

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 251

1. Известно, что  $x : y = 9 : 7$ . Найдите  $\frac{x+y}{x-y}$ .

2. Дана последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  действительных чисел, удовлетворяющих при каждом натуральном  $n$  равенству

$$a_{n+1} = \frac{5 - a_n}{4}.$$

Пусть  $S_n$  обозначает сумму первых  $n$  членов этой последовательности:  $S_n = a_1 + \dots + a_n$ . Найдите наименьшее значение  $n$ , при котором выполняется неравенство

$$|S_n - n - 8| < \frac{1}{1000},$$

если известно, что  $a_1 = 11$ .

3. Решите неравенство

$$1 + \sqrt{\log_9(3x^2 + 8x + 6)} > \log_3(3x^2 + 8x + 6).$$

4. Решите уравнение  $\sin 2x + 3 \cos x = \sqrt{3}(1 + \cos 2x + \sin x)$ .

5. В треугольнике  $ABC$  проведена медиана  $AD$ . Известно, что  $AD : BC = \sqrt{3} : 2$  и что  $\angle BAC = 45^\circ$ . Найдите угол  $\angle BMC$ , где  $M$  — точка пересечения медиан.

6. Положительные действительные числа  $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$  удовлетворяют равенству

$$a_1 + a_2 + a_3 = b_1 + b_2 + b_3 = 3.$$

Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{a_1^2}{a_1 + b_1} + \frac{a_2^2}{a_2 + b_2} + \frac{a_3^2}{a_3 + b_3}.$$

7. Дан тетраэдр  $ABCD$ . Рёбра  $AC$  и  $BD$  перпендикулярны прямой, проходящей через их середины. Найдите все возможные значения  $AB + BC$ , если известно, что  $AD + DC = 1$ .

Московский Государственный Университет имени М. В. Ломоносова

Дополнительное вступительное испытание по математике

ВАРИАНТ 254

1. Найдите в явном виде целое число, задающееся выражением  $\left(\frac{1}{24} + \frac{1}{15} - \frac{1}{10}\right)^{-1}$ .
2. Строго возрастающая последовательность  $a_1, a_2, a_3, \dots$  натуральных чисел удовлетворяет при каждом натуральном  $n$  соотношению

$$a_{n+2} \leq \sqrt{a_n^2 + 2a_n + 2a_{n+1} + 2}.$$

Найдите все возможные значения  $a_{25}$ , если известно, что  $a_1 = 1$ .

3. Решите неравенство

$$(2 - 2x) \cdot \log_{2 \cdot 3^x - 5} \sqrt{3} \leq 1.$$

4. Решите уравнение  $\sin 3x(\cos x - \cos 2x) - \cos 3x(\sin x - \sin 2x) = 6 \cos x - 3$ .
5. Внутри окружности  $\Omega$  радиуса 5 отмечена точка  $E$ , через которую проведены хорды  $AB$  и  $CD$ , перпендикулярные друг другу. Найдите все возможные значения расстояния от вершины  $F$  прямоугольника  $AECF$  до центра  $O$  окружности  $\Omega$ , если известно, что  $OE = 1$ .
6. Положительные действительные числа  $a, b, c$  удовлетворяют равенству  $a + b + c = 1$ . Найдите наименьшее возможное значение выражения

$$\frac{\sqrt{(1-a)(1-b)} + \sqrt{(1-b)(1-c)} + \sqrt{(1-c)(1-a)}}{1 + \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca}}.$$

7. Дан куб с основаниями  $ABCD, A'B'C'D'$  и боковыми рёбрами  $AA', BB', CC', DD'$ . Длина ребра этого куба равна 1. На диагонали  $AC$  основания  $ABCD$  отмечена точка  $E$  так, что  $AE = \frac{\sqrt{2} - 1}{2}$ . Найдите площадь сечения данного куба, проходящего через его центр  $O$  и перпендикулярного прямой  $OE$ .