \quad \longrightarrow \quad a_x + \frac{\mu g \cos \alpha}{L} \left(x - \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{\mu} \right) = 0. \end{aligned}$$

Обозначим:

$$\omega = \sqrt{\frac{\mu g \cos \alpha}{L}}, \quad x_0 = \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{\mu}.$$

Тогда уравнение движения принимает вид:

$$a_x + \omega^2 (x - x_0) = 0.$$

Такое же уравнение описывает вертикальные колебания груза на пружине. В этом случае ω — круговая частота колебаний, x_0 — смещение положения равновесия под действием постоянной силы тяжести. Используя эту аналогию, находим зависимость перемещения доски от времени:

$$x(t) = x_0 + C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t,$$

C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Проекция скорости на ось x получается дифференцированием этого выражения по времени:

$$V_x(t) = C_1 \omega \cos \omega t - C_2 \omega \sin \omega t.$$

Постоянные C_1 и C_2 найдём из начальных условий. Принимая за начало отсчёта времени $t = 0$ момент начала движения, получаем:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ V_x(0) = 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 + C_2 = 0, \\ C_1 = 0. \end{cases} \longrightarrow C_1 = 0, \quad C_2 = -x_0,$$

$$x(t) = x_0 (1 - \cos \omega t), \quad V_x(t) = x_0 \omega \sin \omega t.$$

В момент остановки $t = \tau$ имеем дополнительные условия:

$$\begin{cases} x(\tau) = L, \\ V_x(\tau) = 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} x_0 (1 - \cos \omega \tau) = L, \\ \sin \omega \tau = 0. \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} 2x_0 = L, \\ \omega \tau = \pi. \end{cases}$$

Из этих соотношений находим коэффициент трения μ , частоту ω и время движения τ :

$$2 \cdot \frac{L \operatorname{tg} \alpha}{\mu} = L \longrightarrow \mu = 2 \operatorname{tg} \alpha,$$

$$\omega = \sqrt{\frac{2 \operatorname{tg} \alpha g \cos \alpha}{L}} = \sqrt{\frac{2 g \sin \alpha}{L}},$$

$$\tau = \frac{\pi}{\omega} = \pi \sqrt{\frac{L}{2 g \sin \alpha}} = \frac{\pi}{2} \text{ с} \approx 1,6 \text{ с}.$$

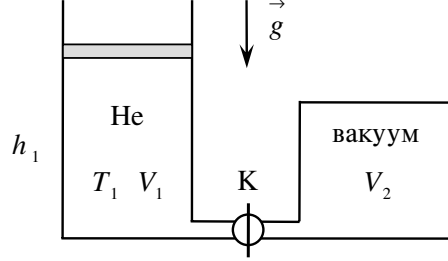
Ответ:

$$\tau = \pi \sqrt{\frac{L}{2 g \sin \alpha}} = \frac{\pi}{2} \text{ с} \approx 1,6 \text{ с}.$$

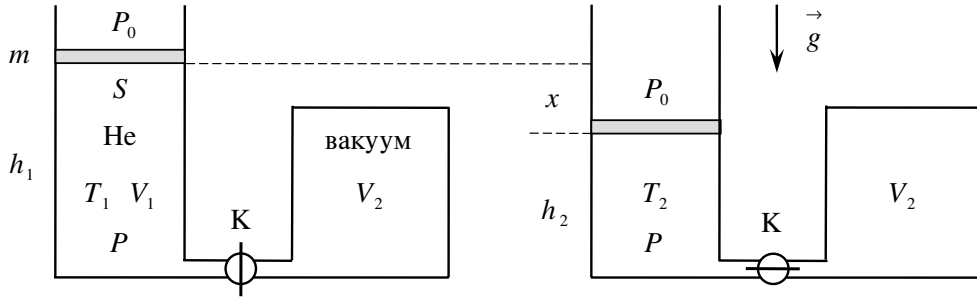
Критерии

1. Правильно указаны силы, действующие на доску (+1 балл).
2. Правильно записано выражение для силы трения (+1 балл).
3. Получено правильное уравнение движения (+1 балл).
4. Правильно записано общее решение уравнения движения (+2 балла).
5. Правильно найдены произвольные постоянные в общем решении (+2 балла).
6. Правильно найден коэффициент трения (+2 балла).
7. Правильные буквенный и числовой ответы для времени движения (+1 балл).

Задача 3. В вертикальном цилиндре, открытом сверху в атмосферу, может свободно двигаться массивный поршень. Цилиндр соединён с сосудом постоянного объёма короткой трубкой с краном К. Сначала кран закрыт, сосуд откачан до глубокого вакуума, в цилиндре под поршнем находится гелий при температуре $T_1 = 300$ К. Известно отношение k объёма сосуда V_2 к объёму гелия V_1 : $k = V_2/V_1 = 0,5$. Кран открывают, гелий перетекает в правый сосуд, и вся система переходит в новое состояние равновесия. Считая, что все стенки, поршень и трубка с краном не проводят тепло, найдите конечную температуру гелия T_2 и отношение x/h_1 , где x — расстояние, на которое переместился поршень, h_1 — высота поршня над дном цилиндра в начальном состоянии. Объём трубки с краном не учитывайте, атмосферное давление считайте постоянным.



Возможное решение



1. Пусть P_0 — атмосферное давление, m и S — масса и площадь поршня, h_2 — высота поршня над дном цилиндра в конечном состоянии, P — начальное и конечное давление газа, ν — число молей газа. Согласно первому началу термодинамики имеем:

$$0 = \nu C_V (T_2 - T_1) + A,$$

C_V — молярная теплоёмкость при постоянном объёме, A — работа газа. Запишем уравнение баланса энергии для поршня:

$$m g h_2 - m g h_1 = A + P_0 S x.$$

Второе слагаемое в правой части представляет собой работу постоянной силы атмосферного давления $P_0 S$ на перемещении x . Полагая $h_1 - h_2 = x$, получаем:

$$A = -(P_0 S + m g) x.$$

Выразим работу A через давление газа P , записав условие равновесия поршня в начальном и конечном состояниях:

$$P S = P_0 S + m g \quad \longrightarrow \quad A = -P S x.$$

Далее воспользуемся уравнением состояния и выразим работу A через начальную и конечную температуры газа:

$$\begin{cases} P V_1 = \nu R T_1 \\ P (V_1 + V_2 - S x) = \nu R T_2 \end{cases}$$

Полагая $V_2 = k V_1$, получаем:

$$P V_1 (1 + k) - P S x = \nu R T_2 \quad \longrightarrow \quad \nu R T_1 (1 + k) + A = \nu R T_2 \quad \longrightarrow \quad A = \nu R T_2 - \nu R T_1 (1 + k).$$

Подставляя этот результат в уравнение первого начала термодинамики, находим конечную температуру газа:

$$0 = \nu C_V T_2 - \nu C_V T_1 + \nu R T_2 - \nu R T_1 (1 + k) \quad \longrightarrow \quad T_2 = T_1 \frac{C_P + k R}{C_P},$$

$C_P = C_V + R$ — молярная теплоёмкость при постоянном давлении.

2. Найдём теперь перемещение поршня x . Для этого воспользуемся найденными выше выражениями для работы газа:

$$A = -P S x = \nu R T_2 - \nu R T_1 (1 + k).$$

Полагая здесь $P = \nu R T_1 / V_1$ и $V_1 = S h_1$, получаем:

$$-\nu R T_1 \cdot \frac{x}{h_1} = \nu R T_2 - \nu R T_1 (1 + k) \quad \longrightarrow \quad \frac{x}{h_1} = \frac{T_1 (1 + k) - T_2}{T_1}.$$

Подстановка выражения для T_2 приводит к окончательному ответу:

$$\frac{x}{h_1} = \frac{k}{\gamma},$$

$\gamma = C_P / C_V$ — показатель адиабаты.

Упростим полученные формулы для одноатомного газа. В этом случае $C_V = 3 R / 2$, $C_P = 5 R / 2$, $\gamma = 5 / 3$,

$$T_2 = T_1 \frac{5 + 2k}{5} = 360 \text{ К}, \quad \frac{x}{h_1} = \frac{3k}{5} = 0,3.$$

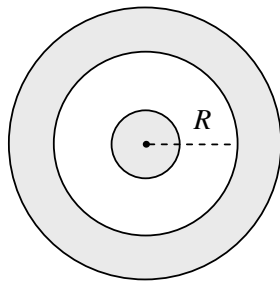
Ответ:

$$T_2 = T_1 \frac{5 + 2k}{5} = 360 \text{ К}, \quad \frac{x}{h_1} = \frac{3k}{5} = 0,3.$$

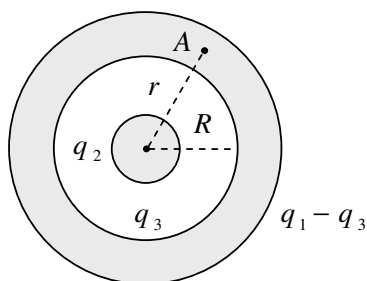
Критерии

1. Правильно записано первое начало термодинамики для газа (+1 балл).
2. Правильно записано уравнение баланса энергии для поршня (+2 балла).
3. Правильно записано условие равновесия поршня (+1 балл).
4. Получено правильное выражение, связывающее работу газа с перемещением поршня (+1 балл).
5. Правильно записано уравнение состояния для начального и конечного положений поршня (+1 балл).
6. Получено правильное выражение, связывающее работу газа с начальной и конечной температурами (+1 балл).
7. Правильные буквенный и числовой ответы для конечной температуры (+1 балл).
8. Получено правильное выражение, связывающее перемещение поршня с начальной и конечной температурами (+1 балл).
9. Правильные буквенный и числовой ответы для перемещения поршня (+1 балл).

Задача 4. Металлический шар окружён concentрическим металлическим сферическим слоем, внутренний радиус которого $R = 6$ см. Слою сообщили заряд $q_1 = 20$ нКл. Найдите заряд q_2 , который нужно сообщить шару для того, чтобы электрическое давление на внешнюю поверхность слоя обратилось в нуль. Каково в этом случае электрическое давление P на внутреннюю поверхность слоя? Выразите давление в миллипаскалях и округлите до целого значения. Электрическая постоянная $\varepsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м.



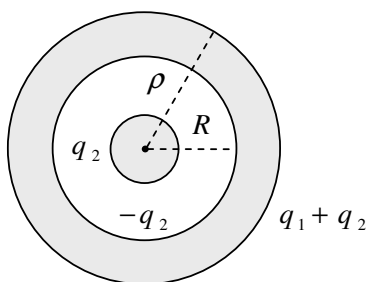
Возможное решение



1. Рассмотрим распределение зарядов на поверхностях сферического слоя. Обозначим через q_3 заряд его внутренней поверхности. Тогда заряд внешней поверхности равен $(q_1 - q_3)$. Выберем внутри слоя произвольную точку A , лежащую на расстоянии r от центра шара. Напряжённость электрического поля в этой точке равна нулю. Выразим её через заряды:

$$E_A = \frac{(q_2 + q_3)}{4 \pi \varepsilon_0 r^2}.$$

Из условия $E_A = 0$ получаем, что $q_3 = -q_2$. Таким образом, заряд внутренней поверхности слоя равен $(-q_2)$, а внешняя поверхность несёт заряд $(q_1 + q_2)$.



Обозначим радиус внешней поверхности слоя через ρ и рассмотрим электрическое давление P на эту поверхность (силу, действующую со стороны электрического поля на единицу площади поверхности). Мысленно увеличим радиус слоя на малую величину $\Delta \rho$. При этом элементарная работа δA сил электрического поля определяется "газовой" формулой:

$$\delta A = P_r \Delta V,$$

где $P_r = \pm P$ в зависимости от направления действия сил давления (от центра шара или к центру), $\Delta V = 4 \pi \rho^2 \Delta \rho$ — приращение объёма слоя. Работу δA можно также записать в виде убыли энергии электрического поля. Учитывая, что энергия меняется только в объёме ΔV , имеем:

$$\delta A = (w_1 - w_2) \Delta V.$$

Здесь w_1 и w_2 — плотности энергии поля в объёме ΔV до и после увеличения радиуса внешней поверхности. Приравнявая выражения для элементарной работы, получаем:

$$P_r = w_1 - w_2.$$

Плотность энергии w_1 определяется напряжённостью электрического поля E_1 у внешней поверхности слоя радиуса ρ :

$$E_1 = \frac{(q_1 + q_2)}{4\pi\epsilon_0\rho^2} \longrightarrow w_1 = \frac{\epsilon_0 E_1^2}{2} = \frac{(q_1 + q_2)^2}{32\pi^2\epsilon_0\rho^4}.$$

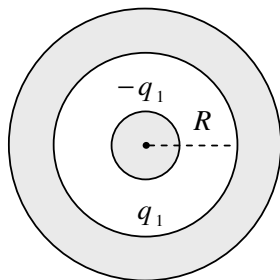
После увеличения радиуса поверхности на $\Delta\rho$ весь объём ΔV заполнен металлом. Напряжённость электрического поля в этом объёме обращается в нуль, и плотность энергии $w_2 = 0$. Тогда электрическое давление равно:

$$P_r = w_1 = \frac{(q_1 + q_2)^2}{32\pi^2\epsilon_0\rho^4}.$$

Полагая $P_r = 0$, находим заряд q_2 :

$$P_r = 0 \longrightarrow q_2 = -q_1 = -20 \text{ нКл}.$$

Таким образом, заряд $(q_1 + q_2)$ внешней поверхности сферического слоя равен нулю. Это очевидный результат — электрическое давление на поверхность обращается в нуль, если эта поверхность не заряжена. Окончательно имеем следующее распределение зарядов: весь заряд сферического слоя q_1 сосредоточен на его внутренней поверхности, а заряд шара равен $(-q_1)$.



2. Рассмотрим электрическое давление на внутреннюю поверхность сферического слоя. Мысленно увеличим его радиус R на малую величину ΔR . При этом объём области между слоем и шаром возрастёт на $\Delta V = 4\pi R^2 \Delta R$. Для электрического давления имеем ту же формулу, что и в пункте 1:

$$P_r = w_1 - w_2,$$

где w_1 и w_2 — начальная и конечная плотности энергии поля в объёме ΔV . До увеличения радиуса границы слоя весь объём ΔV заполнен металлом. Напряжённость электрического поля в этом объёме обращается в нуль, и плотность энергии $w_1 = 0$. Плотность энергии w_2 определяется напряжённостью поля E_2 на расстоянии R от центра шара:

$$E_2 = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Получаем:

$$P_r = -w_2 = -\frac{\epsilon_0 E_2^2}{2} = -\frac{q_1^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4}.$$

Знак минус означает, что элементы внутренней поверхности слоя притягиваются к шару. Абсолютная величина электрического давления равна:

$$P = |P_r| = \frac{q_1^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} = 11 \text{ мПа}.$$

Ответ :

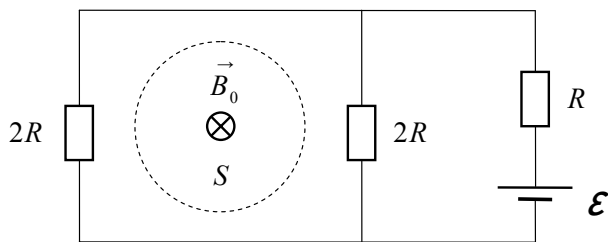
$$q_2 = -q_1 = -20 \text{ нКл}, \quad P = \frac{q_1^2}{32\pi^2\epsilon_0 R^4} = 11 \text{ мПа}.$$

Критерии

1. Доказано, что заряд внутренней поверхности сферического слоя равен по абсолютной величине заряду шара и отличается от него знаком (+1 балл).

2. Правильно записано выражение для работы сил электрического поля через давление (+1 балл).
3. Правильно записано выражение для работы сил электрического поля через убыль энергии поля (+1 балл).
4. Получено правильное выражение для электрического давления (+1 балл).
5. Правильно записаны плотности энергии при вычислении давления на внешнюю поверхность слоя (+2 балла).
6. Правильный ответ для заряда шара (+1 балл).
7. Правильно записаны плотности энергии при вычислении давления на внутреннюю поверхность слоя (+2 балла).
8. Правильные буквенный и числовой ответы для давления (+1 балл).

Задача 5. Электрическая цепь состоит из двух плоских контуров, включающих в себя сопротивление $R = 27$ Ом, два сопротивления $2R$ и батарею с ЭДС $\varepsilon = 1,5$ В и пренебрежимо малым внутренним сопротивлением. Левый контур охватывает цилиндрическую область площадью поперечного сечения $S = 300$ см². В этой области имеется однородное магнитное поле, индукция которого зависит от времени по закону $\vec{B} = \vec{B}_0 \cos \omega t$, где $\vec{B}_0$ — постоянный вектор, равный по абсолютной величине 0,2 Тл и направленный перпендикулярно плоскости контура, $\omega = 500$ рад/с. Найдите среднюю за период $T = 2\pi/\omega$ тепловую мощность P , выделяющуюся на сопротивлении R . Ответ выразите в милливаттах и округлите до целого значения.



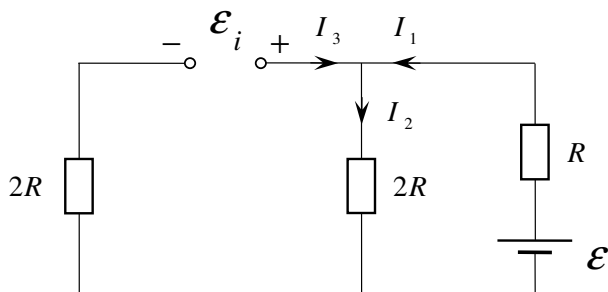
Возможное решение

Направим вектор $\vec{n}$ единичной нормали к плоскости левого контура вдоль вектора магнитной индукции. Положительное направление обхода контура связано с направлением вектора $\vec{n}$ правилом правого винта (правилом буравчика). В нашем случае это направление по часовой стрелке. Рассмотрим ЭДС индукции, возникающую в контуре при изменении магнитного поля. Магнитный поток через площадь, ограниченную контуром, равен:

$$\Phi = \vec{B} \vec{n} S = B_0 S \cos \omega t.$$

ЭДС индукции:

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 S \omega \sin \omega t.$$



Для определённости рассмотрим случай, когда $\sin \omega t > 0$. При этом ЭДС индукции положительна и действует по часовой стрелке. В эквивалентной схеме имеем три неизвестных тока I_1 , I_2 и I_3 . Применяя правила Кирхгофа, получаем три уравнения:

$$\begin{cases} I_1 + I_3 - I_2 = 0, \\ I_1 R + I_2 \cdot 2R = \varepsilon, \\ I_2 \cdot 2R + I_3 \cdot 2R = \varepsilon_i. \end{cases}$$

Исключая токи I_2 и I_3 , находим ток I_1 , текущий через сопротивление R :

$$2I_2 R = \varepsilon - I_1 R, \quad 2I_3 R = \varepsilon_i - 2I_2 R = \varepsilon_i - \varepsilon + I_1 R,$$

$$I_1 + I_3 - I_2 = 0 \quad \longrightarrow \quad 2I_1 R + 2I_3 R - 2I_2 R = 0 \quad \longrightarrow \quad 2I_1 R + \varepsilon_i - \varepsilon + I_1 R - \varepsilon + I_1 R = 0,$$

$$I_1 = \frac{2\varepsilon - \varepsilon_i}{4R}.$$

Мгновенная мощность, выделяющаяся на сопротивлении R , равна:

$$P(t) = I_1^2 R = \frac{1}{16R} (4\varepsilon^2 - 4\varepsilon\varepsilon_i + \varepsilon_i^2).$$

Зависимость от времени входит сюда через ЭДС индукции. Средняя за период $T = 2\pi/\omega$ тепловая мощность:

$$P = \frac{1}{16R} (4\varepsilon^2 - 4\varepsilon \langle \varepsilon_i \rangle + \langle \varepsilon_i^2 \rangle).$$

Здесь $\langle \varepsilon_i \rangle$ и $\langle \varepsilon_i^2 \rangle$ — средние значения ε_i и ε_i^2 :

$$\langle \varepsilon_i \rangle = B_0 S \omega \langle \sin \omega t \rangle, \quad \langle \varepsilon_i^2 \rangle = (B_0 S \omega)^2 \langle \sin^2 \omega t \rangle.$$

Воспользовавшись тем, что средние за период значения функций $\sin \omega t$ и $\sin^2 \omega t$ равны соответственно нулю и $1/2$, получаем:

$$\langle \varepsilon_i \rangle = 0, \quad \langle \varepsilon_i^2 \rangle = \frac{(B_0 S \omega)^2}{2},$$

$$P = \frac{1}{16R} \left[4\varepsilon^2 + \frac{(B_0 S \omega)^2}{2} \right] = \frac{\varepsilon^2}{4R} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{B_0 S \omega}{2\varepsilon} \right)^2 \right] = 31 \text{ мВт}.$$

Ответ:

$$P = \frac{\varepsilon^2}{4R} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{B_0 S \omega}{2\varepsilon} \right)^2 \right] = 31 \text{ мВт}.$$

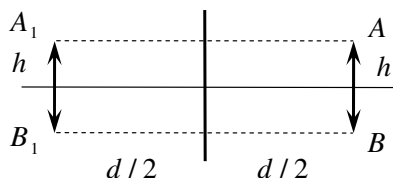
Критерии

1. Правильное выражение для магнитного потока (+1 балл).
2. Правильное выражение для ЭДС индукции (+2 балла).
3. Правильные уравнения для определения токов (+2 балла).
4. Правильный результат для силы тока, текущего через сопротивление R (+1 балл).
5. Правильное выражение для мгновенной тепловой мощности (+1 балл).
6. Правильное усреднение по времени (+2 балла).
7. Правильные буквенный и числовой ответы для средней мощности (+1 балл).

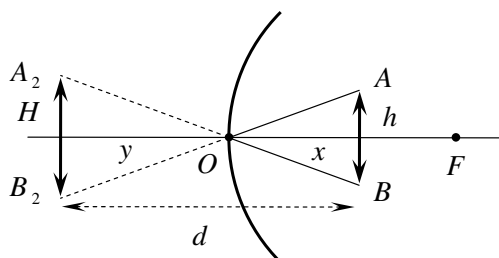
Задача 6. Человек рассматривает изображение своего глаза сначала в плоском зеркале, а затем в вогнутом сферическом зеркале. Во втором случае он видит прямое изображение, увеличенное в $n = 2$ раза по сравнению с отражением в плоском зеркале. Считая, что в обоих случаях глаз аккомодирован на расстояние наилучшего зрения $d = 24$ см, найдите радиус кривизны сферического зеркала R .

Справка. Аккомодация — способность глаза изменять оптическую силу при изменении положения предмета. Расстояние наилучшего зрения — оптимальное расстояние от предмета до глаза, при котором удобнее всего рассматривать детали предмета.

Возможное решение



Пусть A и B — верхняя и нижняя точки глаза, h — его вертикальный размер, отрезок A_1B_1 — мнимое изображение глаза в плоском зеркале. Это изображение играет роль предмета, который рассматривает человек. По условию расстояние между изображением и глазом равно расстоянию наилучшего зрения d , зеркало расположено посередине этого отрезка, высота изображения равна h .



Рассмотрим отражение глаза в вогнутом сферическом зеркале. Точка O , в которой оптическая ось глаза пересекает поверхность зеркала, — полюс зеркала, точка F — фокус. Тот факт, что человек видит прямое изображение глаза, означает, что глаз расположен между полюсом и фокусом. В этом случае изображение глаза A_2B_2 является мнимым. Оно расположено на продолжении лучей, отражённых от зеркала в полюсе O , и играет роль предмета, который рассматривает человек. Поэтому расстояние между изображением и глазом также равно расстоянию наилучшего зрения d . Обозначим высоту изображения через H . Поскольку в обоих случаях изображения расположены на одном и том же расстоянии d от глаза, отношение малых углов зрения, под которыми глаз видит своё отражение, равно отношению высот изображений H и h :

$$n = \frac{H}{h}.$$

Обозначим через x расстояние от глаза до полюса зеркала и через y расстояние от полюса до изображения A_2B_2 . Из подобия равнобедренных треугольников AOB и A_2OB_2 имеем:

$$\frac{y}{x} = \frac{H}{h} = n \quad \longrightarrow \quad y = nx.$$

Учитывая равенство $x + y = d$, получаем:

$$x = \frac{d}{n+1}, \quad y = \frac{nd}{n+1}.$$

Далее воспользуемся формулой зеркала:

$$\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{2}{R}, \quad \frac{n+1}{d} - \frac{n+1}{nd} = \frac{2}{R}, \quad \frac{n+1}{d} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{2}{R},$$

$$R = \frac{2nd}{n^2 - 1} = 32 \text{ см.}$$

Ответ:

$$R = \frac{2nd}{n^2 - 1} = 32 \text{ см.}$$

Критерии

1. Правильно указано положение изображения в плоском зеркале (+1 балл).
2. Правильно указано расстояние d между глазом и изображением в плоском зеркале (+1 балл).
3. Правильно указано положение глаза относительно вогнутого зеркала (между фокусом и полюсом) (+1 балл).
4. Правильно указано положение изображения в вогнутом зеркале (на продолжении лучей, отражённых в полюсе) (+1 балл).
5. Правильно указано расстояние d между глазом и изображением в вогнутом зеркале (+1 балл).
6. Правильно указана связь увеличения n с отношением размеров изображений (+1 балл).
7. Правильно найдены расстояния от глаза до вогнутого зеркала и от зеркала до изображения (+2 балла).
8. Правильно записана формула зеркала (+1 балл).
9. Правильные буквенный и числовой ответы для радиуса вогнутого зеркала (+1 балл).