

**Тренировочный вариант 31  
по МАТЕМАТИКЕ  
Профильный уровень**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ

Ответ: -0,8

10	-	0	,	8																
----	---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

*Желаем успеха!*

**Справочные материалы**

$$\sin 2\alpha = 2\sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

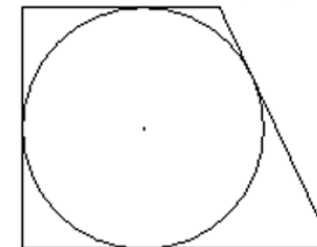
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

*Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений*

- 1 Периметр прямоугольной трапеции, описанной около окружности, равен 24, её большая боковая сторона равна 7. Найдите радиус окружности.

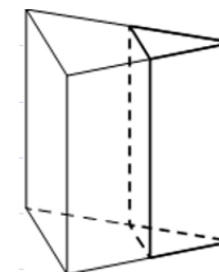


Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2 Даны векторы  $\vec{a}(-3; 5)$  и  $\vec{b}(1; 13)$ . Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3 Площадь боковой поверхности треугольной призмы равна 24. Через среднюю линию основания призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Найдите площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы.



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 В чемпионате по гимнастике участвуют 60 спортсменов: 27 из Японии, 27 из Китая, остальные из Кореи. Порядок, в котором выступают гимнастки, определяется жребием. Найдите вероятность того, что спортсменка, выступающая первой, окажется из Кореи.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 Стрелок стреляет по одному разу в каждую из четырёх мишеней. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в две первые мишени и не попадёт в две последние.

Ответ: \_\_\_\_\_.

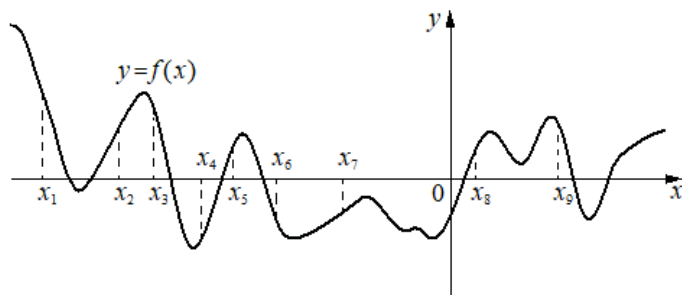
- 6 Решите уравнение  $(3x + 4)^2 = (3x + 8)^2$

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения  $\log_3 5 \cdot \log_5 27$

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график функции  $y = f(x)$ . На оси абсцисс отмечено девять точек:  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9$ . Найдите количество отмеченных точек, в которых производная функции отрицательна.



Ответ: \_\_\_\_\_.

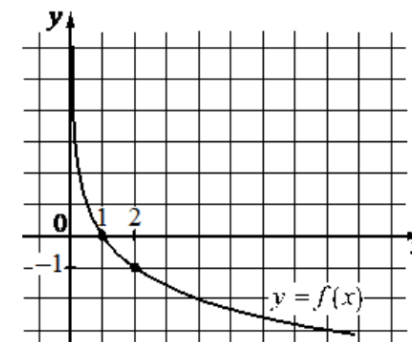
- 9 Водолазный колокол, содержащий  $\nu = 2$  моля воздуха при давлении  $p_1 = 1,75$  атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного давления  $p_2$ . Работа, совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением  $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_1}{p_2}$ , где  $\alpha = 13,3 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  — постоянная,  $T = 300 \text{ К}$  — температура воздуха. Найдите, какое давление  $p_2$  (в атм) будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 15 960 Дж.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Смешали некоторое количество 12-процентного раствора некоторого вещества с таким же количеством 14-процентного раствора этого вещества. Сколько процентов составляет концентрация получившегося раствора?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = \log_a x$ . Найдите значение  $f(8)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите наибольшее значение функции  $y = 101x - 99 \sin x + 63$  на отрезке  $[-\frac{\pi}{2}; 0]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.



Не забудьте перенести все ответы в БЛАНК ОТВЕТОВ № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение  $\frac{\log_2^2(\sin x) + \log_2(\sin x)}{2 \cos x - \sqrt{3}} = 0$ .

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\frac{\pi}{2}; 2\pi]$ .

14

В правильной треугольной призме  $ABCA_1B_1C_1$  точка  $M$  является серединой ребра  $BB_1$ , а точка  $N$  — середина ребра  $A_1C_1$ . Плоскость  $\alpha$ , параллельная прямым  $AM$  и  $B_1N$ , проходит через середину отрезка  $B_1M$ .

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через середину отрезка  $B_1C_1$ .

б) Найдите площадь сечения призмы  $ABCA_1B_1C_1$  плоскостью  $\alpha$ , если все ребра этой призмы равны 4.

15

Решите неравенство

$$\log_{49}(x + 4) + \log_{(x^2+8x+16)}\sqrt{7} \leq -\frac{3}{4}$$

16

15-го января планируется взять кредит в банке на 39 месяцев. Условия его возврата таковы:

— 1-го числа каждого месяца долг возрастёт на  $r\%$  по сравнению с концом предыдущего месяца;

— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же сумму меньше долга на 15-е число предыдущего месяца. Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 20% больше суммы, взятой в кредит. Найдите  $r$ .

17

Одна окружность вписана в прямоугольную трапецию, а вторая касается большей боковой стороны и продолжений оснований.

а) Докажите, что расстояние между центрами окружностей равно большей боковой стороне трапеции.

б) Найдите расстояние от вершины одного из прямых углов трапеции до центра второй окружности, если точка касания первой окружности с большей боковой стороной трапеции делит её на отрезки, равные 2 и 50.

18

Найдите все значения параметра  $a$ , при каждом из которых система

уравнений 
$$\begin{cases} x + y = a, \\ |y| = |x^2 - 2x| \end{cases}$$

имеет ровно два различных решения.

19

В группе поровну юношей и девушек. Юноши отправляли электронные письма девушкам. Каждый юноша отправил или 5 писем, или 16 писем, причём и тех, и других юношей было не менее двух. Возможно, что какой-то юноша отправил какой-то девушке несколько писем.

а) Могло ли оказаться так, что каждая девушка получила ровно 7 писем?

б) Какое наименьшее количество девушек могло быть в группе, если известно, что все они получили писем поровну?

в) Пусть все девушки получили различное количество писем (возможно, какая-то девушка не получила писем вообще). Каково наибольшее возможное количество девушек в такой группе?



Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Номер задания	Правильный ответ
1.	2,5
2.	62
3.	12
4.	0,1
5.	0,0576
6.	-2
7.	3
8.	4
9.	0,4375
10.	13
11.	-3
12.	63
13.	а) $\frac{5\pi}{6} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi n, k, n \in Z$ б) $\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6}$ .
14.	$\frac{7\sqrt{6}}{2}$
15.	$\left(-4; -3\frac{6}{7}\right] \cup \left[-4 + \frac{1}{\sqrt{7}}; -3\right)$
16.	1%
17.	$2\sqrt{986}$
18.	$\left(-\infty; -\frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{9}{4}; +\infty\right)$
19.	а) да; б) 11; в) 31.