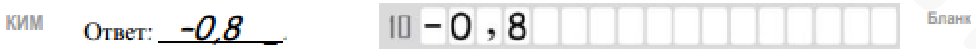
Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант № 541

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.



При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

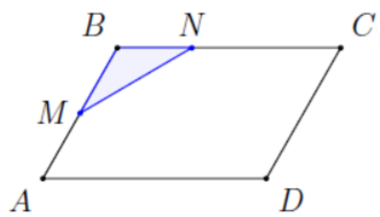
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

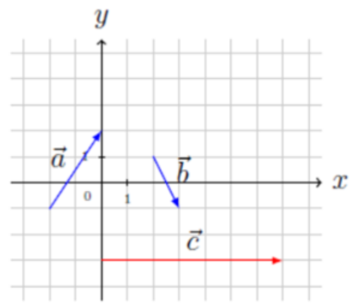
Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. В параллелограмме ABCD точка M — середина стороны AB, а точка N лежит на стороне BC так, что BN : NC = 1 : 2. Площадь треугольника BMN равна 14. Найдите площадь параллелограмма ABCD.



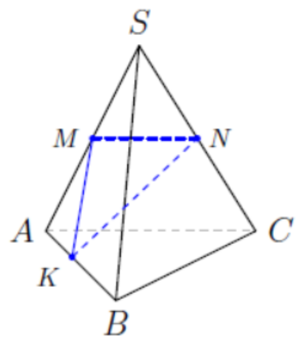
Ответ: ________________________.

2. На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$. Вектор $\vec{c}$ разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\vec{c} = k\cdot\vec{a} + l\cdot\vec{b}$, где k и l — коэффициенты разложения. Найдите значение коэффициента k.



Ответ: ________________________.

3. Объём треугольной пирамиды SABC равен 320. Точка K лежит на ребре AB и делит его в отношении 3 : 5, считая от вершины A. Отрезок MN — средняя линия треугольника SAC, параллельная стороне AC. Найдите объём пирамиды KMNS



Ответ: ________________________.

4. В коробке у программиста Максима лежат капсулы для кофемашины: 16 капсул с эспрессо, 4 с капучино, 5 с латте и 7 с его любимым рафом. Какое наименьшее количество капсул с эспрессо Максиму нужно извлечь из коробки, чтобы после этого вероятность наугад достать капсулу с рафом была больше 0,3?

Ответ: ________________________.

5. Киберспортсмен Данила играет две последовательные игры против своего соперника: первую — за атакующую сторону, вторую — за обороняющуюся. Вероятность того, что Данила выиграет игру, играя за сторону атаки, равна 0,8, а за сторону обороны — 0,3. Найдите вероятность того, что Данила выиграет ровно одну игру.

Ответ: ________________________.

6. Решите уравнение $\log_4\left(\frac{1}{2}-x\right)=\log_4\left(6x+\frac{3}{2}\right)-1$.

Ответ: ________________________.

7. Найдите значение выражения $\frac{10\cos^2 38^0-5}{\cos 173^0\cdot\cos 83^0}$.

Ответ: ________________________.

8. Прямая $y=18x+b$ - касательная к графику функции $y=x^4-14x+9$. Найдите значение коэффициента b.

Ответ: ________________________.

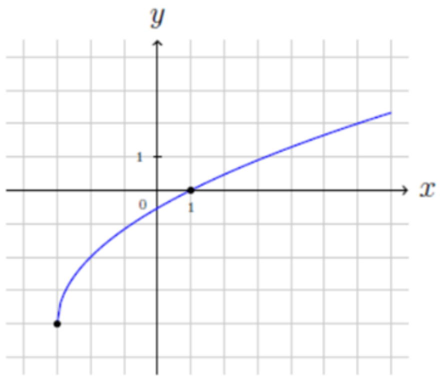
9. Лабораторный прибор регистрирует электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону $U=U_0\sin(\omega t+\varphi)$, где t — время в секундах, амплитуда напряжения $U_0=6$ В, частота $\omega=\frac{4\pi}{3}$, а начальная фаза $\varphi=\frac{\pi}{12}$. Прибор устроен так, что если напряжение U в нём не ниже 3 В, загорается сигнальный светодиод. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы прибора светодиод будет гореть?

Ответ: ________________________.

10. В двух сосудах содержится раствор кислоты различной концентрации. В первом сосуде содержится 200 кг раствора, а во втором — 300 кг. Если смешать весь раствор из этих сосудов, то получится раствор, содержащий 37% кислоты. Если же смешать равные массы растворов из этих сосудов, то полученный раствор будет содержать 35% кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: ________________________.

11. На рисунке изображён график функции $y=a\sqrt{x+b}+c$, где числа a,b и c - целые. Найдите абсциссу точки пересечения графика данной функции с прямой $y=10$.



Ответ: ________________________.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=\log_2(x^3-6x^2-15x+108)$ на отрезке $[-2;6]$.

Ответ: ________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. А) Решите уравнение $\log_2^2(\sin x)+\log_2(\sin^2 x)=\log_2 5\cdot\log_2(\sin x)$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{\pi}{6};2\pi\right]$

14. В цилиндре на окружности нижнего основания отмечены точки M и N, а на окружности верхнего основания отмечены точки M_1 и K_1 так, что прямая MM_1 является образующей, перпендикулярной основаниям, а прямая NK_1 пересекает ось цилиндра.
А) Докажите, что прямые MN и M_1K_1 перпендикулярны.
Б) Найдите расстояние между прямыми NK_1 и MM_1, если известно, что MN = 20, M_1K_1 = 15.

15. Решите неравенство: $5\log_{x-2}(5-x)-1\le\frac{1}{4}\log_{x-2}^2\left(x^2-7x+10\right)^2$.

16. В июле планируется взять кредит в банке на некоторый срок (целое число месяцев). Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на 2% по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на 15-е число предыдущего месяца.
Известно, что 6-я выплата составила 75 тысяч рублей, а 16-я выплата —65 тысяч рублей. Найдите общую сумму выплат (в тысячах рублей) после полного погашения кредита.

17. На боковых сторонах AB и AC равнобедренного треугольника ABC (AB = AC) отложены отрезки BP и AQ соответственно, причём BP = AQ, причем точки P и Q не являются серединами сторон AB и AC.
А) Докажите, что средняя линия треугольника ABC, параллельная его основанию BC, делит отрезок PQ пополам.
Б) Найдите длину отрезка прямой PQ, заключённого внутри вписанной окружности треугольника ABC, если $\angle A=60^0$, BP = 4, а периметр треугольника ABC равен 18.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}\log_2^2 x+\log_2^2 y=8\\ \log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)\cdot\log_2(xy)=2a^2-10\end{cases}$$

имеет ровно четыре различных решения.

19. На столе у уставшего, но вдохновлённого одиннадцатиклассника лежат 60 карточек с супер-лайфхаками для ЕГЭ. Каждая из них либо серого цвета (для быстрого укрощения Части 1), либо лилового (для красивого взлома сложных параметров), причём карточки обоих цветов присутствуют. На каждой карточке написано натуральное число—количество секунд, за которое этот лайфхак всплывает в памяти во время стресса. Все числа на серых карточках различны, а время воспоминания любого лилового лайфхака строго больше, чем любого серого.
Среднее арифметическое чисел на всех 60 карточках равно 20. Если каждое число на лиловых карточках увеличится в 5 раз, то среднее арифметическое всех чисел на карточках станет равно 88.
А) Может ли на столе лежать ровно 8 серых карточек?
Б) Может ли на столе лежать ровно 44 лиловых карточки?
В) Какое наибольшее число лиловых карточек может лежать на столе?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

