Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ
Тренировочный вариант № 540

Профильный уровень
Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведенному ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

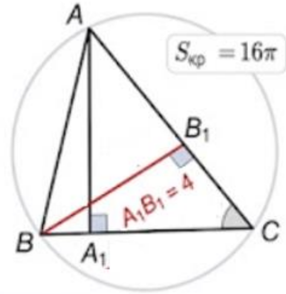
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1-12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительные, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1. В остроугольном треугольнике ABC проведены высоты AA_1 и BB_1. Известно, что $A_1B_1 = 4$, а площадь описанного около треугольника ABC круга равна 16π. Найдите угол ACB в градусах.

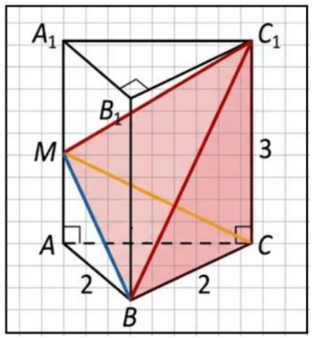


Ответ: ________________________.

2. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, такие что $|\vec{a}| = 2;$ $|\vec{b}| = 5$, а угол между ними равен 120^0. Найдите квадрат длины вектора $\vec{c} = 3\vec{a} - \vec{b}$.

Ответ: ________________________.

3. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, AB = BC = 2. Точка M – середина бокового ребра AA_1, которое равно 3. Найдите объем пирамиды BCC_1M.



Ответ: ________________________.

4. Монету подбрасывают до тех пор, пока «орел» не выпадет два раза подряд. Найдите вероятность того, что опыт закончится ровно на четвертом броске.

Ответ: ________________________.

5. В лабиринте Минотавра 5 дверей. За одной — выход, за остальными — тупики. Герой Тесей открывает двери случайным образом, но если находит тупик, то с вероятностью 0,2 забывает об этом и может проверить эту же дверь снова. Найдите вероятность того, что он найдет выход ровно с третьей попытки.

Ответ: ________________________.

6. Решите уравнение: $x^2+4x-\cos(\pi x)=-5$.

Ответ: ________________________.

7. Найдите значение выражения: $\dfrac{1}{\log_2 100!}+\dfrac{1}{\log_3 100!}+\ldots+\dfrac{1}{\log_{100} 100!}$.

Ответ: ________________________.

8. При каком значении параметра a касательная к графику функции $f(x)=x^3-3x+2$, проведенная в точке с абсциссой $x_0=a$, проходит через точку $M(0;4)$?

Ответ: ________________________.

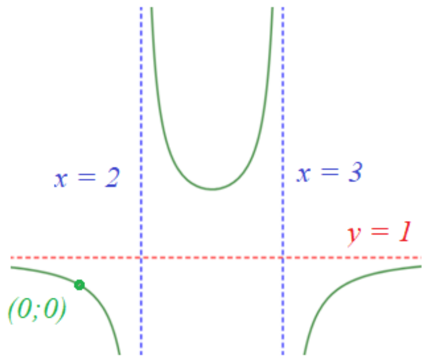
9. Для обогрева помещения, температура в котором поддерживается на уровне $T_p=20^0C$, используется нагреватель мощностью P. Температура воздуха на улице $T_{out}=-20^0C$. Известно, что $P=\alpha\cdot(T_P-T_{out})$, где $\alpha=250\,\dfrac{Bm}{K}$. На сколько процентов нужно увеличить мощность нагревателя, чтобы поддерживать в помещении температуру 24^0C при той же температуре на улице?

Ответ: ________________________.

10. На квалификации перед гонкой пилот решил проверить предельный износ шин и поехал по трассе 4 часа подряд без заездов в боксы. Известно, что каждый час из-за стирания резины он проезжал ровно на 1 круг меньше, чем в предыдущий. Всего за эти 4 часа непрерывной езды болид намотал 98 кругов.
Какое количество кругов пилот проехал за самый первый час квалификации?

Ответ: ________________________.

11. График функции $y=\dfrac{x^2+ax+b}{x^2+cx+d}$ имеет горизонтальную асимптоту $y=1$ и две вертикальные $x=2$ и $x=3$. При этом он проходит через начало координат и не пересекает свою горизонтальную асимптоту. Найдите значение $a+b+c+d$.



Ответ: ________________________.

12. Найдите наименьшее значение функции $y=2^x+2^{2-x}$.

Ответ: ________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13. А) Решите уравнение $\dfrac{\sqrt{2\sin x+\sqrt{2}}\cdot\log_3(-2\cos x)}{\sqrt{-tgx}}=0$

Б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\dfrac{5\pi}{2};-\pi\right]$.

14. Основанием прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ является равнобедренный прямоугольный треугольник ABC, AB = BC = 2. На боковом ребре AA_1, равном 4, выбрана точка M такая, что угол BMC_1 – прямой.

А) Докажите, что тангенс угла между прямыми MC и BC_1 равен $\sqrt{14}$.

Б) Найдите расстояние между прямыми MC и BC_1.

15. Решите неравенство: $\dfrac{\log_{0,5}(|x-2|-1)\cdot\sqrt{x^2-4x+3}}{2^{x-1}-4}\geq 0$.

16. Борис взял в банке кредит на сумму 12 миллионов рублей на 4 года. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг возрастает на $r\%$.
- с февраля по июнь необходимо выплатить часть долга.
- банк применяет гибкую ставку: пока остаток долга (до начисления процентов) превышает половину изначальной суммы, ставка r составляет 20%. Как только остаток долга становится равен или меньше половины изначальной суммы, ставка снижается до 10%.

Известно, что Борис гасил кредит так, что после каждого его платежа долг уменьшался на одну и ту же величину по сравнению с предыдущим годом. Найдите общую сумму выплат Бориса банку за все 4 года.

17. Окружность с центром в точке O, вписанная в равнобедренную трапецию ABCD с основаниями BC < AD, касается боковой стороны CD в точке K. AK пересекает высоту CH трапеции в точке P и проходит через точку O.

А) Докажите, что BC : AD = 1 : 3.

Б) Найдите отношение площади треугольника APQ к площади трапеции ABCD, если Q - точка пересечения диагоналей трапеции ABCD.

18. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\frac{x^3-2(a+1)x^2+a(a+4)x-2a^2}{\sqrt{a-(x-2)^2}}=0$$

имеет ровно один корень.

19. Назовём натуральное число $N>6$ «центром», если числа $N-1$ и $N+1$ - простые.

А) Может ли сумма пяти различных «центров» оканчиваться на цифру 7?

Б) Существует ли такая возрастающая последовательность из четырёх «центров», которая образует арифметическую прогрессию?

В) Известно, что среднее арифметическое k различных «центров» равно 54. Какое наибольшее значение может принимать k?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.