Решения авторского варианта «Школково» №10

Задание №1

Ответ: 4,8

Задание №2

Ответ: 3

Задание №3

Ответ: 60

Задание №4

Ответ: 0,2

Задание №5

Ответ: 0,28

Задание №6

Ответ: 4

Задание №7

Ответ: 1

Задание №8

Ответ: -1

Задание №9

Ответ: 20

Задание №10

Ответ: 16

Задание №11

Ответ: 3

Задание №12

Ответ: 3

Задание №13

Ответ: а) $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2};\ \frac{\pi}{3}+\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{2\pi}{3};\ \frac{3\pi}{4};\ \frac{5\pi}{4};\ \frac{4\pi}{3}$.

Задание №14

Ответ: б) $1:1$

Задание №15

Ответ: $(0;0{,}5)\cup(2;+\infty)$

Задание №16

Ответ: 525 тыс. рублей

Задание №17

Ответ: б) 157

Задание №18

Ответ: $a\in\left(-\infty;-\frac{4}{3}\right)\cup\left(-\frac{3}{4};0\right)$

Задание №19

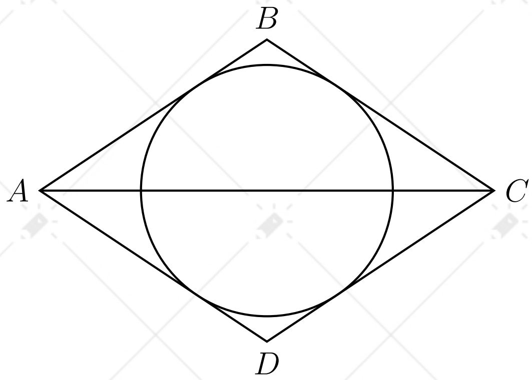
Ответ: а) Да, могло

б) Нет, не могло

в) 2

Задание №1

Диагональ AC ромба $ABCD$ равна 16, а $\operatorname{tg}\angle BCA = 0{,}75$. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

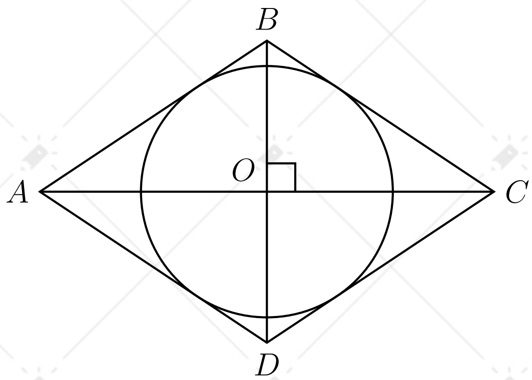


Ответ

4,8

Решение

Проведем диагональ BD. Пусть диагонали пересекаются в точке O. Известно, что диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам, значит, $\triangle BCO$ — прямоугольный и $AO = OC = 8$.



Рассмотрим $\triangle BCO$. По определению тангенса:

$$\operatorname{tg}\angle BCA = \frac{BO}{CO}$$

$$0{,}75 = \frac{BO}{8}$$

$$BO = 6$$

Следовательно, $BD = 12$.

По теореме Пифагора:

$$BC^2 = BO^2 + OC^2$$

$$BC^2 = 6^2 + 8^2 = 100$$

$$BC = 10$$

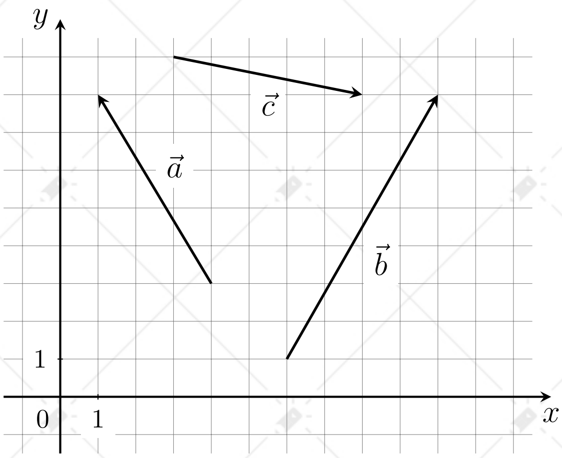
Заметим, что радиус окружности, вписанной в ромб, равен половине высоты ромба. Пусть h — высота ромба. Запишем площадь ромба двумя способами:

$$\frac{1}{2} \cdot AC \cdot BD = BC \cdot h$$
$$\frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 12 = 10 \cdot h$$
$$h = 9{,}6$$

Таким образом, $r = \dfrac{h}{2} = 4{,}8$.

Задание №2

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$.



Ответ

3

Решение

Найдем координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Так как каждая координата вектора равна разности соответствующих координат конца и начала вектора, то

$$\vec{a} = \{1 - 4; 8 - 3\} = \{-3; 5\};$$
$$\vec{b} = \{10 - 6; 8 - 1\} = \{4; 7\};$$
$$\vec{c} = \{8 - 3; 8 - 9\} = \{5; -1\}.$$

Вычислим координаты вектора $\left(\vec{b} + \vec{c}\right)$:

$$\vec{b} + \vec{c} = \{4 + 5; 7 + (-1)\} = \{9; 6\}.$$

Скалярное произведение векторов $\vec{a}\,(x_1; y_1)$ и $\vec{b}+\vec{c}\,(x_2; y_2)$ равно

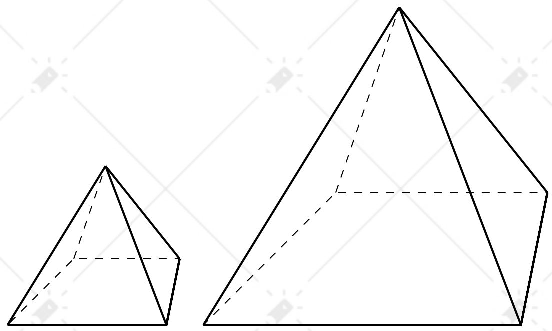
$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = x_1x_2 + y_1y_2.$$

Следовательно,

$$\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right) = (-3)\cdot 9 + 5\cdot 6 = -27 + 30 = 3.$$

Задание №3

Объем первой пирамиды равен 3, причем известно, что площадь её основания в 4 раза меньше, чем площадь основания второй пирамиды. Высота второй пирамиды в 5 раз больше, чем высота первой. Найдите объем второй пирамиды.



Ответ

60

Решение

Объем пирамиды с высотой H и площадью основания S ищется по формуле

$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Тогда объем первой пирамиды относится к объему второй пирамиды как

$$\frac{V_2}{3} = \frac{\frac{1}{3}S_2H_2}{\frac{1}{3}S_1H_1} = \frac{S_2}{S_1}\cdot\frac{H_2}{H_1}.$$

Из условия следует, что $S_2 = 4S_1$, $H_2 = 5H_1$, следовательно,

$$\frac{V_2}{3} = \frac{S_2}{S_1}\cdot\frac{H_2}{H_1} = \frac{4S_1}{S_1}\cdot\frac{5H_1}{H_1} = 20.$$

Значит,

$$V_2 = 20\cdot 3 = 60.$$

Задание №4

На олимпиаде по биологии 250 участников разместили в трёх аудиториях. В первой аудитории оказалось 50 человек, во второй – на 100 человек больше, чем в первой, а остальных перевели в запасную аудиторию в другом корпусе. Найдите вероятность того, что случайно выбранный участник писал олимпиаду в запасной аудитории.

Ответ

0,2

Решение

Вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов.

Благоприятные исходы – те, в которых участник окажется в запасной аудитории. Число таких исходов равно количеству участников в запасной аудитории. Сначала найдём, сколько человек во второй аудитории:

$$50 + 100 = 150.$$

Тогда в запасной аудитории:

$$250 - 50 - 150 = 50.$$

Число всех исходов равно общему количеству участников, то есть 250.

Таким образом, искомая вероятность равна:

$$p = \frac{50}{250} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Задание №5

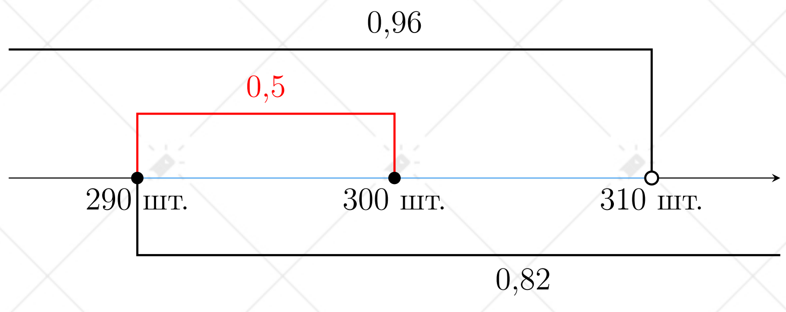
При фасовке конфет производится контрольный подсчёт количества конфет в упаковке. Известно, что вероятность того, что количество окажется меньше 310 шт., равна 0,96. Вероятность того, что количество окажется не меньше 290 шт., равна 0,82. Вероятность того, что количество находится в пределах от 290 до 300 шт. включительно, равна 0,5. Найдите вероятность того, что количество конфет в упаковке больше 300 шт., но меньше 310 шт.

Ответ

0,28

Решение

Отметим известные вероятности на числовой прямой:



Так как $P(\geqslant 290) = 0{,}82$, то $P(< 290) = 0{,}18$. Тогда искомая вероятность равна

$$P(300 < x < 310) = P(x < 310) - P(x \leqslant 300) =$$
$$= P(x < 310) - P(290 \leqslant x \leqslant 300) - P(< 290) =$$
$$= 0{,}96 - 0{,}5 - 0{,}18 = 0{,}28.$$

Задание №6

Найдите корень уравнения $\log_5 \sqrt{x+1} = \dfrac{1}{2}$.

Ответ

4

Решение

По определению логарифма:

$$\log_a b = c \ \Leftrightarrow \ a^c = b.$$

Тогда

$$5^{1/2} = \sqrt{x+1}$$
$$\sqrt{5} = \sqrt{x+1}.$$

Возведём обе части в квадрат:

$$5 = x + 1$$
$$x = 4.$$

Задание №7

Найдите значение выражения $\dfrac{4(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2}{\log_2 64}$.

Ответ

1

Решение

Раскроем скобки, используя основное тригонометрическое тождество и формулу синуса двойного угла:

$$(\sin 15^\circ + \cos 15^\circ)^2 = \sin^2 15^\circ + \cos^2 15^\circ + 2\sin 15^\circ \cos 15^\circ =$$
$$= 1 + \sin 30^\circ = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}.$$

Тогда числитель равен

$$4 \cdot \frac{3}{2} = 6.$$

Знаменатель равен

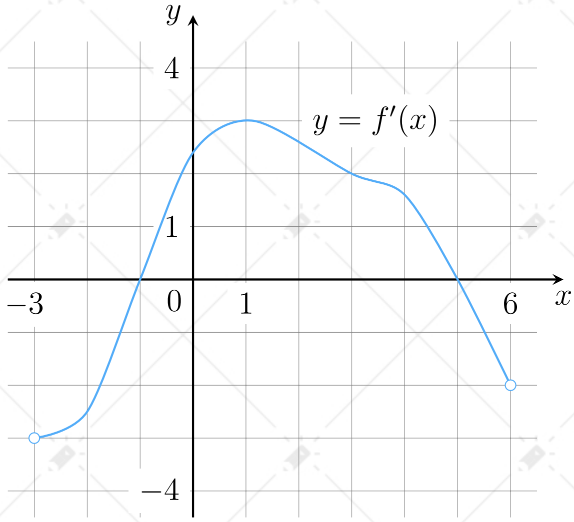
$$\log_2 64 = \log_2 2^6 = 6.$$

Таким образом, искомое выражение равно

$$\frac{6}{6} = 1.$$

Задание №8

На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определенной на интервале $(-3; 6)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



Ответ

-1

Решение

Рассмотрим производную функции на интервале $(-3; 5)$. На интервале $(-3; -1)$ производная принимает только отрицательные значения, на интервале $(-1; 5)$ — только положительные значения. Значит, в точке $x = -1$ производная меняет знак с минуса на плюс, то есть точка $x = -1$ — точка минимума.

Рассмотрим производную функции на интервале $(-1; 6)$. На интервале $(-1; 5)$ производная принимает только положительные значения, на интервале $(5; 6)$ — только отрицательные. Значит, в точке $x = 5$ производная меняет знак с плюса на минус, то есть $x = 5$ — точка максимума.

Так как требуется найти точку минимума, то ответ -1.

Задание №9

Тело брошено горизонтально с некоторой высоты. Дальность полёта S (в метрах) вычисляется по формуле $S = v\sqrt{\dfrac{2h}{g}}$, где v – начальная скорость (в м/с), h – высота (в м), $g = 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. Найдите высоту, с которой брошено тело, если дальность полёта равна 30 м, а начальная скорость 15 м/с. Ответ дайте в метрах.

Ответ

20

Решение

Подставим известные значения в формулу:

$$30 = 15\sqrt{\frac{2h}{10}}$$

Упростим:

$$30 = 15\sqrt{\frac{h}{5}}$$

Разделим обе части на 15:

$$2 = \sqrt{\frac{h}{5}}$$

Возведём в квадрат:

$$4 = \frac{h}{5}$$

$$h = 20$$

Таким образом, начальная высота равна 20 м.

Задание №10

Три фитиля имеют одинаковую длину, но разную толщину. Сначала подожгли первый фитиль, а через 1 секунду – остальные. Через некоторое время первый и третий фитили оказались одной длины. Через две секунды после этого одинаковую длину стали иметь первый и второй фитили. Через сколько секунд после поджигания догорит первый фитиль, если известно, что второй и третий сгорают за 12 секунд и 8 секунд соответственно? Скорость горения всех фитилей постоянная.

Ответ

16

Решение

Обозначим длину каждого фитиля через L. Пусть T – время сгорания первого фитиля (искомое). Тогда скорости горения:

$$v_1 = \frac{L}{T}, \quad v_2 = \frac{L}{12}, \quad v_3 = \frac{L}{8}.$$

Первый фитиль подожгли в момент $t = 0$, второй и третий – в момент $t = 1$.

Пусть в момент t_1 $(t_1 \geqslant 1)$ длины первого и третьего фитилей сравнялись:

$$L - v_1 t_1 = L - v_3(t_1 - 1)$$

$$v_1 t_1 = v_3(t_1 - 1).$$

Подставляя выражения для скоростей, получаем:

$$\frac{L}{T} t_1 = \frac{L}{8}(t_1 - 1)$$

$$\frac{t_1}{T} = \frac{t_1 - 1}{8}$$

$$T = \frac{8t_1}{t_1 - 1}$$

Через две секунды, в момент $t_1 + 2$, сравнялись первый и второй:

$$L - v_1(t_1 + 2) = L - v_2(t_1 + 1)$$

$$v_1(t_1 + 2) = v_2(t_1 + 1).$$

Отсюда получаем:

$$\frac{L}{T}(t_1 + 2) = \frac{L}{12}(t_1 + 1)$$

$$\frac{t_1 + 2}{T} = \frac{t_1 + 1}{12}$$

$$T = \frac{12\,(t_1 + 2)}{t_1 + 1}$$

Приравниваем уравнения для нахождneия T:

$$\frac{8t_1}{t_1 - 1} = \frac{12(t_1 + 2)}{t_1 + 1}.$$

Умножаем крест-накрест:

$$8t_1(t_1 + 1) = 12(t_1 + 2)(t_1 - 1).$$

Раскрываем скобки:

$$8t_1^2 + 8t_1 = 12(t_1^2 + t_1 - 2) = 12t_1^2 + 12t_1 - 24.$$

Переносим всё в одну сторону:

$$0 = 12t_1^2 + 12t_1 - 24 - 8t_1^2 - 8t_1 = 4t_1^2 + 4t_1 - 24.$$

Поделим обе части уравнения на 4:

$$t_1^2 + t_1 - 6 = 0.$$

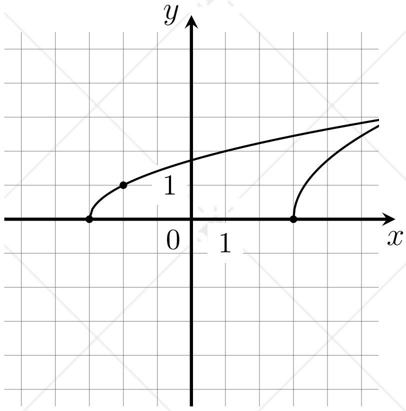
Находим корни: $t_1 = -3$ (не подходит) и $t_1 = 2$ с. Тогда

$$T = \frac{8 \cdot 2}{2 - 1} = 16 \text{ с}.$$

Таким образом, первый фитиль догорит через 16 секунд после поджигания.

Задание №11

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \sqrt{3x-a}$ и $g(x) = \sqrt{x-b}$, которые пересекаются в точке $A\,(x_0; y_0)$. Найдите y_0.



Ответ

3

Решение

Заметим, что график функции $g(x)$ отличается от графика функции $y = \sqrt{x}$ лишь сдвигом по горизонтали на $|b|$ клеток. График функции $y = \sqrt{x}$ проходит через точки $(0; 0)$ и $(1; 1)$, значит, если бы графику функции $g(x)$ соответствовал график справа, то он должен был бы проходить через точки $(3; 0)$ и $(4; 1)$, но это не так. Если бы графику функции $g(x)$ соответствовал график слева, то он должен был бы проходить через точки $(-3; 0)$ и $(-2; 1)$. Так и есть. Значит, левый график – график функции $g(x)$.

Поскольку вершина данного графика – это точка $(-3; 0)$, то $b = -3$.

Таким образом,

$$g(x) = \sqrt{x+3}.$$

Тогда функции $f(x)$ соответствует график справа, проходящий через точку $(3; 0)$. Тогда получаем уравнение

$$0 = \sqrt{3 \cdot 3 - a}$$

$$a = 9$$

Таким образом, $f(x) = \sqrt{3x-9}$.

Чтобы найти координаты точки A, необходимо решить уравнение $f(x_0) = g(x_0):$

$$\sqrt{3x_0 - 9} = \sqrt{x_0 + 3}$$

$$3x_0 - 9 = x_0 + 3$$

$$2x_0 = 12$$

$$x_0 = 6$$

Тогда

$$y_0 = \sqrt{x_0 + 3} = \sqrt{6+3} = 3.$$

Задание №12

Найдите наибольшее значение функции $y = x^3 - 4x^2 + 4x$ на отрезке $[0; 3]$.

Ответ

3

Решение

Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

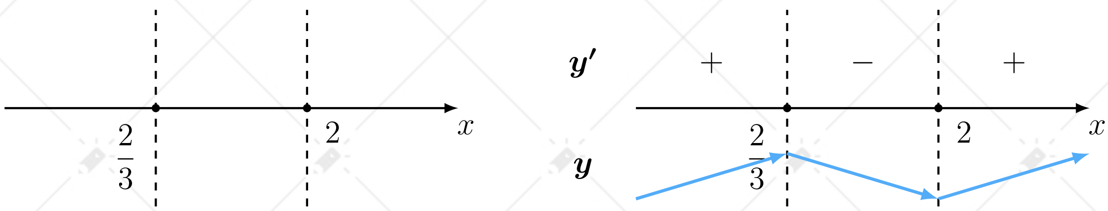
$$y' = 3x^2 - 8x + 4$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0 \;\Rightarrow\; 3x^2 - 8x + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{8 \pm \sqrt{64 - 48}}{6} = \frac{8 \pm 4}{6}$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_2 = 2$$

Нули производной разбивают область определения на промежутки. На отрезок $[0; 3]$ попадают обе точки $x = \dfrac{2}{3}$ и $x = 2$.



При $x \in \left[0; \dfrac{2}{3}\right)$ производная положительна, функция возрастает; при $x \in \left(\dfrac{2}{3}; 2\right)$ производная отрицательна, функция убывает; при $x \in (2; 3]$ производная положительна, функция возрастает. Следовательно, $x = \dfrac{2}{3}$ – точка локального максимума, $x = 2$ – точка локального минимума. Тогда наибольшее значение на отрезке $[0; 3]$ может достигаться в точке локального максимума или в точке $x = 3$. Вычислим эти значения:

$$y\left(\frac{2}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 - 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{27} < 2$$

$$y(3) = 27 - 36 + 12 = 3.$$

Таким образом, наибольшее значение достигается в точке $x = 3$ и равно 3.

Задание №13

а) Решите уравнение $5^{2\sin^2 x+\frac{1}{2}}+5^{2+\cos 2x}=25+5\sqrt{5}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{\pi}{2};\dfrac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi k}{2};\ \dfrac{\pi}{3}+\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\dfrac{2\pi}{3};\ \dfrac{3\pi}{4};\ \dfrac{5\pi}{4};\ \dfrac{4\pi}{3}$.

Решение

а) Воспользуемся формулой косинуса двойного угла и основным тригонометрическим тождеством:

$$5^{2\sin^2 x+\frac{1}{2}}+5^{2+2\cos^2 x-1}=5^2+5\sqrt{5}$$

$$\sqrt{5}\cdot 5^{2\sin^2 x}+5^{1+2\cos^2 x}=5^{2\cos^2 x+2\sin^2 x}+5\sqrt{5}$$

$$\left(\sqrt{5}\cdot 5^{2\sin^2 x}-5\sqrt{5}\right)-\left(5^{2\cos^2 x+2\sin^2 x}-5^{1+2\cos^2 x}\right)=0$$

$$\sqrt{5}\cdot\left(5^{2\sin^2 x}-5\right)-5^{2\cos^2 x}\left(5^{2\sin^2 x}-5\right)=0$$

$$\left(5^{2\sin^2 x}-5\right)\cdot\left(5^{2\cos^2 x}-\sqrt{5}\right)=0$$

Тогда получаем

$$\left[\begin{aligned}&5^{2\sin^2 x}=5\\&5^{2\cos^2 x}=\sqrt{5}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&2\sin^2 x=1\\&2\cos^2 x=\frac{1}{2}\end{aligned}\right.$$

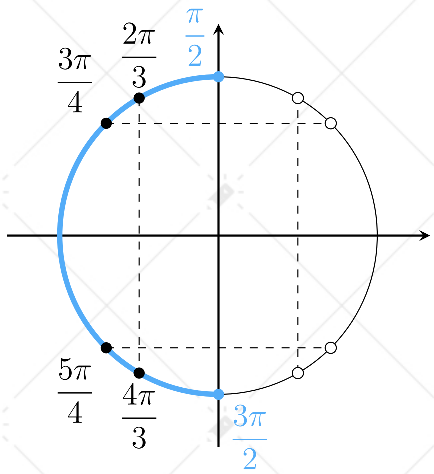
$$\left[\begin{aligned}&\sin^2 x=\frac{1}{2}\\&\cos^2 x=\frac{1}{4}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\sin x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\\&\cos x=\pm\frac{1}{2}\end{aligned}\right.$$

Объединяя решения данных уравнений, получаем

$$\left[\begin{aligned}&x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}\\&x=\frac{\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\\&x=\frac{2\pi}{3}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ лежат точки $\frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}; \frac{4\pi}{3}$.

Задание №14

В основании треугольной пирамиды $SABC$ лежит равнобедренный треугольник ABC с основанием AB. В гранях SAC и SBC проведены биссектрисы CE и CF соответственно.

а) Докажите, что $EF \parallel (ABC)$.

б) Найдите отношение, в котором плоскость CEF делит высоту пирамиды, если известно, что $CA = CB = 10$, $SC = 7$, $AB = 10\sqrt{3}$, $SA = SB = \sqrt{114}$.

Ответ

б) $1 : 1$

Решение

а) По свойству биссектрисы для $\triangle SBC$ имеем:

$$\frac{SF}{FB} = \frac{SC}{CB}$$

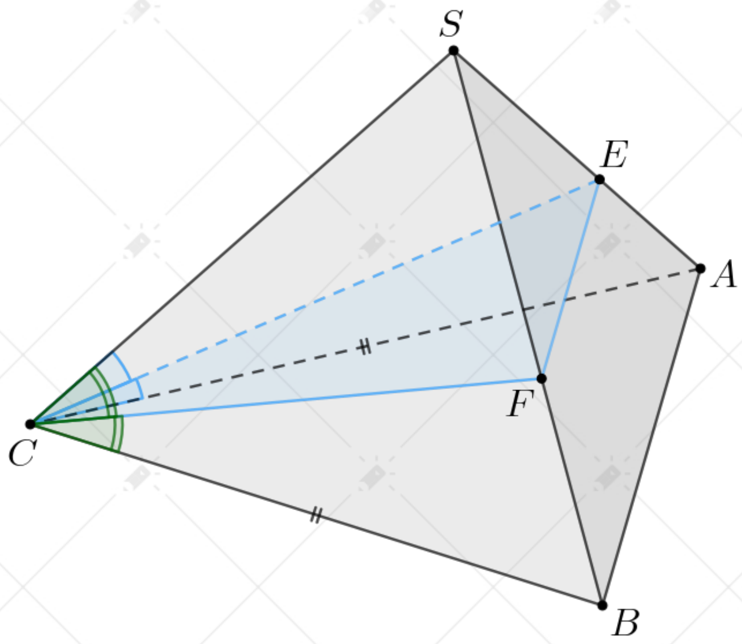
По свойству биссектрисы для $\triangle SAC$ имеем:

$$\frac{SE}{EA} = \frac{SC}{CA}$$

Но по условию $CA = CB$. Тогда

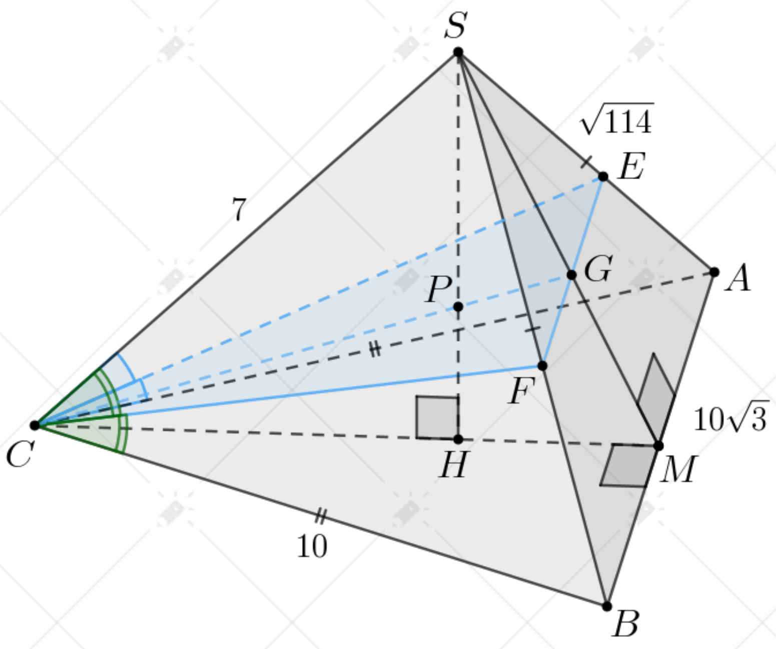
$$\frac{SF}{FB} = \frac{SC}{CB} = \frac{SC}{CA} = \frac{SE}{EA}$$

Откуда по обратной теореме о пропорциональных отрезках получаем $EF \parallel AB$. Следовательно, $EF \parallel (ABC)$.



б) Пусть M — середина AB. Так как $CA = CB$ и $SA = SB$, то CM и SM — высоты треугольников ABC и SAB соответственно как медианы равнобедренных треугольников. Тогда $AB \perp CM$, $AB \perp SM$, следовательно, $AB \perp (SCM)$. Отсюда $(SCM) \perp (ABC)$, значит, (SCM) содержит высоту SH пирамиды $SABC$.

Пусть EF пересекает SM в точке G. Так как CG лежит в плоскости SCM, то CG пересекается с SH. Пусть P — точка их пересечения. Так как CG лежит в плоскости CEF, то P — точка пересечения высоты SH с плоскостью CEF. То есть по условию необходимо найти отношение $SP : PH$.



Так как $EF \parallel AB$, то $\triangle SEF \sim \triangle SAB$. Тогда

$$\frac{SG}{GM} = \frac{SF}{FB} = \frac{SC}{CB} = \frac{7}{10}$$

Так как M — середина AB, то $AM = MB = 5\sqrt{3}$.
По теореме Пифагора для $\triangle ACM$:

$$CM^2 = AC^2 - AM^2$$
$$CM^2 = 100 - 75 = 25$$
$$CM = 5$$

По теореме Пифагора для $\triangle SAM$:

$$SM^2 = SA^2 - AM^2$$
$$CM^2 = 114 - 75 = 39$$
$$CM = \sqrt{39}$$

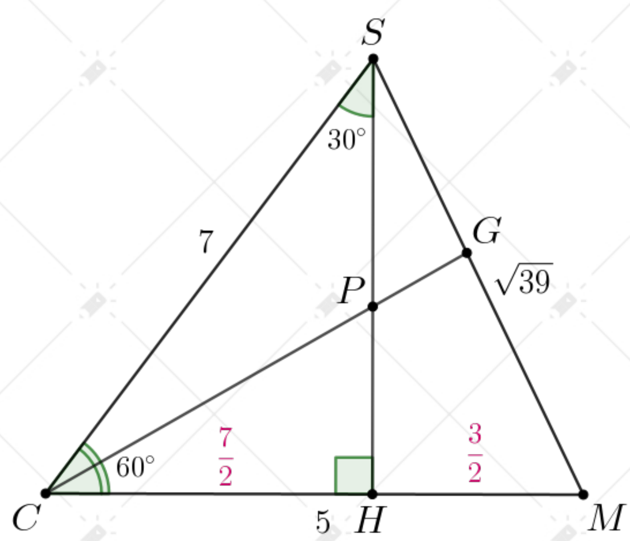
Сделаем выносной чертеж треугольника SMC.
По теореме косинусов для данного треугольника:

$$SM^2 = SC^2 + CM^2 - 2 \cdot SC \cdot CM \cdot \cos\angle SCM$$

$$39 = 49 + 25 - 70 \cdot \cos\angle SCM$$

$$\cos\angle SCM = \frac{1}{2}$$

$$\angle SCM = 60^\circ \quad \Rightarrow \quad \angle CSH = 30^\circ$$



Следовательно, $CH = \frac{1}{2}CS = \frac{7}{2}$, так как катет, лежащий напротив угла в 30°, равен половине гипотенузы. Тогда $HM = CM - CH = \frac{3}{2}$.

По теореме Менелая для $\triangle SHM$ и секущей CG :

$$\frac{SP}{PH}\cdot\frac{HC}{CM}\cdot\frac{MG}{GS}=1$$

$$\frac{SP}{PH}\cdot\frac{\frac{7}{2}}{5}\cdot\frac{10}{7}=1$$

$$\frac{SP}{PH}=1$$

Получили, что $SP:PH=1:1$.

Задание №15

Решите неравенство

$$2^{\log^2_{0,5}x}+x^{\log_{0,5}x}>2{,}5.$$

Ответ

$(0;0{,}5)\cup(2;+\infty)$

Решение

Преобразуем первое слагаемое:

$$2^{\log^2_{0,5}x}=\left(2^{\log_{0,5}x}\right)^{\log_{0,5}x}=\left(2^{-\log_2 x}\right)^{\log_{0,5}x}=\left(\frac{1}{x}\right)^{\log_{0,5}x}=\frac{1}{x^{\log_{0,5}x}}$$

Тогда неравенство примет вид

$$\frac{1}{x^{\log_{0,5}x}}+x^{\log_{0,5}x}>2{,}5.$$

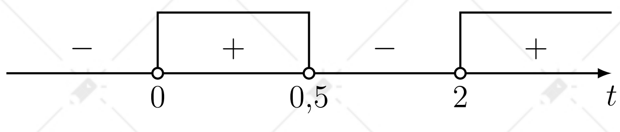
Пусть $t=x^{\log_{0,5}x}$. Тогда

$$\frac{1}{t}+t>2{,}5$$

$$\frac{1+t^2-2{,}5t}{t}>0$$

$$\frac{(t-2)(t-0{,}5)}{t}>0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Таким образом,

$$\left[\begin{array}{l}0<t<0{,}5\\ t>2\end{array}\right.$$

Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{array}{l}0<x^{\log_{0,5}x}<0{,}5\\ x^{\log_{0,5}x}>2\end{array}\right.$$

Решим первое неравенство совокупности. Заметим, что по ограничению логарифма $x > 0$, поэтому автоматически выполняется $0 < x^{\log_{0,5} x}$.
Тогда решим вторую часть неравенства:

$$x^{\log_{0,5} x} < 0{,}5$$

$$\log_{0,5} x^{\log_{0,5} x} > \log_{0,5} 0{,}5$$

По свойству логарифма имеем:

$$\log_{0,5} x^{\log_{0,5} x} = \log_{0,5} x \cdot \log_{0,5} x = \log^2_{0,5} x.$$

Таким образом,

$$\log_{0,5} x^{\log_{0,5} x} > \log_{0,5} 0{,}5$$

$$\log^2_{0,5} x > 1$$

$$\left(\log_{0,5} x - 1\right)\left(\log_{0,5} x + 1\right) > 0$$

Из этого следует, что

$$\left[\begin{array}{l}\log_{0,5} x > 1\\ \log_{0,5} x < -1\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l}x < 0{,}5\\ x > 2\end{array}\right.$$

Решим второе неравенство. Аналогично первому

$$x^{\log_{0,5} x} > 2$$

$$\log_{0,5} x^{\log_{0,5} x} < \log_{0,5} 2$$

$$\log^2_{0,5} x < -1$$

Заметим, что $\log^2_{0,5} x \geqslant 0$, поэтому неравенство не имеет решений.
Пересекая решения первого неравенства совокупности с ограничениями, получаем

$$x \in (0; 0{,}5) \cup (2; +\infty)$$

Задание №16

Егор взял в банке кредит 7 млн рублей на 20 лет. Согласно условиям договора, банк ежегодно начисляет проценты по следующей схеме. В каждый нечетный год с номером n банк добавляет к текущему остатку долга $(0{,}5n)\%$ от взятой в кредит суммы, то есть в первый год банк добавляет $0{,}5\%$ от взятой в кредит суммы, в третий год — $1{,}5\%$ от взятой суммы, в пятый год — $2{,}5\%$ от взятой суммы и так далее до 19-го года. В каждый четный год проценты не добавляются. Клиент же должен ежегодно вносить платежи равными суммами. Сколько рублей Егор должен ежегодно возвращать банку, чтобы последним платежом полностью рассчитаться с банком?

Ответ

525 тыс. рублей

Решение

Заметим, что общая сумма, которую нужно выплатить в конце года, никак не зависит от выплат Егора. Обозначим $S = 7$ млн рублей, тогда в первый год проценты составят $0{,}005S$, в третий — $0{,}015S$ и так далее. Тогда общая сумма выплат составит

$$\begin{gathered} S + S\cdot(0{,}005 + 0{,}015 + \ldots + 0{,}095) = \\ = S + S\cdot\frac{0{,}5}{100}(1 + 3 + \ldots + 19) = \\ = S + \frac{S}{200}\cdot\frac{1+19}{2}\cdot 10 = \\ = S + \frac{S}{200}\cdot 100 = 1{,}5S \end{gathered}$$

Чтобы выплаты были равными, каждый год нужно выплачивать ровно $\frac{1}{20}$ часть этой суммы. Тогда ежегодный платеж в рублях равен

$$\frac{1{,}5S}{20} = \frac{1{,}5\cdot 7000000}{20} = 525000.$$

Задание №17

На сторонах AB, CD и AD квадрата $ABCD$ взяты точки E, F и G соответственно, причем F — середина CD, $AE : EB = 1 : 2$, $AG : GD = 6 : 5$. На отрезках AE и CF вне квадрата $ABCD$ построены квадраты AA_1E_1E и CC_1F_1F.

а) Докажите, что A_1C_1 и BG перпендикулярны.

б) Пусть A_1C_1 пересекает AB и CD в точках M и N соответственно. Найдите площадь четырехугольника $MBNG$, если известно, что площадь квадрата $ABCD$ равна 242.

Ответ

б) 157

Решение

а) Продлим A_1E_1 и BC до пересечения в точке P. Так как $A_1P \parallel AB$, $PB \parallel A_1A$ и $A_1A \perp AB$, то $A_1P \perp PB$.

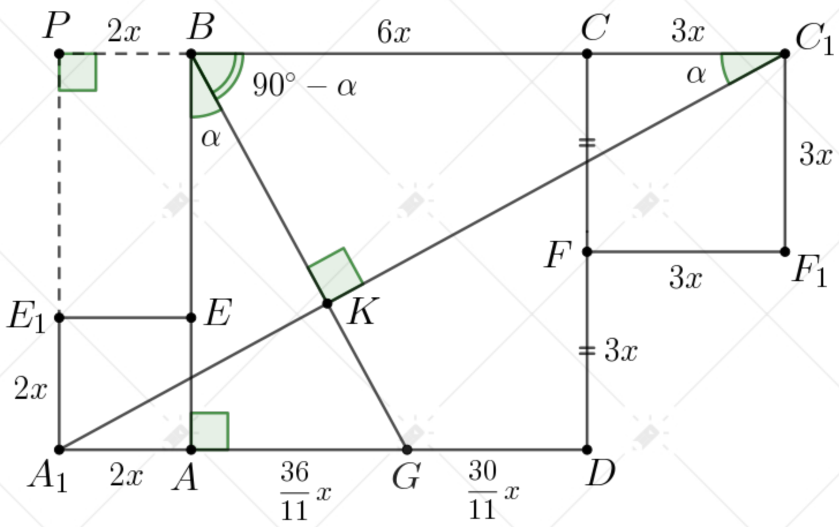
Пусть сторона квадрата $ABCD$ равна $6x$. Тогда сторона квадрата AA_1E_1E равна $2x$, сторона квадрата FF_1C_1C равна $3x$.

Так как $AG : GD = 6 : 5$, то $AG = \frac{6}{11} \cdot 6x = \frac{36}{11}x$.

Заметим, что $\triangle BAG \sim \triangle C_1PA_1$ по двум пропорциональным сторонам и углу между ними:

$$\frac{PA_1}{AG} = \frac{6x}{\frac{36}{11}x} = \frac{11}{6}, \quad \frac{PC_1}{AB} = \frac{11x}{6x} = \frac{11}{6}, \quad \angle A_1PC_1 = 90^\circ = \angle GAB$$

Отсюда $\angle ABG = \angle PC_1A_1 = \alpha$. Значит, $\angle KBC_1 = 90^\circ - \angle ABG = 90^\circ - \alpha$.



Пусть K — точка пересечения A_1C_1 и BG. Тогда имеем:

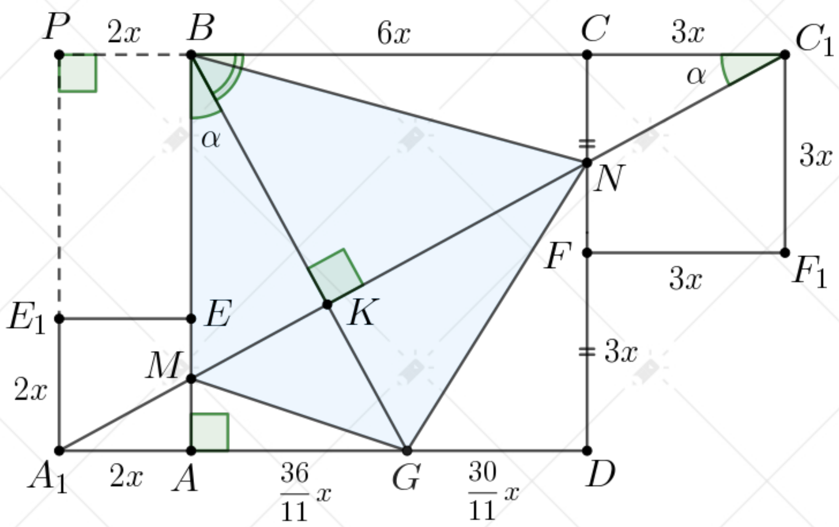
$$\angle KBC_1 + \angle KC_1B = 90^\circ - \alpha + \alpha = 90^\circ$$

$$\angle BKC_1 = 180^\circ - \angle KBC_1 - \angle KC_1B = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

б) Площадь четырехугольника с перпендикулярными диагоналями можно найти по формуле:

$$S = \frac{1}{2} \cdot d_1 \cdot d_2,$$

где d_1, d_2 — длины диагоналей четырехугольника.



Выразим длины диагоналей MN и BG четырехугольника $MBNG$ через x.

По теореме Пифагора для $\triangle ABG$:

$$BG^2 = AB^2 + AG^2$$

$$BG^2 = 36x^2 + \frac{36^2}{11^2}x^2 = \frac{36 \cdot 157}{11^2}x^2$$

$$BG = \frac{6}{11} \cdot \sqrt{157}x$$

Заметим, что $\triangle CC_1N \sim PC_1A_1$ по двум углам: $\angle A_1PC_1 = \angle NCC_1 = 90^\circ$, $\angle PC_1A_1$ — общий. Тогда имеем:

$$\frac{CN}{PA_1} = \frac{CC_1}{PC_1}$$

$$\frac{CN}{6x} = \frac{3x}{11x} \quad \Rightarrow \quad CN = \frac{18}{11}x$$

По теореме Пифагора для $\triangle NCC_1$:

$$NC_1^2 = CN^2 + CC_1^2$$

$$NC_1^2 = \frac{18^2}{11^2}x^2 + 9x^2 = \frac{9 \cdot 157}{121}x^2$$

$$NC_1 = \frac{3}{11} \cdot \sqrt{157}x$$

Так как $AB \parallel CN$, то по теореме о пропорциональных отрезках имеем:

$$\frac{MN}{NC_1} = \frac{BC}{CC_1}$$

$$MN = NC_1 \cdot \frac{6x}{3x} = \frac{6}{11} \cdot \sqrt{157}x$$

По условию площадь квадрата $ABCD$ равна 242, то есть имеем:

$$242 = 36x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{121}{18}$$

Отсюда площадь четырехугольника $MBNG$ равна:

$$S_{MBNG} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{6}{11} \cdot \sqrt{157}x\right)^2 = \frac{18}{121} \cdot 157x^2 = 157$$

Задание №18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases}(|x|+|y|-2)^2+\left(\Big||x|-|y|\Big|+2\right)^2=8\\ y=ax+2a+2\end{cases}$$

имеет 4 различных решения.

Ответ

$a\in\left(-\infty;-\dfrac{4}{3}\right)\cup\left(-\dfrac{3}{4};0\right)$

Решение

Преобразуем второе уравнение системы:

$$y=a\,(x+2)+2$$

То есть это пучок прямых, проходящих через фиксированную точку $(-2;2)$.

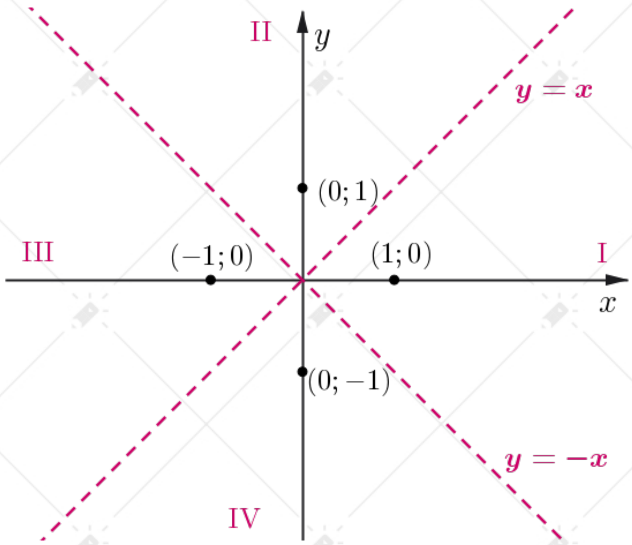
Раскроем модуль, стоящий во втором слагаемом первого уравнения системы. Для этого найдем его нули:

$$\Big||x|-|y|\Big|=0$$

$$|x|-|y|=0$$

$$y=\pm x$$

Нарисуем данные прямые. Они разбивают плоскость на 4 области. Подставляем точки из разных областей, например, точки $(1;0)$, $(0;1)$, $(-1;0)$, $(0;-1)$, и определяем знак, с которыми будет раскрываться модуль:



Точка	Область	Знак
$(1;0)$	I	$+$
$(0;1)$	II	$-$
$(-1;0)$	III	$+$
$(0;-1)$	IV	$-$

- Раскроем модуль со знаком «+», то есть на областях I, III, и преобразуем получившееся уравнение:

$$|x|^2+2|x||y|+|y|^2-4\left(|x|+|y|\right)+4+|x|^2-2|x||y|+|y|^2+4\left(|x|-|y|\right)+4=8$$
$$2x^2+2y^2-8|y|+8=8\ \Big|:2$$
$$x^2+y^2-4|y|=0$$

Раскроем модуль при $y\geqslant 0:$

$$x^2+y^2-4y=0$$
$$x^2+y^2-4y+4=4$$
$$x^2+(y-2)^2=2^2$$

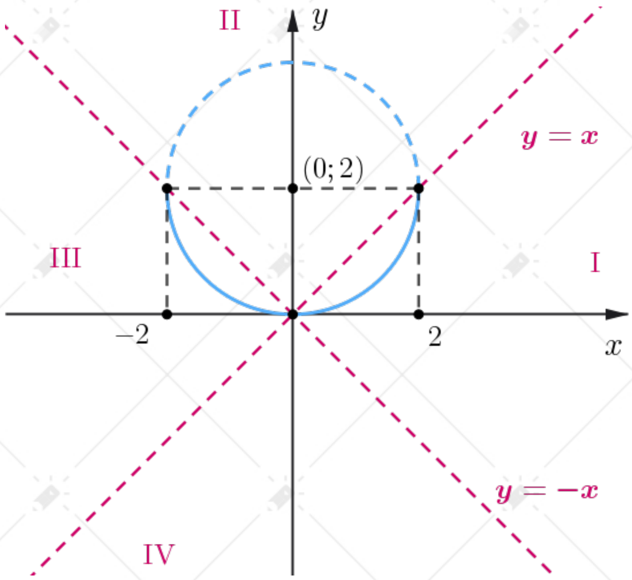
Получили окружность с центром в точке $(0;2)$ и радиусом 2. Найдем координаты точек пересечения с прямыми $y=\pm x$. Подставим $y=x$ в уравнение окружности:

$$x^2+(x-2)^2=2^2$$
$$x^2+x^2-4x+4=4$$
$$2x^2-4x=0$$
$$2x\left(x-2\right)=0$$
$$x_1=0\quad x_2=2$$
$$y_1=0\quad y_2=2$$

Подставим $y=-x$ в уравнение окружности:

$$x^2+(-x-2)^2=2^2$$
$$x^2+x^2+4x+4=4$$
$$2x^2+4x=0$$
$$2x\left(x+2\right)=0$$
$$x_1=0\quad x_2=-2$$
$$y_1=0\quad y_2=2$$

Изобразим данную окружность и возьмем только те части, которые лежать в областях I, III при $y \geqslant 0$.



Раскроем модуль при $y < 0$:

$$x^2 + y^2 + 4y = 0$$
$$x^2 + y^2 + 4y + 4 = 4$$
$$x^2 + (y + 2)^2 = 2^2$$

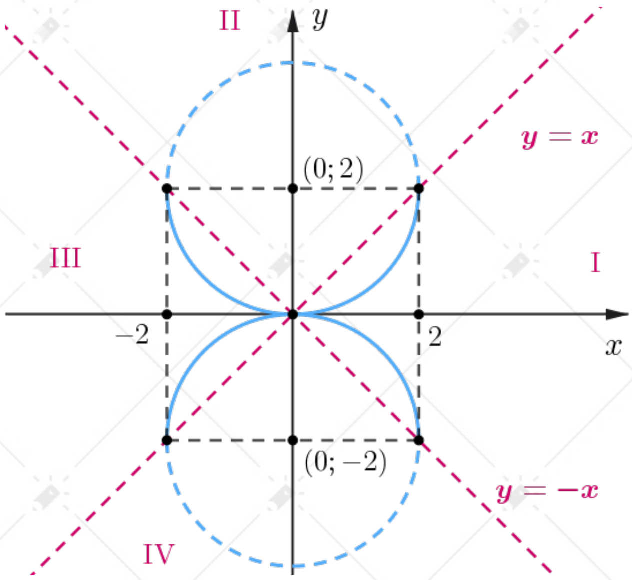
Получили окружность с центром в точке $(0; -2)$ и радиусом 2. Найдем координаты точек пересечения с прямыми $y = \pm x$. Подставим $y = x$ в уравнение окружности:

$$x^2 + (x + 2)^2 = 2^2$$
$$x^2 + x^2 + 4x + 4 = 4$$
$$2x^2 + 4x = 0$$
$$2x\,(x + 2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = -2$$

Подставим $y = -x$ в уравнение окружности:

$$x^2 + (-x + 2)^2 = 2^2$$
$$x^2 + x^2 - 4x + 4 = 4$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x\,(x - 2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = -2$$

Изобразим данную окружность и возьмем только те части, которые лежать в областях I, III при $y < 0$.



- Раскроем модуль со знаком «−», то есть на областях II, IV, и преобразуем получившееся уравнение:

$$|x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 - 4\left(|x| + |y|\right) + 4 + |x|^2 - 2|x||y| + |y|^2 + 4\left(-|x| + |y|\right) + 4 = 8$$

$$2x^2 + 2y^2 - 8|x| + 8 = 8 \ \Big| : 2$$

$$x^2 + y^2 - 4|x| = 0$$

Раскроем модуль при $x \geqslant 0$:

$$x^2 - 4x + y^2 = 0$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 = 4$$

$$(x-2)^2 + y^2 = 2^2$$

Получили окружность с центром в точке $(2; 0)$ и радиусом 2. Найдем координаты точек пересечения с прямыми $y = \pm x$. Подставим $y = x$ в уравнение окружности:

$$(x-2)^2 + x^2 = 2^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + x^2 = 4$$

$$2x^2 - 4x = 0$$

$$2x\left(x-2\right) = 0$$

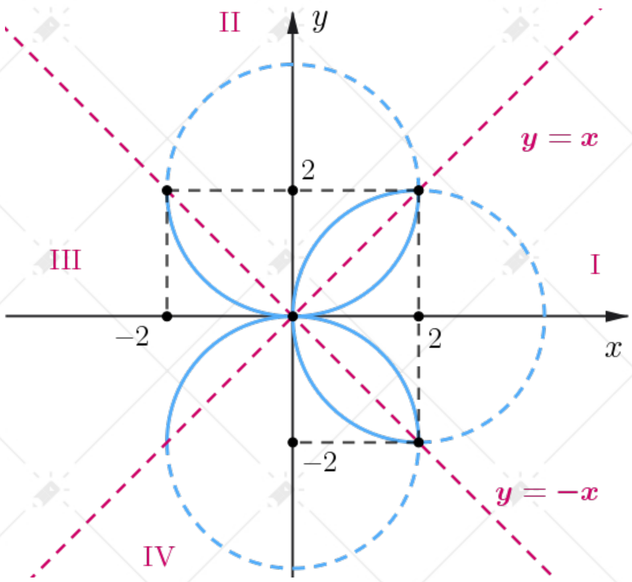
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$

$$y_1 = 0 \quad y_2 = 2$$

Подставим $y = -x$ в уравнение окружности:

$$(x-2)^2 + (-x)^2 = 2^2$$
$$x^2 - 4x + 4 + x^2 = 4$$
$$2x^2 - 4x = 0$$
$$2x\,(x-2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = 2$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = -2$$

Изобразим данную окружность и возьмем только те части, которые лежать в областях II, IV при $x \geqslant 0$.



Раскроем модуль при $x < 0$:

$$x^2 + 4x + y^2 = 0$$
$$x^2 + 4x + 4 + y^2 = 4$$
$$(x+2)^2 + y^2 = 2^2$$

Получили окружность с центром в точке $(-2; 0)$ и радиусом 2. Найдем координаты точек пересечения с прямыми $y = \pm x$. Подставим $y = x$ в уравнение окружности:

$$(x+2)^2 + x^2 = 2^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + x^2 = 4$$
$$2x^2 + 4x = 0$$
$$2x\,(x+2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = -2$$

Подставим $y = -x$ в уравнение окружности:

$$(x+2)^2 + (-x)^2 = 2^2$$
$$x^2 + 4x + 4 + x^2 = 4$$
$$2x^2 + 4x = 0$$
$$2x\,(x+2) = 0$$
$$x_1 = 0 \quad x_2 = -2$$
$$y_1 = 0 \quad y_2 = 2$$

Изобразим данную окружность и возьмем только те части, которые лежать в областях II, IV при $x < 0$.

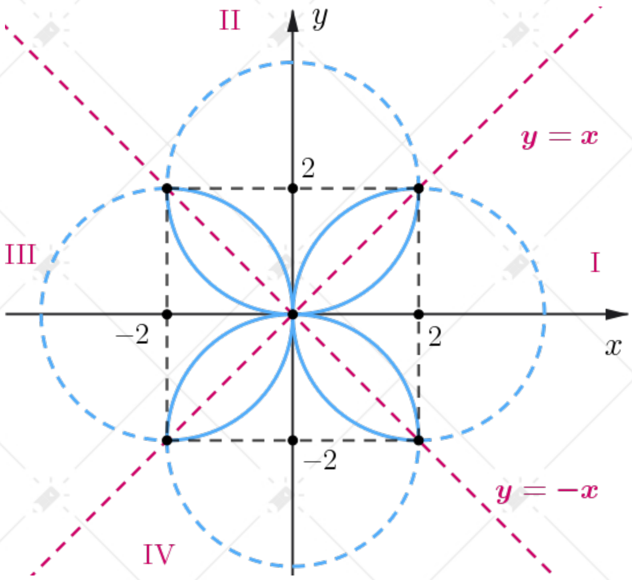
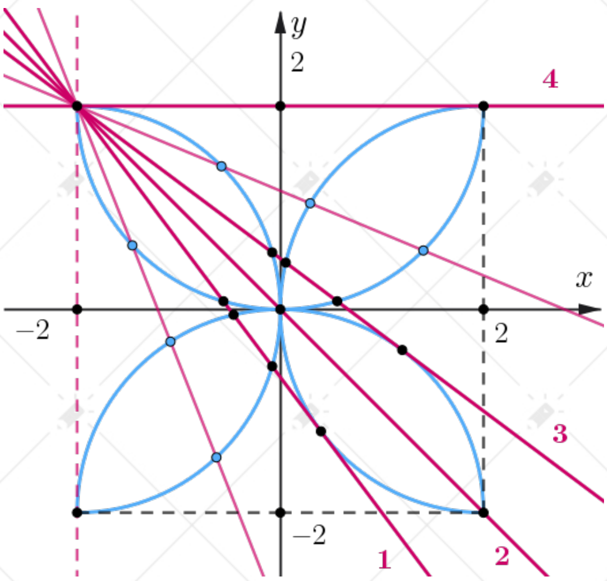


График первого уравнения системы построили.

Теперь начнем вращать нашу прямую из пучка от вертикальной прямой, которая не входит в пучок, против часовой стрелки.



Заметим, что начиная вращать прямую от вертикального положения, будем сразу иметь 4 точки пересечения.

Случай 1. Прямая касается окружности $(x-2)^2+y^2=2^2$ в точке нижней полуокружности. В этом положении имеем 5 точек пересечения.

Случай 2. Прямая проходит через точку $(0;0)$. В силу симметрии прямая также пройдет через точку $(2;-2)$. В данном положении будем иметь 3 точки пересечения. Между положениями **1** и **2** будет 6 точек пересечения. Найдем значения параметра a, при котором происходит данный случай, для этого подставим точку $(0;0)$ в уравнение прямой $y=a\left(x+2\right)+2:$

$$0=a(0+2)+2$$

$$2a=-2$$

$$a=-1$$

Случай 3. Прямая касается окружности $x^2+(y+2)^2=2^2$ в точке верхней полуокружности. В этом положении имеем 5 точек пересечения. Между положениями **2** и **3** будет 6 точек пересечения.

Случай 4. Прямая проходит через точку $(2;2)$. В данном положении имеем 2 точки пересечения. Между положениями **3** и **4** будет 4 точки пересечения. Найдем значения параметра a, при котором происходит данный случай, для этого подставим точку $(2;2)$ в уравнение прямой $y=a\left(x+2\right)+2:$

$$2=a(2+2)+2$$

$$4a=0$$

$$a=0$$

Найдем значение параметра a для случая **1**. Для этого воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой. Точка имеет координаты $(2;0)$, прямая имеет вид $ax-y+2a+2=0$, расстояние будет равно радиусу окружности, то есть 2.

$$\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}=\rho$$

$$\frac{|2a+2a+2|}{\sqrt{a^2+1}}=2\ \Bigg|\cdot\sqrt{a^2+1}\neq 0$$

$$|4a+2|=2\sqrt{a^2+1}$$

$$(|4a+2|)^2=4\left(a^2+1\right)$$

$$16a^2+16a+4=4a^2+4$$

$$12a^2+16a=0$$

$$4a\left(3a+4\right)=0$$

$$a_1=0\quad a_2=-\frac{4}{3}$$

Заметим, что при $a_1 = 0$ получаем случай **4**, значит, случай **1** достигается при $a = -\frac{4}{3}$.
Найдем значение параметра a для случая **3**. Для этого воспользуемся формулой расстояния от точки до прямой. Точка имеет координаты $(0; -2)$, прямая имеет вид $ax - y + 2a + 2 = 0$, расстояние будет равно радиусу окружности, то есть 2.

$$\frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \rho$$

$$\frac{|2 + 2a + 2|}{\sqrt{a^2+1}} = 2 \quad \Bigg| \cdot \sqrt{a^2+1} \neq 0$$

$$|2a + 4| = 2\sqrt{a^2+1}$$

$$(|2a+4|)^2 = 4\left(a^2+1\right)$$

$$4a^2 + 16a + 16 = 4a^2 + 4$$

$$16a = -12$$

$$a = -\frac{3}{4}$$

Получаем ответ:

$$a \in \left(-\infty; -\frac{4}{3}\right) \cup \left(-\frac{3}{4}; 0\right).$$

Задание №19

Женя написала на доске 10 натуральных чисел, меньших 10, среднее арифметическое которых равно 4. После этого Максим заменил каждое из чисел на доске на удвоенное, а затем стер все числа, которые оказались меньше 10.

а) Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел быть равно 18?

б) Молго ли на доске оказаться 8 чисел?

в) Какое наибольшее количество восьмерок могло быть на доске изначально, если в итоге среднее арифметическое оставшихся чисел равно 12?

Ответ

а) Да, могло

б) Нет, не могло

в) 2

Решение

а) Да, могло. Если на доске изначально были написаны числа 1, 2, 2, 2, 2, 2, 2, 9, 9, 9, то их среднее арифметическое было равно

$$\frac{1+2+2+2+2+2+2+9+9+9}{10} = \frac{40}{10} = 4$$

При этом после действий Максима на доске остались только три числа 18, их среднее арифметическое тоже равно 18.

б) Если на доске оказалось 8 чисел, то изначально на доске было 2 натуральных числа от 1 до 4 и 8 натуральных чисел от 5 до 9. Таким образом, сумма изначальных чисел не меньше

$$1 \cdot 2 + 5 \cdot 8 = 42$$

Если изначально среднее арифметическое десяти чисел равно 4, то их сумма равна 40. Противоречие.

в) Пусть изначально на доске есть k восьмерок, где k — натуральное. Тогда их сумма равна $8k$. Изначально сумма чисел на доске равна 40, значит,

$$8k \leqslant 40$$

$$k \leqslant 5$$

Если $k = 5$, то $8k = 40$, но тогда сумма оставшихся 5 натуральных чисел на доске должна равняться 0, противоречие. Значит, $k \leqslant 4$.

Переберем значения k, начиная с 4, до первого подходящего.

- Пусть $k = 4$. Тогда изначальная сумма чисел на доске, кроме восьмерок, равна $40 - 8k = 40 - 32 = 8$.

  При этом на доске есть еще 6 чисел, значит, каждое из них не больше 3, поэтому после действий Максима на доске останутся только числа 16, а их среднее арифметическое тоже будет равно 16. Следовательно, $k = 4$ не подходит.

- Пусть $k = 3$. Тогда изначальная сумма чисел на доске, кроме восьмерок, равна

  $$40 - 8k = 40 - 24 = 16$$

  Заметим, что из оставшихся семи чисел не более трех больше 4, так как иначе сумма оставшихся чисел будет хотя бы 20. Пусть изначально на доске было еще $x \leqslant 3$ чисел, больших 4. Тогда после действий Максима их сумма не менее $10x$.

  Также заметим, что на доске после действий Максима есть три числа 16, сумма которых равна 48.

  Значит, среднее арифметическое в конце не менее

  $$\frac{48 + 10x}{3 + x} = \frac{30 + 10x + 18}{3 + x} = 10 + \frac{18}{3 + x} \geqslant 10 + \frac{18}{6} = 13 > 12$$

  Значит, $k \neq 3$.

- Если $k = 2$, то существует пример изначальных чисел: 1, 1, 1, 1, 5, 5, 5, 5, 8, 8. Их сумма равна 40, а после действий Максима на доске будут числа 10, 10, 10, 10, 16, 16, среднее арифметическое которых равно

  $$\frac{10 + 10 + 10 + 10 + 16 + 16}{6} = \frac{72}{6} = 12$$

Решения авторского варианта «Школково» №12

Задание №1

Ответ: 480

Задание №2

Ответ: 212

Задание №3

Ответ: 4

Задание №4

Ответ: 0,29

Задание №5

Ответ: 0,03

Задание №6

Ответ: 5

Задание №7

Ответ: 8

Задание №8

Ответ: 4

Задание №9

Ответ: 125

Задание №10

Ответ: 36

Задание №11

Ответ: 28

Задание №12

Ответ: 0,75

Задание №13

Ответ: а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $3\pi;\ \ 4\pi$

Задание №14

Ответ: б) 392

Задание №15

Ответ: $(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$

Задание №16

Ответ: 18

Задание №17

Ответ: б) $5 - \sqrt{10}$

Задание №18

Ответ: $a \in \{9\}$

Задание №19

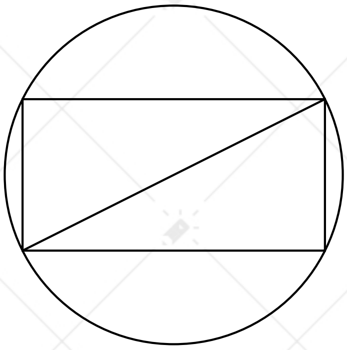
Ответ: а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 9

Задание №1

Синус угла между стороной и диагональю прямоугольника равен $\dfrac{8}{17}$. Диаметр описанной около него окружности равен 34. Найдите площадь прямоугольника.

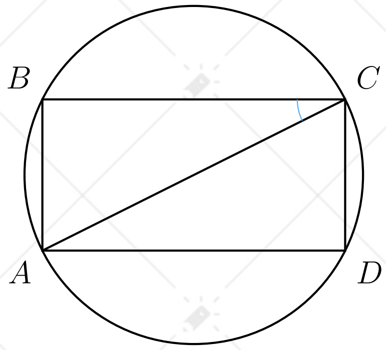


Ответ

480

Решение

Пусть $ABCD$ – прямоугольник, тогда диагональ AC равна диаметру описанной около него окружности, то есть равна 34, а $\sin\angle BCA = \dfrac{8}{17}$.



Тогда для прямоугольного треугольника ABC имеем:

$$\sin\angle BCA = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{8}{17} = \frac{AB}{34}$$

$$AB = \frac{8}{17}\cdot 34 = 16$$

Запишем теорему Пифагора для треугольника ABC :

$$AC^2 = BC^2 + AB^2$$

$$34^2 = BC^2 + 16^2$$

$$BC^2 = 34^2 - 16^2 = (34-16)(34+16) = 18\cdot 50 = 900$$

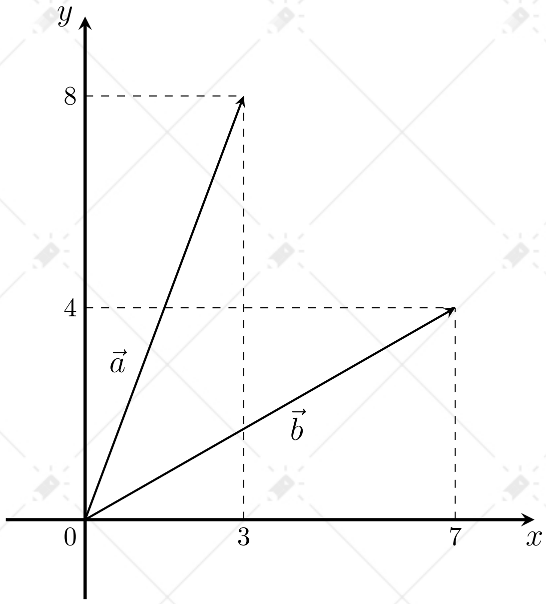
$$BC = 30$$

Тогда площадь прямоугольника $ABCD$ равна

$$S = AB\cdot BC = 16\cdot 30 = 480.$$

Задание №2

Найдите $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)^2-\left(\vec{a}-\vec{b}\right)^2$.



Ответ

212

Решение

Запишем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}=(3;8),\quad \vec{b}=(7;4).$$

Найдём сумму и разность векторов:

$$\vec{a}+\vec{b}=(3+7;\ 8+4)=(10;12)$$
$$\vec{a}-\vec{b}=(3-7;\ 8-4)=(-4;4)$$

Квадрат вектора равен сумме квадратов его координат:

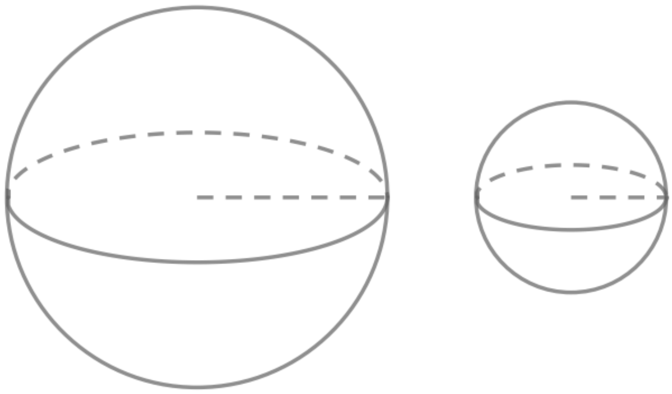
$$(\vec{a}+\vec{b})^2=10^2+12^2=100+144=244$$
$$(\vec{a}-\vec{b})^2=(-4)^2+4^2=16+16=32$$

Следовательно,

$$(\vec{a}+\vec{b})^2-(\vec{a}-\vec{b})^2=244-32=212.$$

Задание №3

Во сколько раз увеличится площадь поверхности шара, если радиус шара увеличить в 2 раза?



Ответ

4

Решение

Пусть R — изначальный радиус шара. Площадь поверхности шара вычисляется по формуле

$$S = 4\pi R^2$$

После увеличения радиуса шара в 2 раза площадь поверхности равна

$$S_1 = 4\pi(2R)^2 = 16\pi R^2$$

Это в 4 раза больше, чем изначальная площадь поверхности.

Задание №4

Перед началом первого тура соревнований по шахматам участников разбивают на пары случайным образом с помощью жребия. Всего в соревнованиях участвует 60 спортсменов, среди которых 18 спортсменов из России, в том числе Родион. Найдите вероятность того, что в первом туре Родион будет играть в шахматы с каким-либо спортсменом из России. Ответ округлите до сотых.

Ответ

0,29

Решение

Рассмотрим ситуацию с точки зрения Родиона. Его соперником может оказаться один из 59 остальных спортсменов, среди которых 17 из России. То есть вероятность получить в соперники россиянина равна $\dfrac{17}{59}$. После деления в столбик и округления до сотых получим 0,29.

Задание №5

Две фабрики выпускают одинаковые окна. Первая фабрика выпускает 70% этих окон, вторая – 30%. Первая фабрика выпускает 2% бракованных окон. Известно, что общая вероятность купить бракованное окно равна 0,023. Найдите процент брака на второй фабрике.

Ответ

0,03

Решение

Пусть x — процент брака на второй фабрике (в долях единицы). Тогда вероятность того, что случайно купленное окно бракованное, равна

$$0{,}70 \cdot 0{,}02 + 0{,}30 \cdot x = 0{,}023.$$

Решим уравнение:

$$0{,}014 + 0{,}3x = 0{,}023 \quad \Rightarrow \quad 0{,}3x = 0{,}009 \quad \Rightarrow \quad x = 0{,}03.$$

Следовательно, вторая фабрика выпускает 3% бракованных окон.

Задание №6

Найдите корень уравнения $\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{x+3} = \log_2 4$.

Ответ

5

Решение

Используем свойства логарифмов:

$$\log_2 \sqrt{x-3} + \log_2 \sqrt{x+3} = \log_2 \left(\sqrt{x-3} \cdot \sqrt{x+3}\right) = \log_2 \sqrt{(x-3)(x+3)}.$$

Тогда уравнение принимает вид:

$$\log_2 \sqrt{x^2-9} = \log_2 4.$$

Перейдём к равенству подлогарифмических выражений:

$$\sqrt{x^2-9} = 4.$$

Возведём обе части в квадрат:

$$x^2 - 9 = 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad x = 5 \quad \text{или} \quad x = -5.$$

ОДЗ исходного уравнения: $x - 3 > 0$ и $x + 3 > 0$, то есть $x > 3$. Следовательно, $x = -5$ не подходит. Остаётся $x = 5$.

Задание №7

Найдите значение выражения $2^{\sin^2\frac{\pi}{4}}\cdot 4^{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot 8^{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}$.

Ответ

8

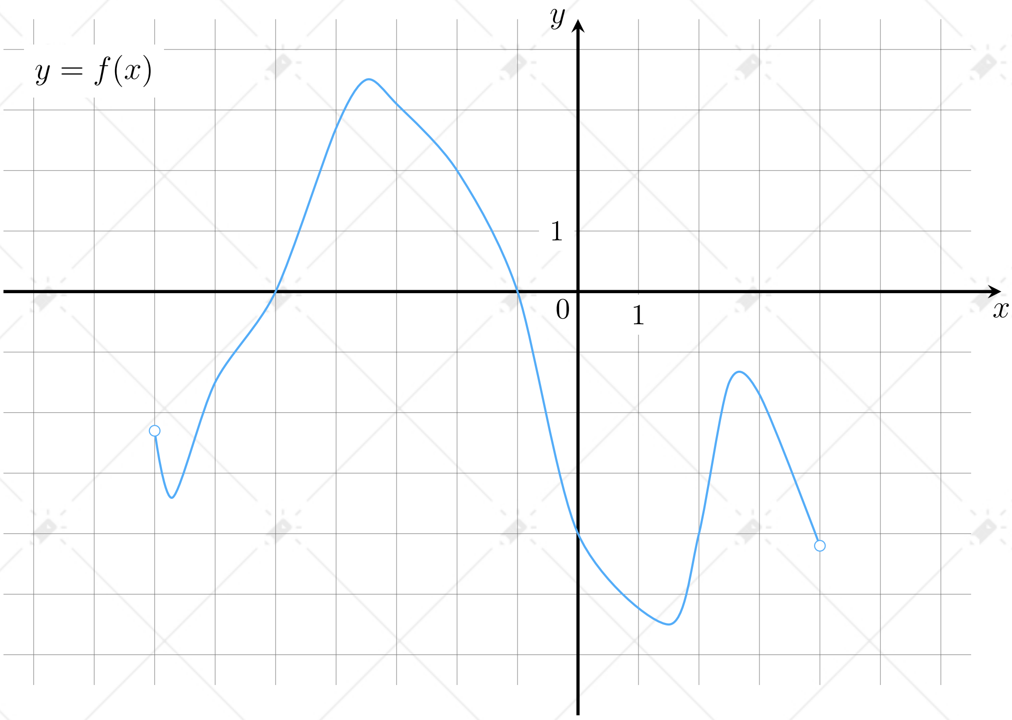
Решение

Пользуясь табличными значениями $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, по свойствам степени имеем:

$$2^{\sin^2\frac{\pi}{4}}\cdot 4^{\cos^2\frac{\pi}{4}}\cdot 8^{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}}=2^{\frac{1}{2}}\cdot(2^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(2^3)^{\frac{1}{2}}=$$
$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^1\cdot 2^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{1}{2}+1+\frac{3}{2}}=2^3=8.$$

Задание №8

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$, определённой на интервале $(-7;4)$. Определите количество целых точек, расположенных на промежутках возрастания функции $f(x)$.

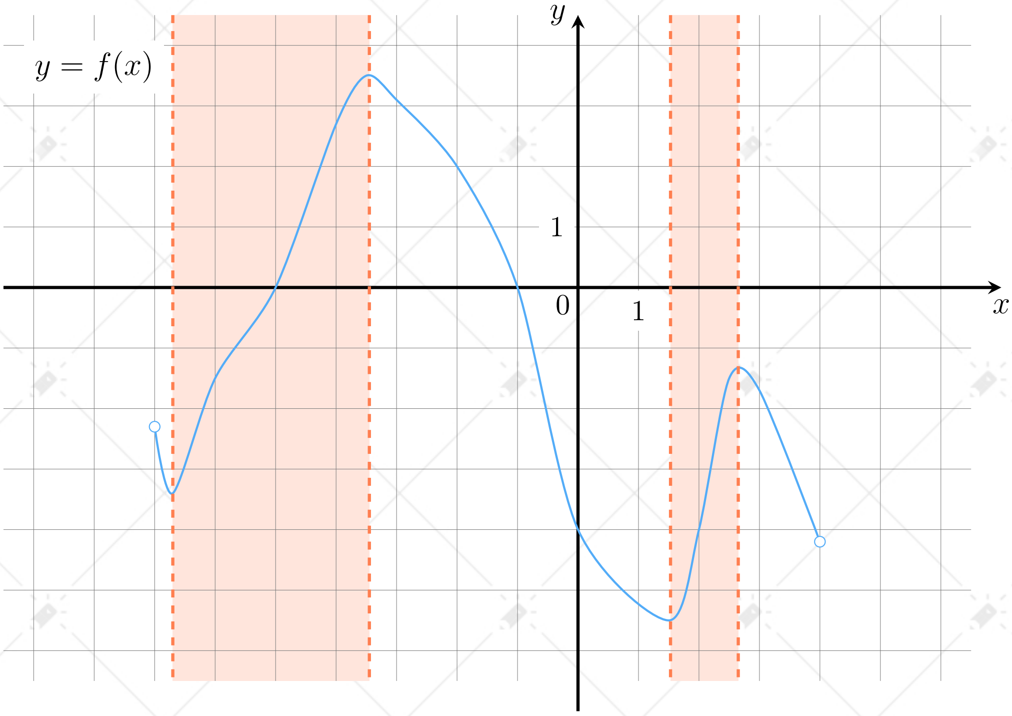


Ответ

4

Решение

Выделим промежутки возрастания функции $f(x)$:



Из рисунка видно, что на промежутках возрастания функции расположено четыре целых точки: -6; -5; -4; 2.

Задание №9

При падении астероида в атмосфере его температура (в кельвинах) на высоте H (в метрах) изменяется по закону $T(H) = T_0 + \beta\sqrt[3]{H_0 - H}$, где $T_0 = 270$ К – начальная температура, $\beta = 30$ К/м$^{1/3}$ – постоянная, H_0 – стартовая наблюдаемая высота падения (в метрах). Найдите H_0, если в момент удара о поверхность Земли температура астероида достигла 420 К. Ответ дайте в метрах.

Ответ

125

Решение

Так как в момент удара $H = 0$, то имеем:

$$420 = 270 + 30\sqrt[3]{H_0}$$
$$30\sqrt[3]{H_0} = 150$$
$$\sqrt[3]{H_0} = 5$$
$$H_0 = 125.$$

Задание №10

Два гонщика участвуют в гонках. Им предстоит проехать 3 круга по кольцевой трассе протяжённостью 36 км. Оба гонщика стартовали одновременно из одной точки в противоположных направлениях, а на финиш первый пришёл на 2 часа раньше второго. Чему равна скорость второго гонщика, если известно, что первый раз они встретились через 15 минут, а скорости обоих гонщиков постоянны? Ответ дайте в км/ч.

Ответ

36

Решение

Общая протяженность заезда равна $3\cdot 36 = 108$ км. Обозначим скорость первого гонщика через v_1 км/ч, второго — через v_2 км/ч.

Относительная скорость гонщиков равна $v_1 + v_2$ км/ч. Известно, что они встретились впервые через 15 минут, то есть прошли один круг через 0,25 часа после начала движения. Также известно, что разница во времени прохождения всей трассы первым и вторым гонщиками составляет 2 часа.

Запишем оба условия и решим полученную систему:

$$\begin{cases} \dfrac{36}{v_1+v_2} = 0{,}25 \\ \dfrac{108}{v_2} - \dfrac{108}{v_1} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1+v_2 = 144 \\ 108(v_1 - v_2) = 2v_1v_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = 144 - v_2 \\ 108(144 - 2v_2) = 2v_2(144 - v_2) \end{cases}$$

Раскроем скобки во втором уравнении:

$$15552 - 216v_2 = 288v_2 - 2v_2^2$$
$$2v_2^2 - 504v_2 + 15552 = 0$$
$$v_2^2 - 252v_2 + 7776 = 0$$

Дискриминант квадратного уравнение равен

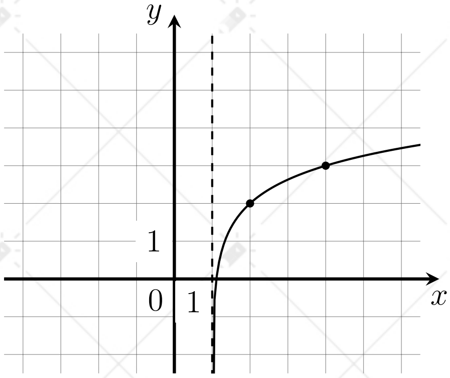
$$D = 252^2 - 4\cdot 7776 = 63504 - 31104 = 32400 = 180^2$$

Тогда $v_2 = \dfrac{252-180}{2} = 36$. При этом второй корень $v_2 = \dfrac{252+180}{2} = 216$ не подходит, так как скорость $v_1 = 144 - v_2$ должна быть положительной и $v_1 > v_2$.

Таким образом, скорость второго гонщика равна 36 км/ч.

Задание №11

На рисунке изображен график функции $f(x) = \log_a(x-b)+c$. Найдите значение x, при котором $f(x) = 5$.



Ответ

28

Решение

Заметим, что данный нам график «прижимается» к прямой $x = 1$, которая выделена на картинке как асимптота. Отсюда получаем $b = 1$.

Также на картинке видно, что целые точки $(2;2)$ и $(4;3)$ принадлежат графику функции $f(x)$, поэтому можем составить систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(4) = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \log_a(2-1)+c = 2 \\ \log_a(4-1)+c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0+c = 2 \\ \log_a 3+c = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2 \\ a = 3 \end{cases}$$

Значит, функция имеет вид

$$f(x) = \log_3(x-1)+2$$

Осталось найти x, при котором значение функции равно 5:

$$f(x) = 5$$

$$\log_3(x-1)+2 = 5$$

$$\log_3(x-1) = 3$$

$$x-1 = 3^3$$

$$x = 28$$

Задание №12

Найдите точку максимума функции $y = (4x-3)\cos x - 4\sin x + 9$, принадлежащую промежутку $\left(0;\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

Ответ

0,75

Решение

Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$.

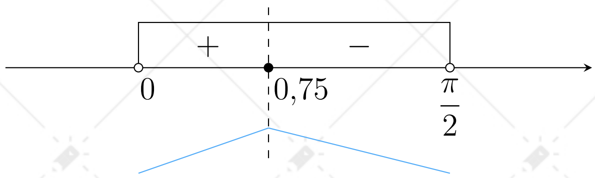
Найдем производную:

$$y' = ((4x-3)\cos x)' - (4\sin x)' + (9)' =$$
$$= (4x-3)'\cdot\cos x + (4x-3)\cdot(\cos x)' - (4\sin x)' =$$
$$= 4\cos x - (4x-3)\cdot\sin x - 4\cos x =$$
$$= -(4x-3)\cdot\sin x = (3-4x)\cdot\sin x$$

Найдём критические точки, то есть внутренние точки области определения функции, в которых её производная равна 0 или не существует:

$$y' = 0 \quad \text{при} \quad x = 0{,}75 \quad \left(\sin x > 0,\ x\ \in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)\right)$$

Для того, чтобы найти точки локального максимума/минимума функции, нужно понять, как схематично выглядит её график. Расставим знаки на промежутках знакопостоянства производной и отметим, где функция возрастает и убывает:



Таким образом, $x = 0{,}75$ — точка максимума функции y.

Задание №13

а) Решите уравнение $2\cos^2 x - 3\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) - 2 = 0$.

б) Укажите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$.

Ответ

а) $\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $3\pi;\ \ 4\pi$

Решение

а) По ОТТ имеем $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Отсюда $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$.
Так как $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$, то получаем:

$$\begin{gathered} 2\cos^2 x - 3(-\sin x) - 2 = 0 \\ 2(1 - \sin^2 x) + 3\sin x - 2 = 0 \\ 2 - 2\sin^2 x + 3\sin x - 2 = 0 \\ -2\sin^2 x + 3\sin x = 0 \end{gathered}$$

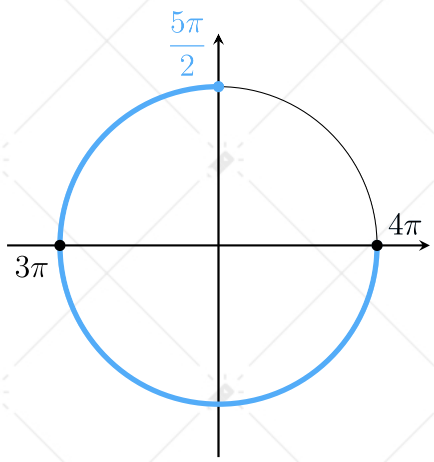
Пусть $\sin x = t$. Тогда уравнение примет вид:

$$\begin{gathered} -2t^2 + 3t = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t(-2t+3) = 0 \\ t = 0 \quad \text{или} \quad t = \frac{3}{2} \end{gathered}$$

Второе значение не подходит, так как $|\sin x| \leqslant 1$.
Сделаем обратную замену:

$$\sin x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$$

б) Проведём отбор корней на числовой окружности. Отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\dfrac{5\pi}{2}; 4\pi\right]$ лежат точки 3π и 4π.

Задание №14

Дана пирамида $ABCD$ с прямоугольным треугольником ABC в основании. Вокруг пирамиды описан конус.

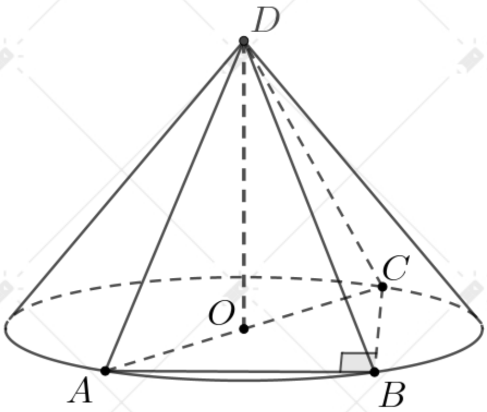
а) Докажите, что вершина конуса проецируется в середину одной из сторон треугольника основания.

б) Известно, что объем конуса равен $V_k = 392\pi$, а треугольник в основании является равнобедренным. Найдите объем пирамиды.

Ответ

б) 392

Решение



а) Пирамида вписана в конус, значит треугольник в её основании вписан в окружность. Рассмотрим плоскость основания. Заметим, что в прямоугольном треугольнике центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы . Теперь вспомним, что вершина конуса проецируется в центр окружности основания, а значит, в середину гипотенузы. Что и требовалось доказать.

б) Так как в основании пирамиды лежит равнобедренный прямоугольный треугольник, вписанный в окружность, то его гипотенуза — диаметр этой окружности. Обозначим радиус окружности основания конуса за r, а высоту конуса за h.

Объем конуса равен

$$392\pi = V_k = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

Отсюда получаем

$$\frac{1}{3}r^2 h = 392$$

Теперь найдем площадь основания пирамиды. Пусть катеты равнобедренного прямоугольного треугольника равны x. Тогда по теореме Пифагора его гипотенуза равна $x\sqrt{2}$.

С другой стороны, гипотенуза равна диаметру описанной окружности, то есть

$$x\sqrt{2} = 2r$$

$$x = \sqrt{2}r$$

Тогда площадь основания пирамиды равна

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}r\right)^2 = r^2$$

Следовательно, объем пирамиды равен

$$V = \frac{1}{3}S_{ABC} \cdot h$$
$$V = \frac{1}{3}r^2h$$
$$V = 392$$

Задание №15

Решите неравенство $27 \cdot 63^x - 27^{x+1} - 12 \cdot 21^x + 12 \cdot 9^x + 7^x - 3^x \leqslant 0.$

Ответ

$(-\infty; -2] \cup [-1; 0]$

Решение

Разложим левую часть неравенства на множители:

$$27 \cdot (63^x - 27^x) - 12 \cdot (21^x - 9^x) + (7^x - 3^x) \leqslant 0$$
$$27\left(7^x \cdot 9^x - 3^x \cdot 9^x\right) - 12\left(7^x \cdot 3^x - 3^x \cdot 3^x\right) + (7^x - 3^x) \leqslant 0$$
$$27 \cdot 9^x \cdot (7^x - 3^x) - 12 \cdot 3^x \cdot (7^x - 3^x) + (7^x - 3^x) \leqslant 0$$
$$(7^x - 3^x)\left(27 \cdot 9^x - 12 \cdot 3^x + 1\right) \leqslant 0$$

Обозначим $3^x = t$, тогда $9^x = (3^x)^2 = t^2$ и второй множитель примет вид

$$27t^2 - 12t + 1 = 27\left(t - \frac{1}{9}\right)\left(t - \frac{1}{3}\right) = 27\left(t - 3^{-2}\right)\left(t - 3^{-1}\right)$$

Вернемся к $t = 3^x$, то есть выражение примет вид

$$27\left(3^x - 3^{-2}\right)\left(3^x - 3^{-1}\right)$$

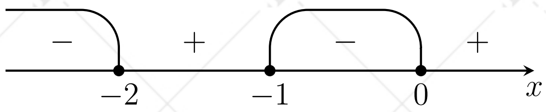
Тогда для исходного неравенства имеем:

$$(7^x - 3^x) \cdot 27\left(3^x - 3^{-2}\right)\left(3^x - 3^{-1}\right) \leqslant 0$$
$$(7^x - 3^x)\left(3^x - 3^{-2}\right)\left(3^x - 3^{-1}\right) \leqslant 0$$
$$\left(\left(\frac{7}{3}\right)^x - 1\right)\left(3^x - 3^{-2}\right)\left(3^x - 3^{-1}\right) \leqslant 0$$
$$\left(\left(\frac{7}{3}\right)^x - \left(\frac{7}{3}\right)^0\right)\left(3^x - 3^{-2}\right)\left(3^x - 3^{-1}\right) \leqslant 0$$

Воспользуемся методом рационализации:

$$\left(\frac{7}{3}-1\right)(x-0)\cdot(3-1)(x-(-2))\cdot(3-1)(x-(-1))\leqslant 0$$
$$\frac{4}{3}\cdot x\cdot 2(x+2)\cdot 2(x+1)\leqslant 0$$
$$x(x+2)(x+1)\leqslant 0$$

По методу интервалов имеем:



Отсюда получаем

$$x\in(-\infty;-2]\cup[-1;0]$$

Задание №16

10 января некоторого года планируется открыть вклад в банке на 20 млн рублей на 4 года на следующих условиях:

– 25 декабря каждого года банк добавляет 20% к той сумме, которая была на счете 25 января этого же года;

– с 11 по 24 января в каждый из третьего и четвертого годов вкладчик обязан снять со счета целое число m млн рублей.

Найдите наименьшее целое значение m, при котором банк за 4 года начислит на вклад менее 10 млн рублей.

Ответ

18

Решение

Составим таблицу, при этом все расчеты будем вести в млн рублей:

Год	Размер вклада до начисления %	Размер вклада после начисления %
1	20	$1{,}2\cdot 20$
2	$1{,}2\cdot 20$	$1{,}2^2\cdot 20$
3	$1{,}2^2\cdot 20-m$	$1{,}2\left(1{,}2^2\cdot 20-m\right)$
4	$1{,}2\left(1{,}2^2\cdot 20-m\right)-m$	$1{,}2\left(1{,}2\left(1{,}2^2\cdot 20-m\right)-m\right)$

Таким образом, в конце 4-ого года размер вклада составит $1{,}2\left(1{,}2\left(1{,}2^2\cdot 20-m\right)-m\right)$. Фраза «банк за 4 года начислит на вклад менее 10 млн рублей» означает, что на конец 4-ого года <u>чистая прибыль</u> по вкладу составит менее 10 млн рублей.

Для того, чтобы вычислить чистую прибыль, нужно сложить все деньги, которые есть у вкладчика и вычесть из них сумму, которую клиент вложил в банк. Таким образом, чистая прибыль составит

$$1{,}2\left(1{,}2\left(1{,}2^2\cdot 20-m\right)-m\right)+2m-20$$

Значит, получаем неравенство

$$1{,}2\left(1{,}2\left(1{,}2^2\cdot 20-m\right)-m\right)+2m-20<10$$

$$\frac{6^4}{5^4}\cdot 20-\frac{36}{25}m-\frac{6}{5}m+2m-20<10$$

$$\frac{6^4}{5^3}\cdot 4-30<m\cdot\left(\frac{36+30}{25}-2\right)$$

$$6^4\cdot 4-30\cdot 5^3<16m\cdot 5$$

$$5184-3750<80m$$

$$1434<80m$$

$$717<40m$$

$$m>\frac{717}{40}$$

Заметим, что

$$\frac{717}{40}=\frac{680}{40}+\frac{37}{40}=17+\frac{37}{40}$$

Тогда наименьшее подходящее целое $m=18$.

Задание №17

Дан треугольник ABC. На его стороне AC как на диаметре построена окружность, которая пересекает стороны AB и BC в точках M и K соответственно. Известно, что M — середина AB, а H — точка пересечения высот треугольника ABC.

а) Докажите, что $KH:HA=\cos\angle BCA$.

б) Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник AHC, если $AK=9$, $\cos\angle BCA=0{,}8$.

Ответ

б) $5-\sqrt{10}$

Решение

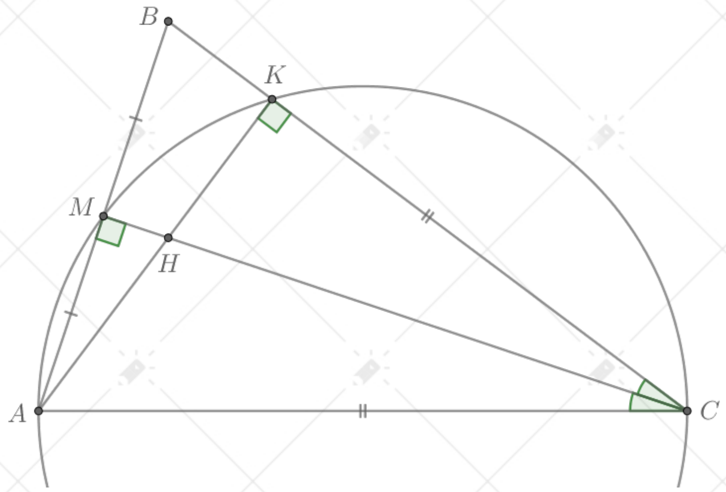
а) По условию вписанные углы AMC и AKC опираются на диаметр AC, следовательно

$$\angle AMC=\angle AKC=90^\circ$$

Значит, CM и AK — высоты треугольника ABC. Тогда они пересекаются в точке H.

По условию $AM=MB$, а значит, CM является высотой и медианой треугольника ABC.

Поэтому $\triangle ABC$ — равнобедренный и $BC=AC$, при этом CM — его биссектриса.



Рассмотрим треугольник AKC. Он прямоугольный, так как $\angle AKC = 90^\circ$, а CH — его биссектриса. Тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{KH}{HA} = \frac{CK}{AC} = \cos\angle KCA = \cos\angle BCA$$

Что и требовалось доказать.

б) По предыдущему пункту имеем:

$$\frac{KH}{HA} = \cos\angle BCA = 0{,}8 = \frac{4}{5}$$

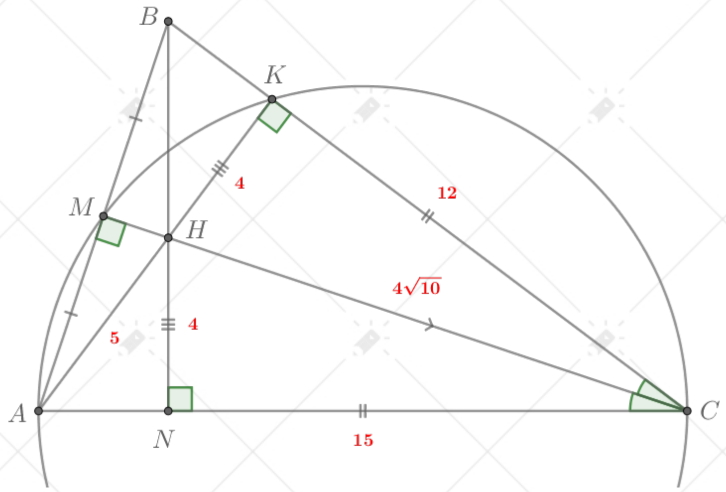
По условию $KH + HA = AK = 9$. Тогда $KH = 4$, $HA = 5$.

Рассмотрим прямоугольный треугольник AKC. В нем имеем:

$$\cos\angle KCA = \frac{4}{5} \quad \Rightarrow \quad \sin\angle KCA = \sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{3}{5}$$

Тогда получаем:

$$\frac{3}{5} = \sin\angle KCA = \frac{AK}{AC} \quad \Rightarrow \quad AC = \frac{5}{3}\cdot AK = 15$$



Также получаем:

$$\frac{CK}{AC} = \cos\angle KCA \quad \Rightarrow \quad CK = 15\cdot\frac{4}{5} = 12$$

Рассмотрим прямоугольный треугольник CHK. По теореме Пифагора:

$$CH^2 = KH^2 + CK^2 \quad \Rightarrow \quad CH = \sqrt{4^2+12^2} = 4\sqrt{10}$$

Проведем третью высоту BN треугольника ABC. Она пройдет через H — точку пересечения высот. Рассмотрим прямоугольные треугольники CHK и CHN. Они равны по острому углу и гипотенузе, так как CH — общая, а $\angle KCH = \angle NCH$, потому что CM — биссектриса угла BCA.

В равных треугольниках соответственные элементы равны, поэтому $NH = KH = 4$.

Рассмотрим треугольник AHC. Так как HN — его высота, то имеем:

$$S_{AHC} = \frac{1}{2}\cdot HN\cdot AC = \frac{1}{2}\cdot 4\cdot 15 = 30$$

С другой стороны, $S_{AHC} = rp$, где r — радиус вписанной окружности, а p — полупериметр треугольника AHC. Найдем p :

$$p = \frac{AH+CH+AC}{2} = \frac{5+4\sqrt{10}+15}{2} = \frac{20+4\sqrt{10}}{2} = 10+2\sqrt{10}$$

Тогда искомый радиус равен

$$r = \frac{S_{AHC}}{p} = \frac{30}{10+2\sqrt{10}} = \frac{15}{5+\sqrt{10}} = \frac{15\left(5-\sqrt{10}\right)}{5^2-10} = \frac{15\left(5-\sqrt{10}\right)}{15} = 5-\sqrt{10}$$

Задание №18

Найдите, при каких значениях параметра a уравнение

$$(a-9)(x-3)^2 + a^2 + |x-3|\cdot\log_3 a - 12a + 27 = 0$$

имеет ровно одно решение.

Ответ

$a \in \{9\}$

Решение

Пусть

$$f(x) = (a-9)(x-3)^2 + a^2 + |x-3|\cdot\log_3 a - 12a + 27$$

Легко заметить, что эта функция симметрична относительно $x = 3$, так как выражение $x-3$ либо в четной степени, либо под знаком модуля. Тогда если $x = 3+t_0$ — решение, то и $x = 3-t_0$

тоже является решением. А значит, одно решение может быть, только когда $3+t_0$ и $3-t_0$ совпадают и равны 3, то есть когда $t_0=0$.
Подставим $x=3$ в уравнение и найдем, при каких значениях параметра a это выполняется:

$$0+a^2+0-12a+27=0$$
$$a^2-12a+27=0$$
$$(a-3)(a-9)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=9 \end{array}\right.$$

Мы нашли, при каких значениях параметра $x=3$ — решение, но это не гарантирует нам, что решение будет единственным. Проверим каждое значение параметра отдельно.
1) $a=9:$

$$0\cdot(x-3)^2+81+|x-3|\cdot 2-108+27=0$$
$$|x-3|\cdot 2=0$$
$$x=3$$

2) $a=3:$

$$-6\cdot(x-3)^2+9+|x-3|\cdot 1-36+27=0$$
$$-6\cdot(x-3)^2+|x-3|=0$$
$$-6\cdot|x-3|^2+|x-3|=0$$

Пусть $t=|x-3|$, $t\geqslant 0$, тогда уравнение примет вид:

$$-6t^2+t=0$$
$$6t^2-t=0$$
$$t\cdot(6t-1)=0$$
$$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=\frac{1}{6} \end{array}\right.$$

1. $t=0:$

$$|x-3|=0$$
$$x=3$$

2. $t=\frac{1}{6}:$

$$|x-3|=\frac{1}{6}$$
$$\left[\begin{array}{l} x=3+\frac{1}{6} \\ x=3-\frac{1}{6} \end{array}\right.$$

Таким образом, при $a=3$ будет три решения, а значит, нам подходит только $a=9$.

Задание №19

а) Можно ли разбить числа 1, 3, 4, 7, 8, 9, 12, 15, 21, 22 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была равна точному квадрату?

б) Можно ли разбить числа 2, 3, 5, 7, 8, 12, 13, 14, 16, 18, 20, 22 на пары так, чтобы сумма чисел в каждой паре была равна точному квадрату?

в) Какое наименьшее количество чисел нужно убрать из первых восемнадцати натуральных чисел, чтобы среди оставшихся никакие два числа не давали в сумме точный квадрат?

Ответ

а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 9

Решение

а) Да, можно. Например, так:

$$1+8=9=3^2;$$
$$3+22=25=5^2;$$
$$4+12=16=4^2;$$
$$7+9=16=4^2;$$
$$15+21=36=6^2.$$

б) Проверим число 8. Сложим его со всеми остальными числами из набора:

$$8+3=11;$$
$$8+5=13;$$
$$8+7=15;$$
$$8+12=20;$$
$$8+13=21;$$
$$8+14=22;$$
$$8+16=24;$$
$$8+18=26;$$
$$8+20=28;$$
$$8+22=30.$$

Ни одна из этих сумм не является квадратом натурального числа. Следовательно, для числа 8 не существует подходящей пары и разбить данные числа на пары с требуемым свойством невозможно.

в) Разобьем натуральные числа от 1 до 18 на пары:

$$1+15=16=4^2;$$
$$2+14=16=4^2;$$
$$3+13=16=4^2;$$
$$4+12=16=4^2;$$
$$5+11=16=4^2;$$
$$6+10=16=4^2;$$
$$7+18=25=5^2;$$
$$8+17=25=5^2;$$
$$9+16=25=5^2.$$

В каждой паре сумма чисел – точный квадрат, поэтому нужно стереть хотя бы 9 чисел – по одному из каждой пары.
Теперь постоим пример, опираясь на наше разбиение. Из пары $(1;15)$ возьмем 1.
Из $(2;14)$ можем взять 2, так как

$$1+2=3 \text{ – не точный квадрат.}$$

Из пары $(3;13)$ взять 3 мы не можем, так как $1+3=4=2^2$. Тогда берем 13 и получаем, что

$$1+13=14 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$2+13=15 \text{ – не точный квадрат.}$$

Из пары $(4;12)$ можем взять 4, так как

$$1+4=5 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$2+4=6 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$13+4=17 \text{ – не точный квадрат.}$$

Из пары $(5;11)$ взять 5 мы не можем, так как $4+5=9=3^2$. Тогда берем 11 и получаем, что

$$1+11=12 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$2+11=13 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$13+11=24 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$4+11=15 \text{ – не точный квадрат.}$$

Из пары $(6;10)$ можем взять 6, так как

$$1+6=7 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$2+6=8 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$13+6=19 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$4+6=10 \text{ – не точный квадрат;}$$
$$11+6=17 \text{ – не точный квадрат.}$$

Из натуральных чисел от 1 до 18 мы не можем получить пару с суммой 36, поэтому нам нужно собрать такой набор, в котором сумма любых двух чисел не будет равна 1, 4, 9, 16 или 25.
Тогда из пары $(7;18)$ мы можем взять 18. Это число больше 16 и сумму 25 может дать только вместе с числом 7, а его у нас не будет.
Из пары $(8;17)$ мы можем взять 17. Это число больше 16 и сумму 25 может дать только вместе с числом 8, а его у нас не будет.
Из пары $(6;16)$ мы можем взять 16. Это число в сумме с любым другим больше 16, а сумму 25 может дать только вместе с числом 6, но его у нас не будет.
Таким образом, среди чисел 1, 2, 13, 4, 11, 6, 18, 17, 16 никакие два числа не дают в сумме точный квадрат.

Решения авторского варианта «Школково» №13

Задание №1

Ответ: 5

Задание №2

Ответ: 45

Задание №3

Ответ: 75

Задание №4

Ответ: 0,44

Задание №5

Ответ: 0,75

Задание №6

Ответ: 602

Задание №7

Ответ: 81

Задание №8

Ответ: -2

Задание №9

Ответ: 6

Задание №10

Ответ: 35

Задание №11

Ответ: 25

Задание №12

Ответ: 2

Задание №13

Ответ: а) $\pm\frac{\pi}{8}+\frac{\pi k}{2},\ \pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{2},\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{8};\ -\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{8}$

Задание №14

Ответ: б) 108π

Задание №15

Ответ: $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Задание №16

Ответ: 200

Задание №17

Ответ: б) $\frac{7}{2}$

Задание №18

Ответ: $a\in\left(-2\sqrt{5};-4\right)\cup(-4;4)\cup\left(4;2\sqrt{5}\right)$

Задание №19

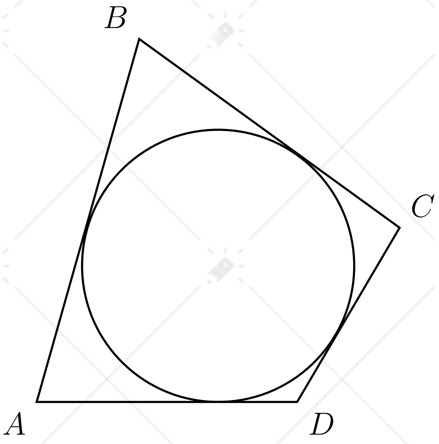
Ответ: а) Да, может

б) Нет, не может

в) 45%, 27%, 18% и 15%, 33%, 42%

Задание №1

В четырехугольник $ABCD$ вписана окружность, $AB = 9$, $BC = 8$, $AD + CD = AB$. Найдите AD.

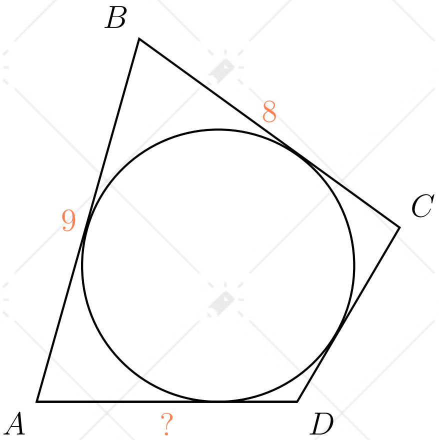


Ответ

5

Решение

Если окружность вписана в четырехугольник, то суммы противоположных сторон четырехугольника равны.



Значит, для четырехугольника $ABCD$ справедливо равенство:

$$BC + AD = AB + CD.$$

Также известно, что:

$$AD + CD = AB$$

Подставим известные значения и найдем AD :

$$\begin{cases} 8 + AD = 9 + CD \\ AD + CD = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} AD - CD = 1 \\ AD + CD = 9 \end{cases}$$

$$2AD = 10$$

$$AD = 5$$

Задание №2

Даны векторы $\vec{a}(1;0)$, $\vec{b}(0;1)$ и $\vec{c}(3;1)$. Найдите угол между векторами $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{c}$. Ответ дайте в градусах.

Ответ

45

Решение

Найдём вектор $2\vec{a}-\vec{b}$:

$$2\vec{a}-\vec{b}=2\cdot\{1;0\}-\{0;1\}=\{2;0\}-\{0;1\}=\{2;-1\}.$$

Вектор $\vec{c}=\{3;1\}$. Вычислим скалярное произведение:

$$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=2\cdot 3+(-1)\cdot 1=6-1=5.$$

Найдём длины векторов:

$$|2\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{2^2+(-1)^2}=\sqrt{5},$$

$$|\vec{c}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}.$$

Воспользуемся формулой скалярного произведения с косинусом:

$$(2\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{c}=|2\vec{a}-\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot\cos\varphi.$$

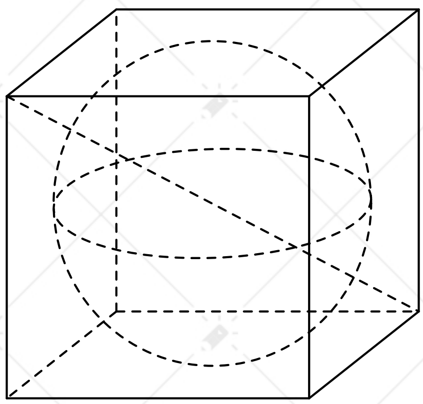
Выразим косинус угла φ:

$$\cos\varphi=\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}=\frac{5}{\sqrt{50}}=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, $\varphi=45^\circ$.

Задание №3

Диагональ куба равна 15. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в этот куб. В ответе укажите площадь, деленную на π.



Ответ

75

Решение

Диагональ куба с ребром a равна $d = a\sqrt{3}$. По условию $d = 15$, поэтому

$$a = \frac{15}{\sqrt{3}} = 5\sqrt{3}.$$

Шар, вписанный в куб, касается всех его граней, его радиус R равен половине ребра куба:

$$R = \frac{a}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Площадь поверхности шара вычисляется по формуле $S = 4\pi R^2$. Подставляем:

$$S = 4\pi\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 4\pi\cdot\frac{25\cdot 3}{4} = 4\pi\cdot\frac{75}{4} = 75\pi.$$

Следовательно, значение, делённое на π, равно 75.

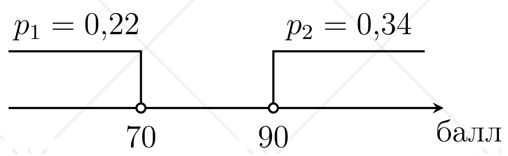
Задание №4

Ученик 11 класса Владимир решает авторский вариант ЕГЭ по математике. Вероятность того, что балл окажется ниже 70, равна 0,22. Вероятность того, что балл окажется выше 90, равна 0,34. Найдите вероятность того, что балл окажется от 70 до 90.

Ответ

0,44

Решение



Вероятность того, что балл окажется в промежутке от 70 до 90, равна

$$p = 1 - 0{,}22 - 0{,}34 = 0{,}44.$$

Задание №5

Две игральные кости бросают одновременно. Какова вероятность того, что сумма очков на кубиках не делится на 4?

Ответ

0,75

Решение

Рассмотрим все комбинации выпавших на кубиках очков. Все они равновероятны.

$$\begin{array}{cccccc}
(1;1) & (2;1) & (3;1) & (4;1) & (5;1) & (6;1)\\
(1;2) & (2;2) & (3;2) & (4;2) & (5;2) & (6;2)\\
(1;3) & (2;3) & (3;3) & (4;3) & (5;3) & (6;3)\\
(1;4) & (2;4) & (3;4) & (4;4) & (5;4) & (6;4)\\
(1;5) & (2;5) & (3;5) & (4;5) & (5;5) & (6;5)\\
(1;6) & (2;6) & (3;6) & (4;6) & (5;6) & (6;6)
\end{array}$$

Неподходящими являются комбинации, сумма чисел в которых делится на 4. Вычеркнем их:

$$\begin{array}{cccccc}
(1;1) & (2;1) & \cancel{(3;1)} & (4;1) & (5;1) & (6;1)\\
(1;2) & \cancel{(2;2)} & (3;2) & (4;2) & (5;2) & \cancel{(6;2)}\\
\cancel{(1;3)} & (2;3) & (3;3) & (4;3) & \cancel{(5;3)} & (6;3)\\
(1;4) & (2;4) & (3;4) & \cancel{(4;4)} & (5;4) & (6;4)\\
(1;5) & (2;5) & \cancel{(3;5)} & (4;5) & (5;5) & (6;5)\\
(1;6) & \cancel{(2;6)} & (3;6) & (4;6) & (5;6) & \cancel{(6;6)}
\end{array}$$

Тогда количество подходящих пар равно 27 и искомая вероятность равна

$$\frac{27}{36}=\frac{3}{4}=0{,}75.$$

Задание №6

Найдите корень уравнения $\sqrt{\dfrac{18}{2x-52}}=\dfrac{1}{8}$.

Ответ

602

Решение

Возведём обе части уравнения в квадрат:

$$\sqrt{\frac{18}{2x-52}}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{18}{2x-52}=\frac{1}{64}$$

Заметим, что ограничение $\dfrac{18}{2x-52}\geqslant 0$ выполняется, так как выражение $\dfrac{18}{2x-52}$ равно положительному числу $\dfrac{1}{64}$.

$$\frac{18}{2x-52}=\frac{1}{64}$$

$$2x-52=18\cdot 64$$

$$2x - 52 = 1152$$
$$2x = 1152 + 52$$
$$2x = 1204$$
$$x = 602$$

Задание №7

Найдите значение выражения $\dfrac{81^{1,2} \cdot 243^{0,8}}{27^{1,6}}$.

Ответ

81

Решение

Воспользуемся свойствами степеней и преобразуем выражение:

$$\frac{81^{1,2} \cdot 243^{0,8}}{27^{1,6}} = \frac{(3^4)^{1,2} \cdot (3^5)^{0,8}}{(3^3)^{1,6}} =$$
$$= \frac{3^{4\cdot 1,2} \cdot 3^{5\cdot 0,8}}{3^{3\cdot 1,6}} = \frac{3^{4,8} \cdot 3^4}{3^{4,8}} =$$
$$= 3^{4,8+4-4,8} = 3^4 = 81.$$

Задание №8

Прямая $y = -12x + 52$ параллельна касательной к графику функции $y = x^3 + 6x^2 + 67$. Найдите абсциссу точки касания.

Ответ

-2

Решение

Пусть x_0 – абсцисса точки касания. Тогда угловой коэффициент касательной в точке x_0 равен значению производной в этой точке. Найдём производную функции $f(x)$ в точке x_0 :

$$f'(x) = \left(x^3 + 6x^2 + 67\right)' = 3x^2 + 12x$$
$$f'(x_0) = 3x_0^2 + 12x_0$$

Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны, значит

$$-12 = 3x_0^2 + 12x_0$$
$$3x_0^2 + 12x_0 + 12 = 0$$
$$x_0^2 + 4x_0 + 4 = 0$$
$$(x_0 + 2)^2 = 0$$
$$x_0 = -2$$

Задание №9

В боковой стенке высокой цилиндрической канистры с топливными отходами у самого дна закреплено сливное отверстие. После его открытия жидкость начинает вытекать из канистры, при этом высота столба жидкости в ней, выраженная в метрах, меняется по закону $H(t) = at^2 + bt + H_0$, где $H_0 = 3$ м – начальный уровень отходов, $a = \frac{1}{12}$ м/мин^2 и $b = -1$ м/мин – постоянные, t – время (в минутах), прошедшее с момента открытия отверстия. В течение какого времени топливные отходы будут вытекать из канистры? Ответ дайте в минутах.

Ответ

6

Решение

Задача сводится к решению квадратного уравнения с дробными коэффициентами.
Из условия известно, что H – это высота столба жидкости в момент времени t.
Нам необходимо найти время t, при котором вся жидкость вытечет из канистры, то есть высота столба жидкости H будет равна нулю. Тогда имеем уравнение:

$$\frac{1}{12}t^2 - t + 3 = 0$$

$$D = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot \frac{1}{12} = 1 - 1 = 0$$

$$t = \frac{1}{\frac{2}{12}} = \frac{1}{\frac{1}{6}} = 6$$

Значит, топливные отходы будут вытекать из канистры в течение 6 минут.

Задание №10

Дирижабль преодолел расстояние 168 км против воздушного потока и затем вернулся обратно в исходную точку. При этом время, затраченное на обратный путь (по потоку), оказалось на 2 часа меньше времени движения против потока. Найдите скорость дирижабля в безветренную погоду, считая скорость ветра постоянной и равной 7 км/ч.

Ответ

35

Решение

Пусть скорость дирижабля в безветренную погоду равняется x км/ч. Составим таблицу:

Часть пути	Скорость, км/ч	Время, ч	Путь, км
По ветру	$x+7$	$\frac{168}{x+7}$	168
Против ветра	$x-7$	$\frac{168}{x-7}$	168

По условию дирижабль затратил на путь по ветру на 2 часа меньше, чем против ветра. Составим уравнение:

$$\frac{168}{x-7} - \frac{168}{x+7} = 2$$

$$\frac{168}{x-7} - \frac{168}{x+7} - 2 = 0$$

$$\frac{168(x+7) - 168(x-7) - 2(x-7)(x+7)}{(x-7)(x+7)} = 0$$

$$\begin{cases} 168(x+7) - 168(x-7) - 2(x-7)(x+7) = 0 \\ x \neq 7 \\ x \neq -7 \end{cases}$$

Решим первое уравнение системы:

$$168(x+7) - 168(x-7) - 2(x-7)(x+7) = 0$$

$$168x + 168 \cdot 7 - 168x + 168 \cdot 7 - 2\left(x^2 - 7^2\right) = 0$$

$$168 \cdot 7 + 168 \cdot 7 - 2x^2 + 98 = 0$$

$$2x^2 = 168 \cdot 14 + 98$$

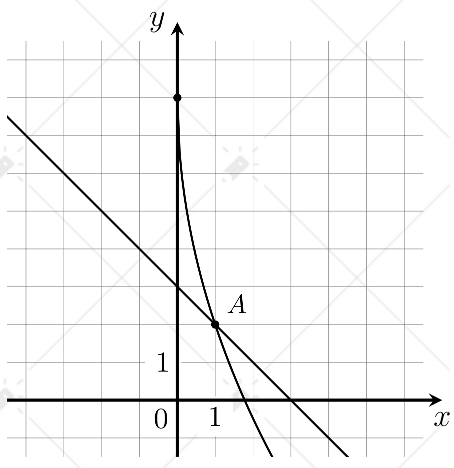
$$x^2 = 84 \cdot 14 + 49 = 1176 + 49 = 1225$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 35 \\ x = -35 \end{array}\right.$$

Корень $x = -35$ не подходит по смыслу задачи, так как $x > 0$. Поэтому скорость дирижабля в безветренную погоду равна 35 км/ч.

Задание №11

На рисунке изображены графики функций $f(x) = b + k\sqrt{x}$ и $g(x) = -x + a$, которые пересекаются в точках A и $B\left(x_0; y_0\right)$. Найдите x_0.



Ответ

25

Решение

График функции $f(x)$ проходит через точки $(0;8)$ и $(1;2)$. Значит, координаты этих точек обращают уравнение функции $f(x)$ в верное равенство. Имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} f(0)=8 \\ f(1)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b+k\sqrt{0}=8 \\ b+k\sqrt{1}=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=8 \\ 8+k=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=8 \\ k=-6. \end{cases}$$

Таким образом,

$$f(x)=8-6\sqrt{x}.$$

График функции $g(x)=-x+a$ проходит через точку $(1;2)$, следовательно,

$$g(1)=2$$
$$-1+a=2.$$
$$a=3$$

Значит,

$$g(x)=-x+3.$$

Чтобы найти абсциссу точки пересечения B, решим уравнение $f(x)=g(x)$:

$$8-6\sqrt{x}=-x+3$$
$$x-6\sqrt{x}+5=0$$

Сделаем замену $t=\sqrt{x}$, где $t\geqslant 0$:

$$t^2-6t+5=0$$
$$(t-1)(t-5)=0$$
$$t=1 \quad \text{или} \quad t=5$$

При $t=1$ получаем, что $x=1$ – это абсцисса точки A. При $t=5$ получаем $x=25$.
Таким образом, $x_0=25$.

Задание №12

Найдите наибольшее значение функции $y = 3\sin x - 5x + 2$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

Ответ

2

Решение

Функция $y = y(x)$ определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Определим участки, на которых функция возрастает или убывает. Для этого найдем ее производную:

$$y' = 3\cos x - 5$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos x = \frac{5}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \varnothing$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков. Так как нулей у производной не существует, то на всем $\mathbb{R}$ она принимает значения одного знака. Подставив $x = 0$, мы понимаем, что $y'(x) < 0$ для всех x.

Следовательно, функция $y = y(x)$ убывает на всем $\mathbb{R}$, значит, принимает наибольшее значение в начале отрезка, то есть в точке $x = 0$:

$$y(0) = 3\sin 0 + 2 = 2$$

Задание №13

а) Решите уравнение $3\operatorname{tg}^4 2x - 4\operatorname{tg}^2 2x + 1 = 0$.

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$.

Ответ

а) $\pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2},\ \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{\pi}{8};\ -\frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{12};\ \frac{\pi}{8}$

Решение

а) Сделаем замену: $\operatorname{tg}^2 2x = t$, $t \geqslant 0$. Тогда уравнение примет вид:

$$3t^2 - 4t + 1 = 0$$

$$D = 4^2 - 4 \cdot 3 = 4 = 2^2$$

$$\left[\begin{aligned} &t_1 = \frac{4+2}{6} = 1 \\ &t_2 = \frac{4-2}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}\right.$$

Сделаем обратную замену:

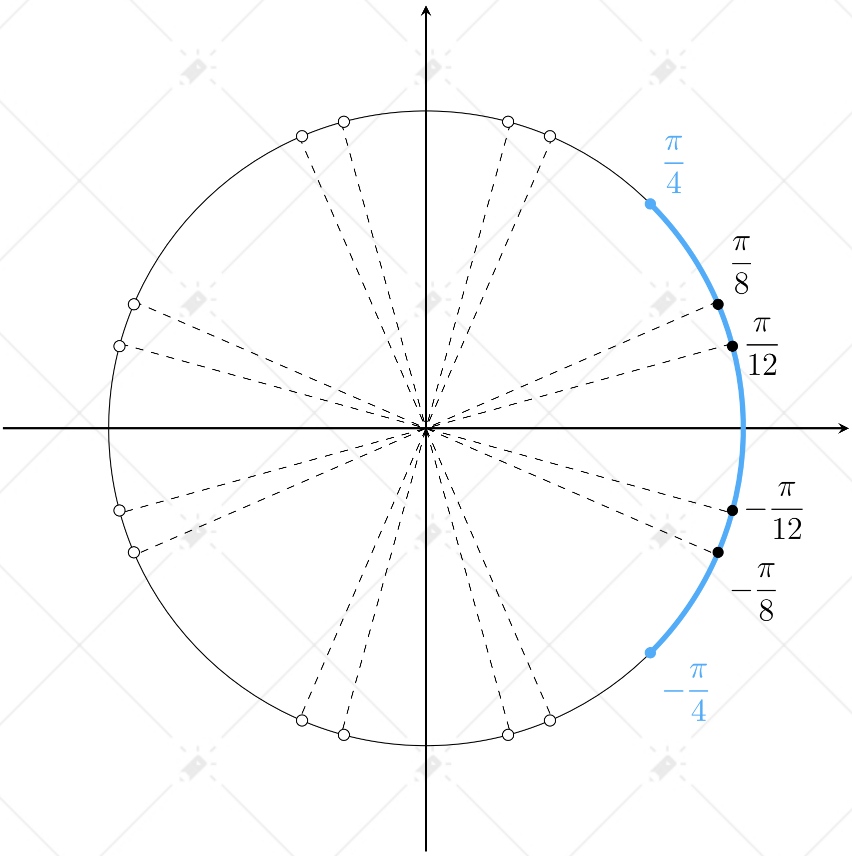
$$\left[\begin{aligned}&\mathrm{tg}^2\ 2x = 1\\&\mathrm{tg}^2\ 2x = \frac{1}{3}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&\mathrm{tg}\ 2x = \pm 1\\&\mathrm{tg}\ 2x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&2x = \pm\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\\&2x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned}&x = \pm\frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\\&x = \pm\frac{\pi}{12} + \frac{\pi k}{2}, k \in \mathbb{Z}\end{aligned}\right.$$

б) Проведём отбор корней на числовой окружности. Отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ лежат точки $-\frac{\pi}{8}$; $-\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{12}$; $\frac{\pi}{8}$.

Задание №14

Диаметр AB нижнего основания цилиндра перпендикулярен диаметру CD его верхнего основания. Высота цилиндра в $\sqrt{2}$ раз больше его радиуса.

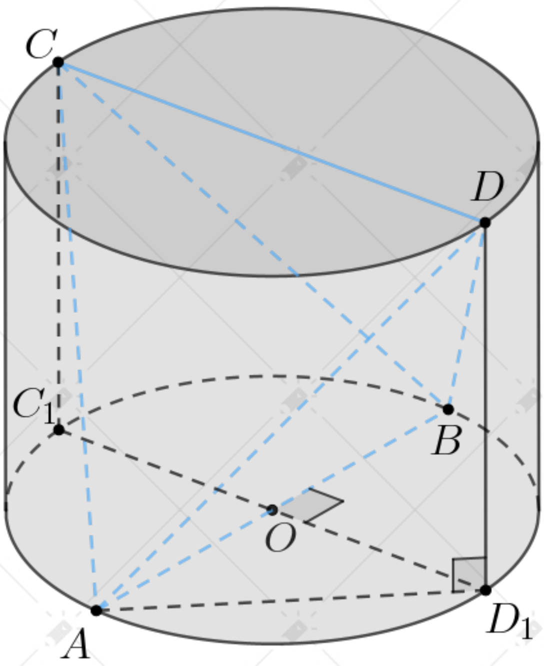
а) Докажите, что $ABCD$ – правильный тетраэдр.

б) Найдите объём цилиндра, если объём тетраэдра $ABCD$ равен 72.

Ответ

б) 108π

Решение



а) Обозначим через O центр нижнего основания цилиндра, а через C_1 и D_1 – ортогональные проекции точек C и D на плоскость нижнего основания.

Так как цилиндр прямой, то точки C_1 и D_1 являются концами диаметра нижнего основания, параллельного диаметру CD. По условию этот диаметр перпендикулярен AB, значит $AB \perp C_1D_1$.

Так как O – центр окружности нижнего основания, то $AO = BO = OC_1 = OD_1 = R$.

Тогда по теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике AOD_1 получаем:

$$AD_1^2 = AO^2 + OD_1^2 = R^2 + R^2 = 2R^2.$$

Так как высота цилиндра равна $R\sqrt{2}$, то $CC_1 = DD_1 = R\sqrt{2}$.

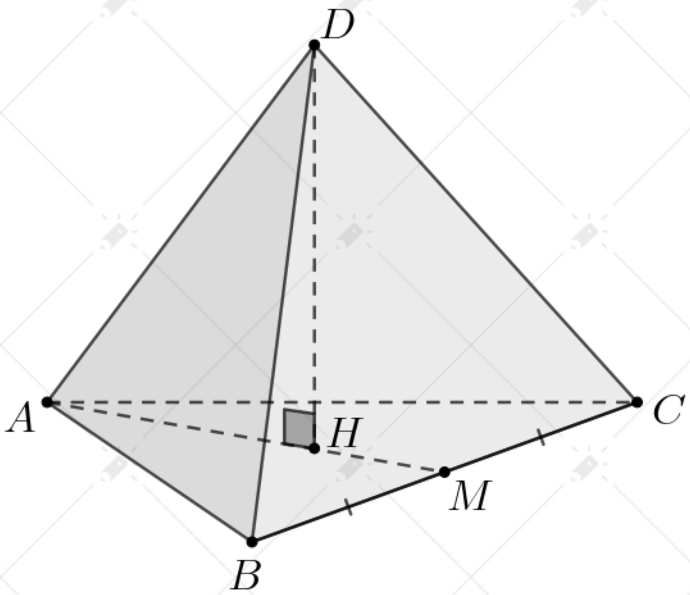
Следовательно, в прямоугольном треугольнике ADD_1 :

$$AD^2 = AD_1^2 + DD_1^2 = 2R^2 + 2R^2 = 4R^2,$$
$$AD = 2R.$$

Аналогично получаем $AC = BC = BD = 2R$.
Кроме того, AB и CD – диаметры оснований, поэтому $AB = CD = 2R$.
Итак, все рёбра тетраэдра $ABCD$ равны:

$$AB = AC = AD = BC = BD = CD = 2R.$$

Значит, тетраэдр $ABCD$ является правильным.



б) Из пункта a) следует, что $ABCD$ – правильный тетраэдр, причем

$$AB = CD = 2R.$$

Воспользуемся формулой объема тетраэдра через два противоположных ребра:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6} \cdot AB \cdot CD \cdot h \cdot \sin\alpha,$$

где $h = \rho(AB,CD)$ – расстояние между прямыми AB и CD, а α – угол между ними.
Обозначим через O_1 – центр верхнего основания. Тогда OO_1 – ось цилиндра, значит, OO_1 перпендикулярна плоскости нижнего основания и плоскости верхнего основания. Следовательно,

$$OO_1 \perp AB, \qquad OO_1 \perp CD.$$

Значит, отрезок OO_1 является общим перпендикуляром к прямым AB и CD, поэтому

$$h = \rho(AB,CD) = OO_1.$$

Но OO_1 равно высоте цилиндра, значит, $h = \sqrt{2}R$.

Так как по условию $AB \perp CD$, то

$$\alpha = 90^\circ, \qquad \sin\alpha = 1.$$

Тогда получаем:

$$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\cdot 2R\cdot 2R\cdot \sqrt{2}R\cdot 1 = \frac{2\sqrt{2}R^3}{3}.$$

По условию $V_{ABCD} = 72$, значит,

$$\frac{2\sqrt{2}R^3}{3} = 72$$
$$2\sqrt{2}R^3 = 216$$
$$\sqrt{2}R^3 = 108$$

Тогда объем цилиндра равен

$$V_{\text{цил}} = \pi R^2\cdot\sqrt{2}R = \sqrt{2}\pi R^3 = 108\pi.$$

Задание №15

Решите неравенство

$$\frac{8x^3-12x^2+6x-1}{16^{x^2}-2\sqrt{2}\cdot 4^{x^2}+2} \leqslant 0.$$

Ответ

$\left(-\infty; -\frac{1}{2}\right)\cup\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

Решение

Преобразуем числитель по формуле куба разности:

$$8x^3-12x^2+6x-1 = (2x)^3-3\cdot(2x)^2+3\cdot 2x-1^3 = (2x-1)^3$$

Преобразуем знаменатель по формуле квадрата разности:

$$16^{x^2}-2\sqrt{2}\cdot 4^{x^2}+2 = \left(4^{x^2}\right)^2-2\cdot 4^{x^2}\cdot\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(4^{x^2}-\sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0$$

Найдем, при каком x знаменатель обращается в ноль:

$$4^{x^2}-\sqrt{2}=0$$
$$2^{2x^2} = 2^{\frac{1}{2}}$$
$$x^2 = \frac{1}{4}$$
$$x = \pm\frac{1}{2}$$

Таким образом, при $x \neq \frac{1}{2}$ и $x \neq -\frac{1}{2}$ знаменатель положителен, следовательно, можно домножить на него обе части неравенства. Тогда получим:

$$(2x-1)^3 \leqslant 0$$

$$2x-1 \leqslant 0$$

$$x \leqslant \frac{1}{2}$$

С учётом ограничений получим

$$x \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right).$$

Задание №16

В июле 2025 года планируется взять кредит на n лет в размере S тыс. рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг увеличивается на 30 тыс. рублей по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом 80 тыс. рублей часть долга.

Известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита на 120 тыс. рублей больше суммы, взятой в кредит. Найдите S.

Ответ

200

Решение

Составим таблицу, отслеживающую изменения долга.

Год	Долг до начисления, тыс. рублей	Долг после начисления, тыс. рублей	Выплата, тыс. рублей	Долг после выплаты, тыс. рублей
2026	S	$S+30$	80	$S-50$
2027	$S-50$	$(S-50)+30$	80	$S-100$
...	...	...	...	...
$2025+k$	$S-50(k-1)$	$S-50(k-1)+30$	80	$S-50k$
...	...	...	...	...
$2025+n$	$S-50(n-1)$	$S-50(n-1)+30$	80	$S-50n$

Так как кредит полностью погашен через n лет, то долг после выплаты в этот год равен нулю. Получаем уравнение:

$$S-50n=0$$

$$S=50n$$

При этом сумма выплат за n лет составляет $80n$ и превышает сумму, взятую в кредит, на 120 тыс. рублей, поэтому

$$80n = S + 120$$

$$80n = 50n + 120$$

$$30n = 120$$

$$n = 4$$

Значит,

$$S = 50n = 50 \cdot 4 = 200.$$

Таким образом, сумма кредита составляет 200 тыс. рублей.

Задание №17

В прямоугольном треугольнике ABC из вершины прямого угла B проведена биссектриса, которая вторично пересекает описанную окружность треугольника ABC в точке L.

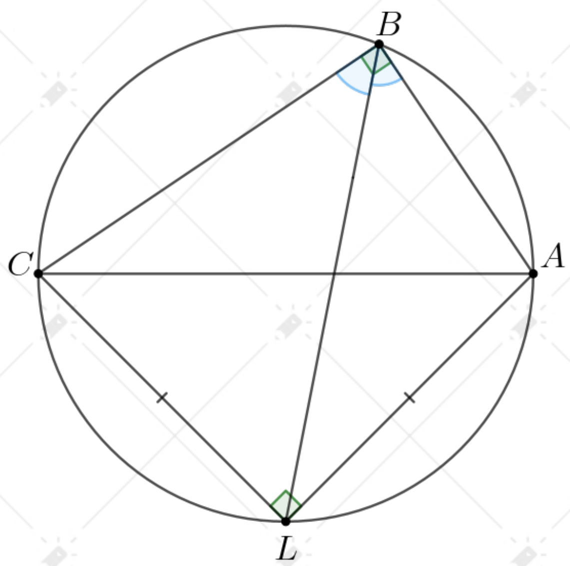
а) Докажите, что гипотенуза треугольника ABC в $\sqrt{2}$ раз больше, чем расстояние от точки L до точки A.

б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $LA = 3$, $LB = 4$.

Ответ

б) $\dfrac{7}{2}$

Решение



а) Так как BL – биссектриса угла ABC, то

$$\angle ABL = \angle LBC.$$

Эти вписанные углы опираются на дуги AL и LC, значит, дуги AL и LC равны. Тогда равны и соответствующие хорды:

$$LA = LC.$$

Так как четырехугольник $ABCL$ вписан в окружность, то сумма его противоположных углов равна 180°. Следовательно,

$$\angle ALC = 180^\circ - \angle ABC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ.$$

Значит, треугольник ALC – прямоугольный равнобедренный, поэтому по теореме Пифагора:

$$AC^2 = LA^2 + LC^2$$
$$AC^2 = LA^2 + LA^2$$
$$AC^2 = 2LA^2$$
$$AC = \sqrt{2}LA.$$

Что и требовалось доказать.

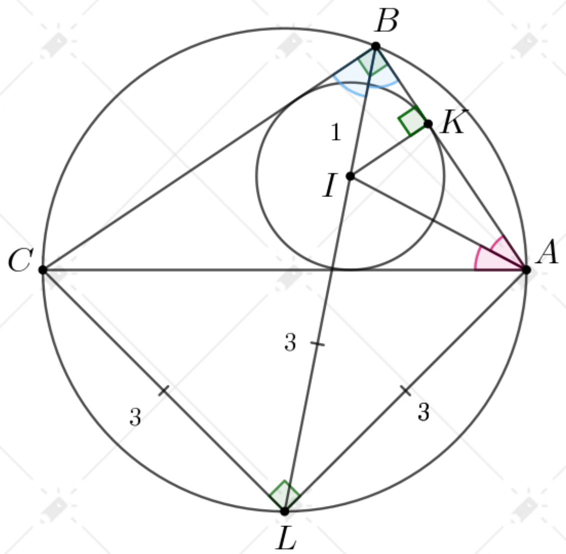
б) Пусть I – центр вписанной окружности треугольника ABC.

Тогда I лежит на биссектрисе BL. Из пункта a) уже известно, что $LA = LC$, а значит, треугольник ALC – прямоугольный равнобедренный. Следовательно,

$$\angle CAL = \angle ACL = 45^\circ.$$

Также BI – биссектриса прямого угла B, а значит

$$\angle CBL = \angle LBA = 45^\circ$$



Докажем, что $LI = LA$.

Так как AI – биссектриса угла BAC, то

$$\angle CAI = \angle BAI = \frac{\angle BAC}{2}.$$

Поэтому

$$\angle IAL = \angle CAL + \angle CAI = 45^\circ + \frac{\angle BAC}{2}.$$

По сумме углов в треугольнике AIB получаем

$$\angle AIB = 180^\circ - \frac{\angle BAC}{2} - 45^\circ = 135^\circ - \frac{\angle BAC}{2}.$$

Так как точки B, I и L лежат на одной прямой, то

$$\angle AIL = 180^\circ - \angle AIB = 180^\circ - \left(135^\circ - \frac{\angle BAC}{2}\right) = 45^\circ + \frac{\angle BAC}{2}.$$

Значит,

$$\angle IAL = \angle AIL.$$

Следовательно, треугольник AIL равнобедренный, поэтому

$$LI = LA.$$

Далее, так как $LA = 3$, то

$$LI = 3.$$

Тогда получаем

$$BI = LB - LI = 4 - 3 = 1.$$

Пусть K – точка касания вписанной окружности со стороной AB. Тогда $IK \perp AB$, $IK = r$, где r – радиус вписанной окружности.

В прямоугольном треугольнике BIK :

$$r = IK = BI \sin 45^\circ = 1 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Из пункта $a)$ получаем

$$AC = \sqrt{2}LA = 3\sqrt{2}.$$

Для прямоугольного треугольника ABC радиус вписанной окружности выражается формулой

$$r = \frac{AB + BC - AC}{2}.$$

Отсюда имеем:

$$AB + BC = AC + 2r = 3\sqrt{2} + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}.$$

Тогда полупериметр равен

$$p = \frac{AB + BC + AC}{2} = \frac{4\sqrt{2} + 3\sqrt{2}}{2} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Следовательно, площадь треугольника ABC равна

$$S = pr = \frac{7\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{2}.$$

Задание №18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 16 + 2ax - a^2 \\ y^2 = 4x^2 \end{cases}$$

имеет ровно четыре решения.

Ответ

$a \in \left(-2\sqrt{5}; -4\right) \cup (-4; 4) \cup \left(4; 2\sqrt{5}\right)$

Решение

Преобразуем второе уравнение системы:

$$y^2 = 4x^2$$

$$y = 2x \quad y = -2x$$

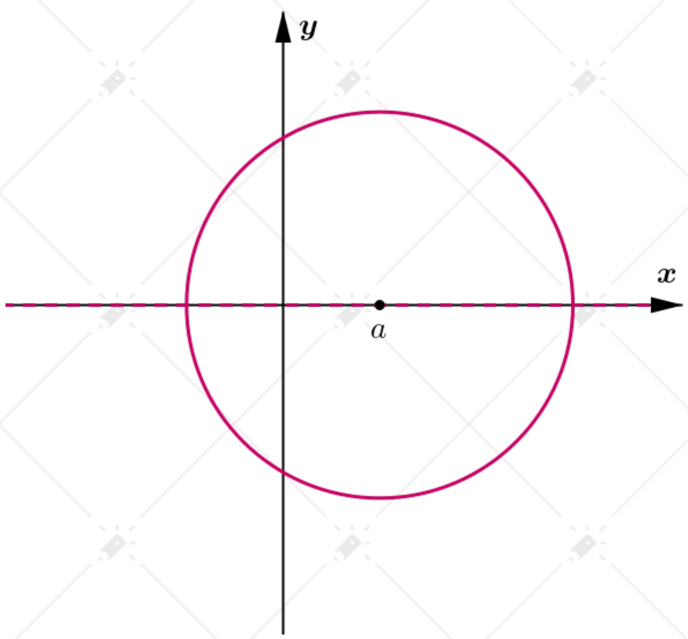
Значит, второе уравнение системы задает пару пересекающихся прямых $y = 2x$ и $y = -2x$, проходящих через точку $(0; 0)$.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$x^2 - 2ax + a^2 + y^2 = 16$$

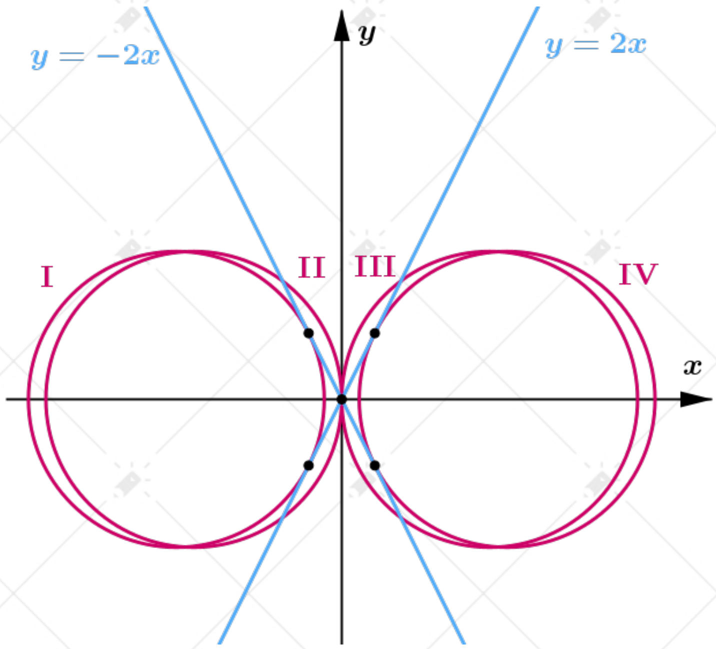
$$(x - a)^2 + y^2 = 16$$

Значит, первое уравнение системы задает окружность с центром в точке $(a; 0)$ и радиусом, равным 4. Центр этой окружности двигается по оси абсцисс в зависимости от значения параметра a.



Начнем двигать окружность слева направо до первого крайнего положения.

- **Случай I**. Окружность касается прямых $y = 2x$ и $y = -2x$. В силу симметрии это произойдет одновременно. В данном положении окружность имеет 2 общие точки с прямыми. До случая I окружность не имеет общих точек с прямыми.
- **Случай II**. Окружность впервые проходит через точку $(0; 0)$. В данном положении окружность имеет 3 точки пересечения с голубым графиком. Между случаями I и II окружность имеет по 2 точки пересечения с каждой прямой.
- **Случай III**. Окружность повторно проходит через точку $(0; 0)$. В данном положении окружность имеет 3 точки пересечения с голубым графиком. Между случаями II и III окружность имеет по 2 точки пересечения с каждой прямой.
- **Случай IV**. Окружность касается прямых $y = 2x$ и $y = -2x$. В силу симметрии это произойдет одновременно. В данном положении окружность имеет 2 общие точки с прямыми. Между случаями III и IV окружность имеет по 2 точки пересечения с каждой прямой. После случая IV окружность не имеет общих точек с прямыми.



Значит, нам подходят следующие промежутки:

$$a \in (\mathrm{I}; \mathrm{II}) \cup (\mathrm{II}; \mathrm{III}) \cup (\mathrm{III}; \mathrm{IV})$$

Найдем значения параметра a для каждого случая.

I, IV Для того, чтобы найти значение a в момент касания окружности и прямых, необходимо определить, когда имеет ровно одно решение система:

$$\begin{cases}(x-a)^2+y^2=16\\ y=2x\end{cases}$$

$$\begin{cases}(x-a)^2+4x^2=16\\ y=2x\end{cases}$$

Найдем значения параметра a, при которых первое уравнение получившейся системы имеет ровно один корень:

$$x^2-2ax+a^2+4x^2=16$$

$$5x^2-2ax+a^2-16=0$$

$$D=(-2a)^2-4\cdot5\cdot\left(a^2-16\right)=4a^2-20a^2+320=0$$

$$a^2=\frac{320}{16}=20$$

$$a_1=-2\sqrt{5}\quad a_2=2\sqrt{5}$$

Случай I происходит, когда абсцисса центра окружности отрицательна, значит, данное положение достигается при $a_1=-2\sqrt{5}$. Случай IV происходит, когда абсцисса центра окружности положительна, значит, данное положение достигается при $a_2=2\sqrt{5}$.

II, III Подставим точку $(0;0)$ в уравнение окружности:

$$(0-a)^2+0^2=16$$

$$a^2=16$$

$$a=\pm4$$

Случай II происходит, когда абсцисса центра окружности отрицательна, значит, данное положение достигается при $a=-4$. Случай III происходит, когда абсцисса центра окружности положительна, значит, данное положение достигается при $a=4$.

Таким образом, исходная система имеет ровно четыре решения при

$$a\in\left(-2\sqrt{5};-4\right)\cup(-4;4)\cup\left(4;2\sqrt{5}\right).$$

Задание №19

У Евгения в лаборатории имеются три колбы с равными массами растворов соли. Концентрации соли в колбах различны и исходные концентрации являются целыми числами процентов. Евгений проводит следующий эксперимент: из первой колбы переливает 100 мл раствора во вторую, затем из второй колбы переливает 100 мл раствора в третью, и наконец, из третьей колбы переливает 100 мл раствора обратно в первую. Известно, что первоначально в каждой колбе было по 500 мл раствора.

а) Может ли после этого концентрация соли в первой колбе оказаться равной 40%, во второй – 30%, в третьей – 20%?

б) Может ли после этого концентрация соли в первой колбе оказаться равной 20%, во второй – 40%, в третьей – 30%?

в) Известно, что после эксперимента концентрации соли в колбах стали равны 20%, 30% и 40% в некотором порядке. Найдите все возможные исходные концентрации растворов в колбах.

Ответ

а) Да, может

б) Нет, не может

в) 45%, 27%, 18% и 15%, 33%, 42%

Решение

Обозначим начальные концентрации соли в колбах через a, b, c (в долях от единицы, то есть $0 \leqslant a, b, c \leqslant 1$). Объём раствора в каждой колбе изначально $M = 500$ мл.

1. Из первой колбы во вторую: в первой остаётся $0{,}8M$ раствора с концентрацией a, во второй становится $1{,}2M$ раствора с концентрацией
$$C_2 = \frac{bM + a \cdot 0{,}2M}{1{,}2M} = \frac{b + 0{,}2a}{1{,}2} = \frac{5b + a}{6}.$$

2. Из второй колбы в третью: из второй отливают $0{,}2M$ раствора с концентрацией C_2, в третьей становится $1{,}2M$ раствора с концентрацией
$$C_3 = \frac{cM + C_2 \cdot 0{,}2M}{1{,}2M} = \frac{c + 0{,}2C_2}{1{,}2} = \frac{5c + C_2}{6} = \frac{30c + 5b + a}{36}.$$

3. Из третьей колбы в первую: из третьей отливают $0{,}2M$ раствора с концентрацией C_3, в первой становится снова M раствора с концентрацией
$$C_1 = \frac{a \cdot 0{,}8M + C_3 \cdot 0{,}2M}{M} = 0{,}8a + 0{,}2C_3 = \frac{4a + C_3}{5} = \frac{145a + 5b + 30c}{180} = \frac{29a + b + 6c}{36}.$$

Для наглядности запишем концентрации в каждой колбе во время переливаний в виде таблицы (все концентрации приведены в долях от единицы):

	Колба 1	**Колба 2**	**Колба 3**
До переливаний	a	b	c
После первого	a	$\frac{a+5b}{6}$	c
После второго	a	$\frac{a+5b}{6}$	$\frac{a+5b+30c}{36}$
После третьего	$\frac{29a+b+6c}{36}$	$\frac{a+5b}{6}$	$\frac{a+5b+30c}{36}$

Итак, конечные концентрации (после трех переливаний) равны:

$$C_1 = \frac{29a+b+6c}{36} \qquad C_2 = \frac{a+5b}{6} \qquad C_3 = \frac{a+5b+30c}{36}.$$

Умножим каждую на 36 (для удобства дальнейшей работы):

$$36C_1 = 29a+b+6c \qquad 36C_2 = 6a+30b \qquad 36C_3 = a+5b+30c.$$

По условию всех трех пунктов конечные концентрации равны 0,2, 0,3 и 0,4 в некотором порядке. Тогда $36C_i$ принимают значения 7,2, 10,8 и 14,4 для $i = 1, 2, 3$ в некотором порядке.

а) Пусть $C_1 = 0{,}4$, $C_2 = 0{,}3$, $C_3 = 0{,}2$. Тогда

$$\begin{cases} 6a+30b = 10{,}8, \\ a+5b+30c = 7{,}2, \\ 29a+b+6c = 14{,}4. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений получаем $c = 0{,}18$. Подставив c и решив систему, получим $a = 0{,}45$ и $b = 0{,}27$. Если перевести проценты, то получим целочисленные значения 45%, 27% и 18%. Значит, такой случай возможен.

б) Пусть $C_1 = 0{,}2$, $C_2 = 0{,}4$, $C_3 = 0{,}3$. Тогда

$$\begin{cases} 6a+30b = 14{,}4, \\ a+5b+30c = 10{,}8, \\ 29a+b+6c = 7{,}2. \end{cases}$$

Из первого и второго уравнений получаем $c = 0{,}28$. Подставив c и решив систему, получим $a = 0{,}175$ и $b = 0{,}445$. Если перевести в проценты, то получим 17,5%, 44,5% и 28%. Из условия исходные концентрации – целые числа процентов. Поскольку здесь они не все нецелые, то такой случай не подходит.

в) Пусть конечные концентрации составляют 20%, 30%, 40% в некотором порядке, исходные концентрации a, b, c – доли от единицы, соответствующие целым процентам. Рассмотрим все 6 перестановок значений 0,2; 0,3; 0,4 для C_1, C_2, C_3 и проверим целочисленность процентов.

- **Случай 1:** $C_1 = 0{,}2, C_2 = 0{,}3, C_3 = 0{,}4$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6a + 30b = 10{,}8 \quad \Rightarrow \quad a + 5b = 1{,}8, \\ a + 5b + 30c = 14{,}4 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}42, \\ 29a + b + 6c = 7{,}2. \end{cases}$$

Подставив выраженное в третье уравнение, получим

$$29(1{,}8 - 5b) + b + 2{,}52 = 7{,}2 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}33,\ a = 0{,}15.$$

Если перевести в проценты, то получим 15%, 33% и 42%. Все проценты целые, значит, случай 1 подходит.

- **Случай 2:** $C_1 = 0{,}2, C_2 = 0{,}4, C_3 = 0{,}3$. Это было рассмотрено в пункте б), где исходные концентрации солей 17,5%, 44,5% и 28%. Так как не все проценты целые, то случай 2 не подходит.

- **Случай 3:** $C_1 = 0{,}3, C_2 = 0{,}2, C_3 = 0{,}4$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6a + 30b = 7{,}2 \quad \Rightarrow \quad a + 5b = 1{,}2, \\ a + 5b + 30c = 14{,}4 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}44, \\ 29a + b + 6c = 10{,}8. \end{cases}$$

Подставив выраженное в третье уравнение, получим

$$29(1{,}2 - 5b) + b + 2{,}64 = 10{,}8 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}185,\ a = 0{,}275.$$

Если перевести в проценты, то получим 27,5%, 18,5% и 44%. Так как не все проценты целые, то случай 3 не подходит.

- **Случай 4:** $C_1 = 0{,}3, C_2 = 0{,}4, C_3 = 0{,}2$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6a + 30b = 14{,}4 \quad \Rightarrow \quad a + 5b = 2{,}4, \\ a + 5b + 30c = 7{,}2 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}16, \\ 29a + b + 6c = 10{,}8. \end{cases}$$

Подставив выраженное в третье уравнение, получим

$$29(2{,}4 - 5b) + b + 0{,}96 = 10{,}8 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}415,\ a = 0{,}325.$$

Если перевести в проценты, то получим 32,5%, 41,5% и 16%. Так как не все проценты целые, то случай 4 не подходит.

- **Случай 5:** $C_1 = 0{,}4, C_2 = 0{,}2, C_3 = 0{,}3$. Тогда имеем систему:

$$\begin{cases} 6a + 30b = 7{,}2 \quad \Rightarrow \quad a + 5b = 1{,}2, \\ a + 5b + 30c = 10{,}8 \quad \Rightarrow \quad c = 0{,}32, \\ 29a + b + 6c = 14{,}4. \end{cases}$$

Подставив выраженное в третье уравнение, получим

$$29(1{,}2 - 5b) + b + 1{,}92 = 14{,}4 \quad \Rightarrow \quad b = 0{,}155,\ a = 0{,}425.$$

Если перевести в проценты, то получим 42,5%, 15,5% и 32%. Так как не все проценты целые, то случай 5 не подходит.

- **Случай 6:** $C_1 = 0{,}4, C_2 = 0{,}3, C_3 = 0{,}2$. Это было рассмотрено в пункте а), где исходные концентрации солей 45%, 27% и 18%. Все проценты целые, значит, случай 6 подходит.

Таким образом, условию целочисленности процентов удовлетворяют только случаи 1 и 6.

Решения авторского варианта «Школково» №14

Полный видеоразбор варианта можно посмотреть здесь!

Задание №1

Ответ: 6

Задание №2

Ответ: 200

Задание №3

Ответ: 12

Задание №4

Ответ: 0,3

Задание №5

Ответ: 3

Задание №6

Ответ: 1

Задание №7

Ответ: 16

Задание №8

Ответ: 6

Задание №9

Ответ: 1

Задание №10

Ответ: 14

Задание №11

Ответ: -18

Задание №12

Ответ: -7

Задание №13

Ответ: а) $2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $2\pi;\ \dfrac{7\pi}{3}$.

Задание №14

Ответ: б) 4

Задание №15

Ответ: $x\in[0;2)$

Задание №16

Ответ: 16

Задание №17

Ответ: б) $\sqrt{21}$

Задание №18

Ответ: $a\in\left\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\right\}$

Задание №19

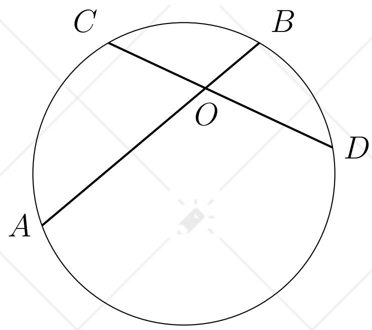
Ответ: а) Да

б) Нет

в) 2021

Задание №1

В окружности хорды AB и CD пересекаются в точке O. Отрезки AO, BO и CO соответственно равны 10, 3 и 5. Найдите DO.



Ответ

6

Решение

По теореме о пересекающихся хордах произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды:

$$AO \cdot OB = CO \cdot OD.$$

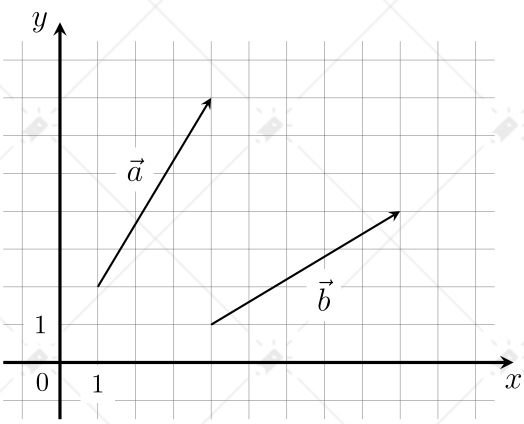
Подставляя известные значения, получаем:

$$10 \cdot 3 = 5 \cdot OD$$
$$30 = 5 \cdot OD$$
$$OD = \frac{30}{5} = 6.$$

Таким образом, длина отрезка DO равна 6.

Задание №2

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение $(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$.



Ответ

200

Решение

Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a} = \{4-1; 7-2\} = \{3; 5\};$$
$$\vec{b} = \{9-4; 4-1\} = \{5; 3\}.$$

Тогда

$$2\vec{a} + \vec{b} = 2 \cdot \{3; 5\} + \{5; 3\} = \{6+5; 10+3\} = \{11; 13\},$$

$$3\vec{a} - \vec{b} = 3 \cdot \{3; 5\} - \{5; 3\} = \{9-5; 15-3\} = \{4; 12\}.$$

Скалярное произведение векторов с координатами $\{x_1; y_1\}$ и $\{x_2; y_2\}$ равно

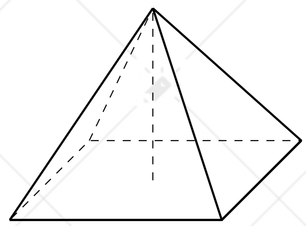
$$x_1x_2 + y_1y_2.$$

Следовательно, искомое скалярное произведение равно

$$(2\vec{a} + \vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 11 \cdot 4 + 13 \cdot 12 = 44 + 156 = 200.$$

Задание №3

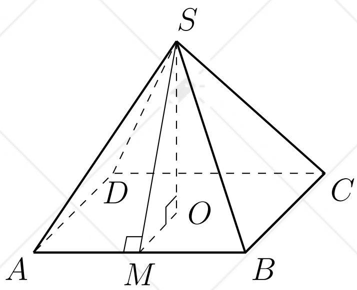
Найдите высоту правильной четырёхугольной пирамиды, стороны основания которой равны 10, а площадь боковой поверхности равна 260.



Ответ

12

Решение



Пирамида правильная, поэтому в её основании лежит квадрат $ABCD$ со стороной 10. Пусть O — центр этого квадрата, тогда SO — высота пирамиды.

По условию площадь боковой поверхности $S_{\text{бок}} = 260$. Боковая поверхность состоит из четырёх равных равнобедренных треугольников, следовательно, площадь одной боковой грани равна

$$S_{\text{гр}} = \frac{S_{\text{бок}}}{4} = \frac{260}{4} = 65.$$

Рассмотрим грань SAB. В ней $AB = 10$. Пусть M — середина ребра AB, тогда SM — медиана, а значит и высота треугольника SAB. Площадь треугольника SAB вычисляется по формуле $S_{\triangle SAB} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot SM$, откуда

$$65 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot SM$$

$$SM = 13.$$

Центр квадрата лежит на пересечении его диагоналей и разбивает их на равные отрезки. Тогда в треугольнике ABC отрезок OM соединяет середины двух сторон, значит, является его средней линией. Длина средней линии равна половине длины основания: $OM = \dfrac{BC}{2} = 5$. По теореме Пифагора в прямоугольном треугольнике SOM находим SO :

$$SO = \sqrt{SM^2 - OM^2} = \sqrt{13^2 - 5^2} = \sqrt{144} = 12.$$

Таким образом, высота пирамиды равна 12.

Задание №4

На фестивале выступают 60 артистов, среди них 18 певцов и 12 танцоров. Порядок выступлений определяется жеребьёвкой. Найдите вероятность того, что пятым будет выступать певец.

Ответ

0,3

Решение

Вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к общему числу исходов, так как каждый артист имеет равные шансы оказаться на пятом месте. Число благоприятных исходов равно количеству певцов, а общее число исходов равно количеству всех артистов. Тогда искомая вероятность:

$$P = \frac{18}{60} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Задание №5

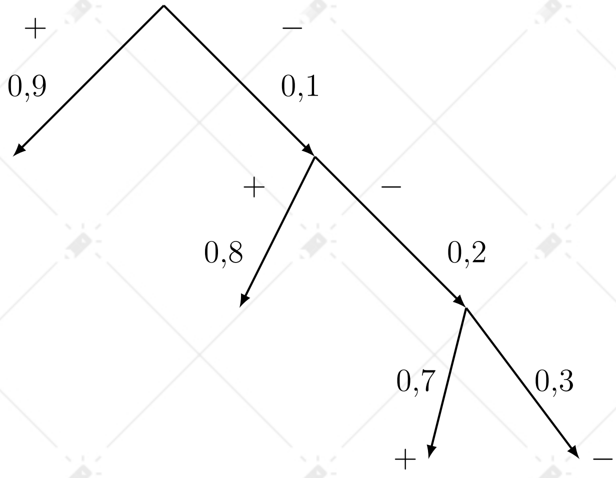
Футболист на тренировке бьёт пенальти до первого забитого гола. Вероятность забить при первом ударе равна 0,9. После каждой неудачной попытки его уверенность снижается, и вероятность забить при следующем ударе уменьшается на 0,1. Какое наименьшее количество ударов нужно предоставить футболисту, чтобы он забил гол с вероятностью не меньше 0,99?

Ответ

3

Решение

Нарисуем частичное дерево вероятностей. Отобразим те ветви, которые заканчиваются первым забитым голом.



Нам необходимо, чтобы вероятность забить гол была не менее 0,99. Значит, вероятность не забить ни разу должна быть не более 0,01. Найдем минимальное количество ударов, при котором это будет выполнено.

Вероятность не попасть при первом ударе равна $1 - 0{,}9 = 0{,}1$. При двух ударах:

$$0{,}1 \cdot (1 - 0{,}8) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 = 0{,}02 > 0{,}01.$$

При трех ударах:

$$0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot (1 - 0{,}7) = 0{,}1 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}006 < 0{,}01.$$

Следовательно, трёх ударов достаточно, чтобы вероятность забить гол была не меньше 0,99.

Задание №6

Найдите корень уравнения $\left(\frac{9}{4}\right)^{x-3} = \frac{16}{81}$.

Ответ

1

Решение

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{x-3} = \frac{16}{81}$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{-(x-3)} = \left(\frac{4}{9}\right)^{2}.$$

Перейдем к равенству показателей степеней:

$$-(x-3) = 2$$

$$-x + 3 = 2$$

$$x = 1.$$

Задание №7

Найдите значение выражения $\dfrac{2^{\sqrt{7}+4}\cdot 4^{\sqrt{7}-2}}{8^{\sqrt{7}-\frac{4}{3}}}$.

Ответ

16

Решение

Приведём все степени к основанию 2, используя $4=2^2$ и $8=2^3$:

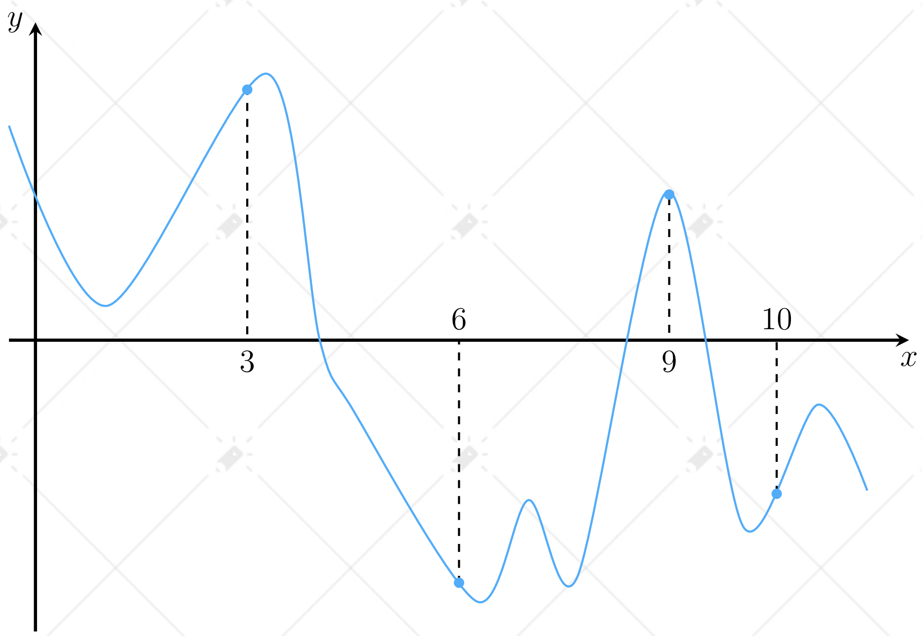
$$\frac{2^{\sqrt{7}+4}\cdot (2^2)^{\sqrt{7}-2}}{(2^3)^{\sqrt{7}-\frac{4}{3}}}=\frac{2^{\sqrt{7}+4}\cdot 2^{2\sqrt{7}-4}}{2^{3\sqrt{7}-4}}=$$

$$=\frac{2^{(\sqrt{7}+4)+(2\sqrt{7}-4)}}{2^{3\sqrt{7}-4}}=\frac{2^{3\sqrt{7}}}{2^{3\sqrt{7}-4}}=$$

$$=2^{3\sqrt{7}-(3\sqrt{7}-4)}=2^4=16.$$

Задание №8

На рисунке изображён график функции $y=f(x)$ и на оси абсцисс отмечены точки 3, 6, 9, 10. В какой из этих точек значение производной наименьшее? В ответе укажите эту точку.



Ответ

6

Решение

Значение производной в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

Точки $x=3$ и $x=10$ принадлежат промежуткам возрастания функции, следовательно, производная функции в этих точках положительна.

Точка $x = 9$ – точка локального максимума функции. В этой точке касательная горизонтальна, поэтому её угловой коэффициент равен нулю. Следовательно, производная функции в точке $x = 9$ равна нулю.
Точка $x = 6$ принадлежит промежутку убывания функции, следовательно, производная функции в этой точке отрицательна.
Таким образом, значение производной в точке $x = 6$ будет наименьшим.

Задание №9

В лаборатории инженеры проектируют новый нагревательный элемент. Мощность, выделяющаяся на проволочном резисторе, в ваттах определяется по формуле $P = I^2R$, где $I = 10$ А — сила тока, а R — сопротивление резистора в омах. Сопротивление проволоки вычисляется по формуле $R = \rho\frac{l}{S}$, где $\rho = 1$ Ом $\cdot$ мм^2/м — удельное сопротивление материала, l — длина проволоки в метрах, а $S = 0{,}5$ мм^2 — площадь её поперечного сечения. Найдите наибольшую длину проволоки (в метрах), позволяющую обеспечить работу резистора в условиях, когда выделяющаяся мощность не будет превышать 200 Вт.

Ответ

1

Решение

Запишем неравенство и подставим данные в формулу:

$$P \leqslant 200$$
$$I^2R \leqslant 200$$
$$10^2 \cdot \rho\frac{l}{S} \leqslant 200$$
$$100 \cdot 1 \cdot \frac{l}{0{,}5} \leqslant 200$$
$$100 \cdot 2l \leqslant 200$$
$$200l \leqslant 200$$
$$l \leqslant 1.$$

Тогда наибольшая длина проволоки, при которой выделяющаяся мощность не превосходит 200 Вт, равна 1 м.

Задание №10

Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 8 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за 3 дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за 4 дня?

Ответ

14

Решение

Примем всю работу, которую нужно выполнить рабочим, за 1. Обозначим за v_1 работу, которую выполняет за день первый рабочий, а за v_2 работу, которую выполняет за день второй рабочий. Составим таблицу:

Рабочий	Скорость, объем р./д.	Время, дни	Объем работы
Первый рабочий	v_1	3	$3 \cdot v_1$
Второй рабочий	v_2	4	$4 \cdot v_2$
Два рабочих	$v_1 + v_2$	8	1

Работая вместе со скоростью $v_1 + v_2$, рабочие выполняют работу за 8 дней. Составим уравнение:

$$8\left(v_1 + v_2\right) = 1.$$

Объем работы, выполняемый первым рабочим за 3 дня, равен объему работы, выполняемому вторым рабочим за 4 дня. Составим уравнение:

$$3 \cdot v_1 = 4 \cdot v_2$$
$$v_2 = \frac{3}{4}v_1.$$

Подставим скорость второго рабочего в первое уравнение:

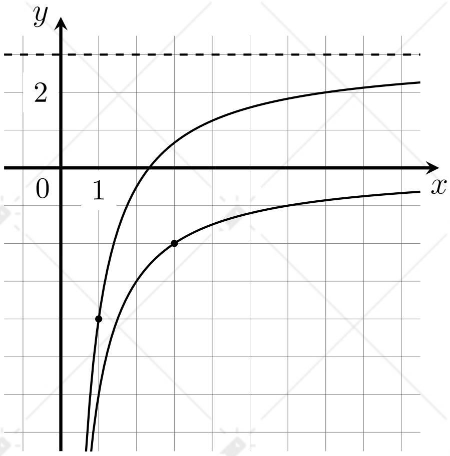
$$8\left(v_1 + \frac{3}{4}v_1\right) = 1$$
$$\frac{8 \cdot 7}{4}v_1 = 1$$
$$14v_1 = 1$$

Тогда количество дней, за которое первый рабочий выполнит работу, работая со скоростью v_1, равно:

$$\frac{1}{v_1} = 14.$$

Задание №11

На рисунке изображены части графиков функций $f(x) = \frac{k}{x}$ и $g(x) = \frac{c}{x} + d$. Найдите ординату точки пересечения графиков этих функций.



Ответ

-18

Решение

Функция $f(x) = \frac{k}{x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$, значит, ей соответствует график, проходящий через точку $(3; -2)$. Оставшийся график соответствует функции $g(x)$. Функция $g(x) = \frac{c}{x} + d$ имеет асимптоту $y = d$, по графику видно, что $y = 3$ является асимптотой для $g(x)$, а значит, $d = 3$.

График функции $y = f(x)$ проходит через точку $(3; -2)$. Следовательно, эта точка удовлетворяет уравнению функции, значит, получаем следующее уравнение:

$$-2 = \frac{k}{3}$$

$$k = -6$$

$$f(x) = -\frac{6}{x}.$$

График функции $y = g(x)$ проходит через точку $(1; -4)$. Подставим ее в уравнение функции, получаем:

$$-4 = \frac{c}{1} + 3$$

$$-4 = c + 3$$

$$c = -7$$

$$g(x) = -\frac{7}{x} + 3$$

Найдем абсциссу точки пересечения графиков:

$$-\frac{6}{x} = -\frac{7}{x} + 3$$

$$\frac{1}{x} = 3$$

$$x = \frac{1}{3}.$$

Теперь найдем ординату точки пересечения, подставив абсциссу в одну из функций:

$$y = -\frac{6}{\frac{1}{3}} = -18$$

Задание №12

Найдите наибольшее значение функции $y = x^7 + 4x^3 - 12$ на отрезке $[-7; 1]$.

Ответ

-7

Решение

Функция определена при всех $x \in \mathbb{R}$. Исследуем функцию и найдем ее промежутки возрастания и убывания, для этого найдем ее производную:

$$y' = 7x^6 + 12x^2$$

Найдем нули производной:

$$y' = 0$$

$$7x^6 + 12x^2 = 0$$

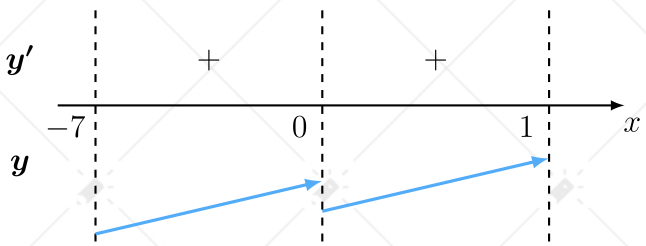
$$x^2(7x^4 + 12) = 0$$

Так как $x^4 \geqslant 0$, то $7x^4 + 12 > 0$. Тогда можем поделить на этот множитель:

$$x^2 = 0$$

$$x = 0$$

Нули производной и точки, в которых она не существует, разбивают область определения производной на промежутки, на каждом из которых она непрерывна и принимает значения одного знака. Найдем знаки производной на каждом из таких промежутков. Заметим, что по условию нас интересует только отрезок $[-7; 1]$.



При $x \in [-7; 1]$ производная неотрицательна, то есть функция возрастает на всем отрезке.

Следовательно, на отрезке $[-7;1]$ наибольшее значение достигается в точке $x=1$, и оно равно

$$y(1)=1+4-12=-7.$$

Задание №13

а) Решите уравнение $\log_2(2\sqrt{3}\sin x+2\cos x)+\log_2(6-2\sqrt{3}\sin x-2\cos x)=3.$

б) Найдите все его корни, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3}+2\pi k;\ \dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$ б) $2\pi;\ \dfrac{7\pi}{3}$.

Решение

а) ОДЗ:

$$\begin{cases}2\sqrt{3}\sin x+2\cos x>0\\ 6-2\sqrt{3}\sin x-2\cos x>0\end{cases}$$

Преобразуем на ОДЗ:

$$\log_2(2\sqrt{3}\sin x+2\cos x)+\log_2(6-2\sqrt{3}\sin x-2\cos x)=3$$
$$\log_2\Big((2\sqrt{3}\sin x+2\cos x)(6-2\sqrt{3}\sin x-2\cos x)\Big)=3$$
$$(2\sqrt{3}\sin x+2\cos x)(6-2\sqrt{3}\sin x-2\cos x)=8$$
$$4(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(3-\sqrt{3}\sin x-\cos x)=8$$
$$(\sqrt{3}\sin x+\cos x)(3-\sqrt{3}\sin x-\cos x)=2$$

Пусть $t=\sqrt{3}\sin x+\cos x$. После замены уравнение примет вид:

$$t(3-t)=2$$
$$-t^2+3t-2=0$$
$$t^2-3t+2=0$$
$$t_1=1;\ t_2=2$$

Из ОДЗ следует, что $0<t<3$. Значит, оба корня подходят. Преобразуем выражение по методу вспомогательного аргумента:

$$\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x\right)=2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

Обратная замена:

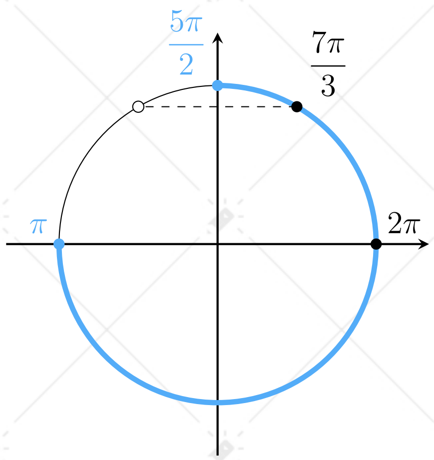
$$\left[\begin{array}{l}2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1\\ 2\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=2\end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{1}{2} \\ \sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)=1 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x+\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\dfrac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ x=\dfrac{\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\pi; \dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки 2π; $\dfrac{7\pi}{3}$.

Задание №14

Дана правильная четырёхугольная пирамида $SABCD$.

а) Докажите, что $SC \perp BD$.

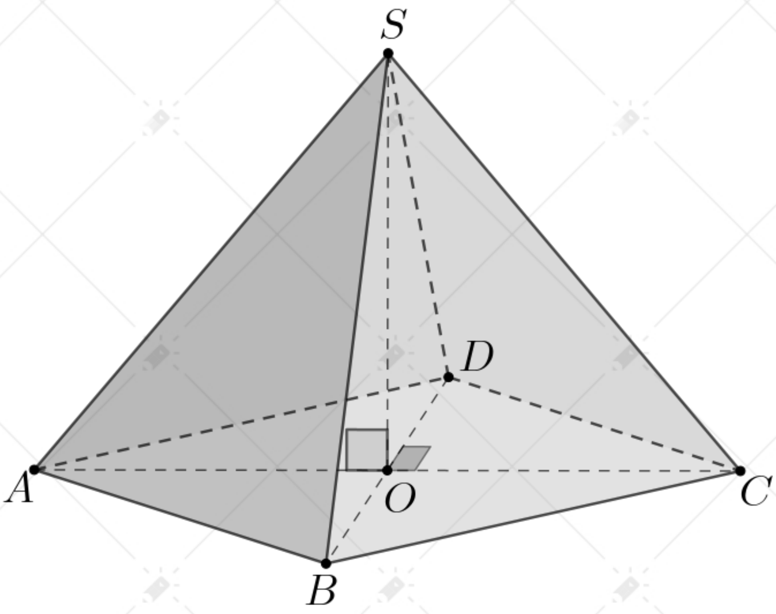
б) Найдите расстояние от точки B до плоскости SCD, если все ребра пирамиды равны $2\sqrt{6}$.

Ответ

б) 4

Решение

Обозначим через O центр квадрата $ABCD$. По условию пирамида правильная, следовательно, $SO \perp (ABCD)$.



а) Проекцией прямой SC на плоскость основания является прямая OC. Но точка O лежит на диагонали AC, значит $OC \subset AC$. Так как в квадрате диагонали перпендикулярны, то $AC \perp BD$, а значит $OC \perp BD$.

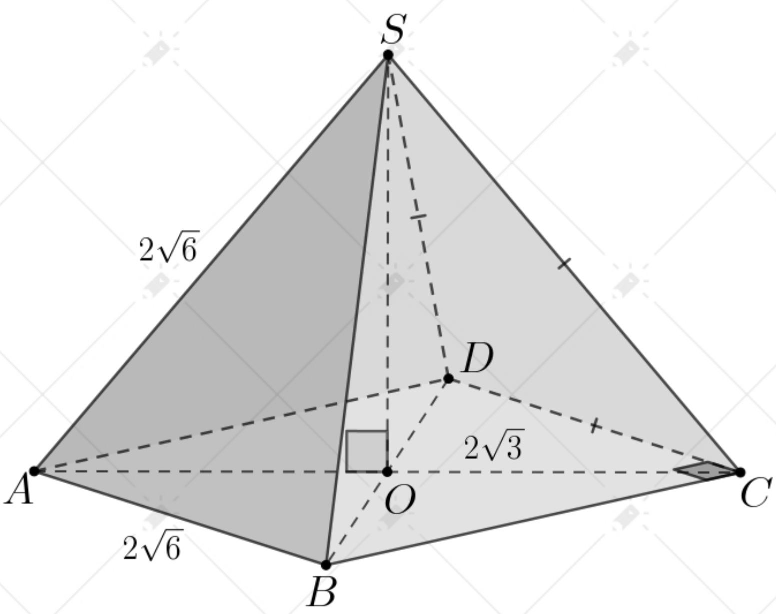
Поскольку $SO \perp (ABCD)$, то по теореме о трёх перпендикулярах из $OC \perp BD$ следует, что

$$SC \perp BD.$$

Что и требовалось доказать.

б) Рассмотрим основание – квадрат $ABCD$. Диагональ квадрата равна $a\sqrt{2}$, где a – сторона, тогда

$$AC = BD = 2\sqrt{6} \cdot \sqrt{2} = 4\sqrt{3}.$$



Так как O – центр квадрата, то

$$OA = \frac{AC}{2} = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}.$$

Кроме того, по условию

$$SA = 2\sqrt{6}.$$

Тогда в прямоугольном треугольнике $\triangle SAO$

$$SO^2 = SA^2 - OA^2 = (2\sqrt{6})^2 - (2\sqrt{3})^2 = 24 - 12 = 12,$$
$$SO = 2\sqrt{3}.$$

Найдем объем тетраэдра $BSCD$. В качестве основания возьмем треугольник $\triangle BCD$. Так как $BC \perp CD$, то

$$S_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot CD = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{6} \cdot 2\sqrt{6} = 12.$$

Высота этого тетраэдра, опущенная из точки S на плоскость (BCD), равна SO, так как плоскость (BCD) совпадает с плоскостью основания пирамиды $SABCD$. Поэтому

$$V_{BSCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{BCD} \cdot SO = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 2\sqrt{3} = 8\sqrt{3}.$$

Теперь рассмотрим треугольник $\triangle SCD$. Так как

$$SC = SD = CD = 2\sqrt{6},$$

то треугольник $\triangle SCD$ – равносторонний. Тогда по известной формуле площади равностороннего треугольника

$$S_{SCD} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{(2\sqrt{6})^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}.$$

Пусть h – расстояние от точки B до плоскости (SCD). Тогда тот же объем равен

$$V_{BSCD} = \frac{1}{3} \cdot S_{SCD} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot 6\sqrt{3} \cdot h = 2\sqrt{3}\, h.$$

Следовательно,

$$2\sqrt{3}\, h = 8\sqrt{3},$$
$$h = 4.$$

Задание №15

Решите неравенство $\log_{\frac{1}{3}} \left(\sqrt{9x - x^2} + 3\right) > \log_3 \left(\dfrac{27}{\sqrt{9x - x^2} + \sqrt{5 - x^2} + 2}\right) - 3.$

Ответ

$x \in [0;2)$

Решение

ОДЗ:

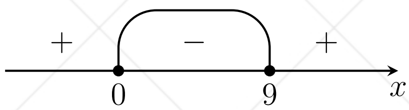
$$\begin{cases} 9x - x^2 \geqslant 0 \\ \sqrt{9x-x^2}+3>0 \\ \sqrt{9x-x^2}+\sqrt{5-x^2}+2 \neq 0 \\ \dfrac{27}{\sqrt{9x-x^2}+\sqrt{5-x^2}+2}>0 \\ 5-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

В силу того, что $\sqrt{a} \geqslant 0$, при $a \geqslant 0$. То данная система равносильная следующей:

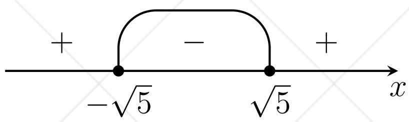
$$\begin{cases} 9x - x^2 \geqslant 0 \\ 5-x^2 \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x-9) \leqslant 0 \\ \left(x-\sqrt{5}\right)\left(x+\sqrt{5}\right) \leqslant 0 \end{cases}$$

Решим первое неравенство методом интервалов:



Решим второе неравенство методом интервалов:



То есть

$$\begin{cases} 0 \leqslant x \leqslant 9. \\ -\sqrt{5} \leqslant x \leqslant \sqrt{5}. \end{cases}$$

Итоговое ОДЗ:

$$0 \leqslant x \leqslant \sqrt{5}.$$

Преобразуем неравенство:

$$-\log_3\left(\sqrt{9x-x^2}+3\right) > \log_3 27 - \log_3\left(\sqrt{9x-x^2}+\sqrt{5-x^2}+2\right) - 3,$$

$$-\log_3\left(\sqrt{9x-x^2}+3\right) > -\log_3\left(\sqrt{9x-x^2}+\sqrt{5-x^2}+2\right),$$

$$\log_3\left(\sqrt{9x-x^2}+3\right) < \log_3\left(\sqrt{9x-x^2}+\sqrt{5-x^2}+2\right),$$

$$\sqrt{9x-x^2}+3 < \sqrt{9x-x^2}+\sqrt{5-x^2}+2,$$

$$3 < \sqrt{5 - x^2} + 2,$$

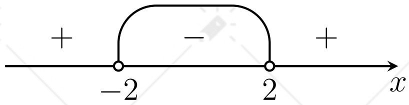
$$\sqrt{5 - x^2} > 1,$$

$$5 - x^2 > 1,$$

$$x^2 < 4,$$

$$(x - 2)(x + 2) < 0.$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Пересекая с ОДЗ, получаем:

$$0 \leqslant x < 2.$$

Задание №16

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму S млн рублей на 5 лет. Условия его возврата таковы:

– каждый январь сумма долга увеличивается на процентную ставку;

– в первый год процентная ставка равна $r\%$;

– в каждый последующий год процентная ставка уменьшается на 2 процентных пункта;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– к июлю 2031 года кредит должен быть полностью погашен.

Найдите r, если известно, что сумма всех выплат составила 140% от суммы кредита.

Ответ

16

Решение

Составим таблицу выплат:

Год	Долг до начисления %	Долг после начисления %	Выплата	Долг после выплаты
2027	S	$S + S \cdot \dfrac{r}{100}$	$\dfrac{S}{5} + S \cdot \dfrac{r}{100}$	$\dfrac{4S}{5}$
2028	$\dfrac{4S}{5}$	$\dfrac{4S}{5} + \dfrac{4S}{5} \cdot \dfrac{r-2}{100}$	$\dfrac{S}{5} + \dfrac{4S}{5} \cdot \dfrac{r-2}{100}$	$\dfrac{3S}{5}$
2029	$\dfrac{3S}{5}$	$\dfrac{3S}{5} + \dfrac{3S}{5} \cdot \dfrac{r-4}{100}$	$\dfrac{S}{5} + \dfrac{3S}{5} \cdot \dfrac{r-4}{100}$	$\dfrac{2S}{5}$
2030	$\dfrac{2S}{5}$	$\dfrac{2S}{5} + \dfrac{2S}{5} \cdot \dfrac{r-6}{100}$	$\dfrac{S}{5} + \dfrac{2S}{5} \cdot \dfrac{r-6}{100}$	$\dfrac{S}{5}$
2031	$\dfrac{S}{5}$	$\dfrac{S}{5} + \dfrac{S}{5} \cdot \dfrac{r-8}{100}$	$\dfrac{S}{5} + \dfrac{S}{5} \cdot \dfrac{r-8}{100}$	0

Найдем сумму всех выплат:

$$\left(\frac{S}{5}+S\cdot\frac{r}{100}\right)+\left(\frac{S}{5}+\frac{4S}{5}\cdot\frac{r-2}{100}\right)+\ldots+\left(\frac{S}{5}+\frac{S}{5}\cdot\frac{r-8}{100}\right)=$$
$$=S+S\cdot\frac{r}{100}+\frac{4S}{5}\cdot\frac{r-2}{100}+\frac{3S}{5}\cdot\frac{r-4}{100}+\frac{2S}{5}\cdot\frac{r-6}{100}+\frac{S}{5}\cdot\frac{r-8}{100}=$$
$$=S+\frac{S}{500}\cdot(5r+4r-8+3r-12+2r-12+r-8)=S+\frac{S}{500}\cdot(15r-40).$$

По условию она составляет 140% от суммы, взятой в кредит. То есть имеем уравнение:

$$S+\frac{S}{500}\cdot(15r-40)=1{,}4S$$
$$\frac{S}{500}\cdot(15r-40)=0{,}4S$$
$$15r-40=200$$
$$15r=240$$
$$r=16.$$

Задание №17

Две касающиеся внешним образом окружности вписаны в угол, равный 60°.

а) Докажите, что точки касания окружностей со сторонами угла образуют равнобедренную трапецию.

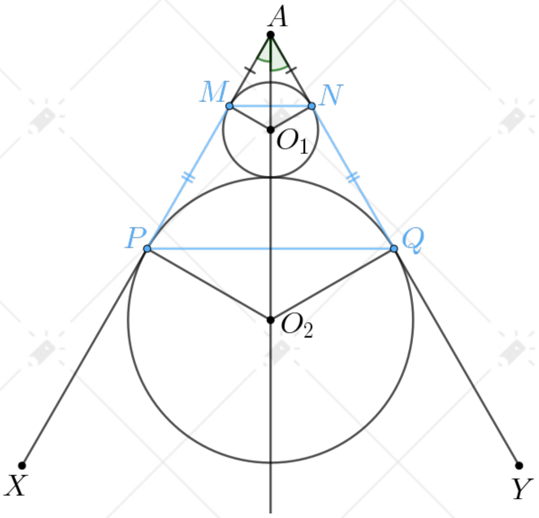
б) Найдите диагональ трапеции, образованной точками касания, если радиус меньшей окружности равен 1.

Ответ

б) $\sqrt{21}$

Решение

Обозначим вершину угла через A, стороны угла – через AX и AY. Пусть меньшая окружность касается сторон AX и AY в точках M и N, а большая – в точках P и Q соответственно. Обозначим центры меньшей и большей окружностей через O_1 и O_2.



а) Так как окружность касается сторон угла $\angle XAY$, то её центр лежит на биссектрисе этого угла. Значит, точки O_1 и O_2 лежат на биссектрисе угла XAY.
Отрезки касательных, проведенные к окружности из одной точки, равны, поэтому

$$AM = AN, \qquad AP = AQ.$$

Отсюда

$$\frac{AM}{AP} = \frac{AN}{AQ}.$$

Так как точки M и P лежат на стороне AX, а точки N и Q – на стороне AY, то $M \in AP$, $N \in AQ$. Следовательно, в треугольнике APQ точки M и N делят стороны AP и AQ в одинаковом отношении, считая от вершины A. Значит, по обратной теореме о пропорциональных отрезках

$$MN \parallel PQ.$$

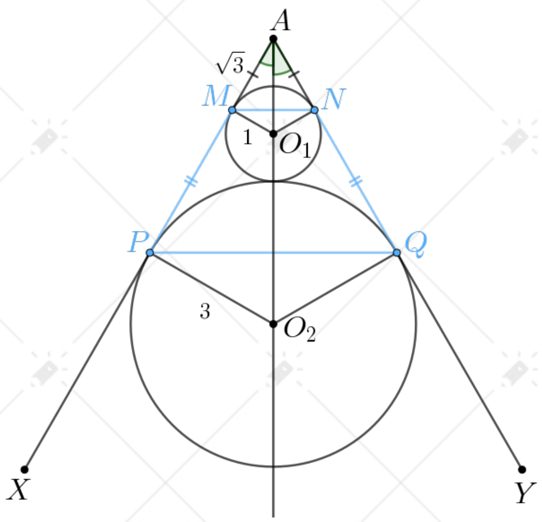
Следовательно, четырёхугольник $MPQN$ – трапеция.
Кроме того,

$$MP = AP - AM, \qquad NQ = AQ - AN.$$

Так как $AM = AN$ и $AP = AQ$, то

$$MP = NQ.$$

Следовательно, трапеция $MPQN$ равнобедренная.
Что и требовалось доказать.
б) Пусть радиус большей окружности равен R.



Так как $\angle XAY = 60^\circ$ и центр каждой окружности лежит на биссектрисе угла, то

$$\angle NAO_1 = \angle MAO_1 = 30^\circ.$$

Рассмотрим треугольник ANO_1. Так как N – точка касания окружности со стороной AY, то радиус O_1N перпендикулярен касательной AY. Поскольку $AN \subset AY$, получаем

$$O_1N \perp AN.$$

Значит, треугольник ANO_1 прямоугольный. Тогда

$$\sin 30^\circ = \frac{O_1N}{AO_1} = \frac{1}{AO_1},$$

откуда

$$AO_1 = 2.$$

Аналогично, рассматривая прямоугольный треугольник AQO_2, получаем

$$AO_2 = 2R.$$

Так как окружности касаются внешним образом, то

$$O_1O_2 = 1 + R.$$

С другой стороны, точки A, O_1 и O_2 лежат на одной прямой, поэтому

$$O_1O_2 = AO_2 - AO_1 = 2R - 2,$$
$$1 + R = 2R - 2,$$
$$R = 3.$$

Теперь найдём длины отрезков касательных от точки A.
Рассмотрим треугольник AO_1M. Так как M – точка касания меньшей окружности со стороной AX, то радиус O_1M перпендикулярен касательной AX. Поскольку $AM \subset AX$, получаем

$$O_1M \perp AM.$$

Значит, треугольник AO_1M прямоугольный. По теореме Пифагора

$$AM^2 = AO_1^2 - O_1M^2,$$
$$AM^2 = 4 - 1 = 3,$$
$$AM = \sqrt{3}.$$

Аналогично для большей окружности: треугольник AQO_2 прямоугольный, поэтому

$$AQ^2 = AO_2^2 - O_2Q^2,$$
$$AQ^2 = 36 - 9 = 27,$$
$$AQ = 3\sqrt{3}.$$

Так как точки M и Q лежат на сторонах угла XAY, то

$$\angle MAQ = 60^\circ.$$

Рассмотрим треугольник AMQ. По теореме косинусов

$$MQ^2 = AM^2 + AQ^2 - 2 \cdot AM \cdot AQ \cdot \cos 60^\circ,$$
$$MQ^2 = 3 + 27 - 2 \cdot \sqrt{3} \cdot 3\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2},$$
$$MQ^2 = 30 - 9 = 21,$$
$$MQ = \sqrt{21}.$$

Задание №18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение

$$\sqrt{x^2 - 6x + 13} \cdot \left(x^2 - 2a^2x + a^4 + 1\right) = \log_2 \left(-x^2 + 6x - 5\right)$$

имеет ровно одно решение.

Ответ

$a \in \left\{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right\}$

Решение

Преобразуем подкоренное выражение

$$x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 9 + 4 = (x-3)^2 + 4 \geqslant 4.$$

Значит, подкоренное выражение всегда положительное, при этом $\sqrt{x^2 - 6x + 13} \geqslant \sqrt{4} = 2$.
Преобразуем выражение, стоящее в скобках

$$x^2 - 2a^2x + a^4 + 1 = \left(x - a^2\right)^2 + 1 \geqslant 1.$$

Следовательно, для левой части уравнения имеем:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 13} \cdot \left(x^2 - 2a^2x + a^4 + 1\right) \geqslant 2 \cdot 1 = 2.$$

Преобразуем подлогарифмическое выражение

$$-x^2 + 6x - 5 = -\left(x^2 - 6x + 9\right) + 4 = -(x-3)^2 + 4 \leqslant 4.$$

Следовательно для правой части уравнения имеем:

$$\log_2 \left(-x^2 + 6x - 5\right) \leqslant \log_2 4 = 2.$$

Значит, равенство между левой и правой частью может достигаться только в случае, когда и левая и правая часть равна 2. Получаем систему

$$\begin{cases} \sqrt{x^2-6x+13}=2 \\ x^2-2a^2x+a^4+1=1 \\ \log_2(-x^2+6x-5)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=3 \\ x=a^2 \\ x=3 \end{cases}$$

Получаем

$$a^2=3$$
$$a=\pm\sqrt{3}.$$

Задание №19

Дано 2026-значное натуральное число, в записи которого используются только цифры 2, 0 и 6, причём каждая из этих трёх цифр встречается хотя бы один раз.

а) Может ли это число делиться на 9?

б) Может ли это число делиться на 9 и иметь в записи ровно 2020 нулей?

в) Какое наибольшее количество нулей в записи может иметь это число, если оно делится на 9?

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 2021

Решение

Обозначим через a, b, c количество цифр 2, 0, 6 в нашем числе соответственно. По условию $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$, $c \geqslant 1$ и $a+b+c=2026$.

а) Число делится на 9 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 9. Сумма цифр нашего числа равна

$$S=2a+0\cdot b+6c=2a+6c=2(a+3c).$$

Возьмём, например, $a=6$, $c=1$. Тогда

$$b=2026-6-1=2019.$$

При этом сумма цифр нашего числа равна

$$S=2\cdot 6+6\cdot 1=12+6=18=2\cdot 9.$$

Число 18 делится на 9, значит, число, составленное из шести двоек, одной шестерки и 2019-ти нулей будет делиться на 9. Например, подойдет число $2222226\underbrace{00\ldots000}_{2019\text{ нулей}}$.

б) Если число имеет 2020 нулей, то $a + c = 6$.

Число делится на 9 тогда и только тогда, когда его сумма цифр делится на 9. Сумма цифр нашего числа равна

$$S = 2a + 0 \cdot b + 6c = 2a + 6c = 2(a + 3c).$$

При этом S делится на 9, значит, $2(a + 3c)$ делится на 9, значит, $(a + 3c)$ делится на 9.

Пусть $a + 3c = 9k$, причём $k \in \mathbb{Z}$. Заметим, что $3c$ и $9k$ делятся на 3, значит, a тоже делится на 3. При этом $a + c = 6$ и $a \geqslant 1$, $c \geqslant 1$. Следовательно, $a = 3$. Тогда $c = 3$. Значит,

$$S = 2(a + 3c) = 2 \cdot (3 + 3 \cdot 3) = 24.$$

Противоречие: число 24 не делится на 9. Тогда число из условия не может делиться на 9 и иметь в записи ровно 2020 нулей.

в) Переформулируем вопрос. Нам нужно узнать какое может быть наименьшее суммарное количество двоек и шестерок, если число из условия делится на 9.

Тогда нужно найти наименьшее значение $a + c$ при условии, что $a + 3c$ делится на 9. Мы знаем, что $a \geqslant 1$ и $c \geqslant 1$. Также из предыдущего пункта мы знаем, что если $a + 3c$ делится на 9, то a делится на 3. Значит, 3 – наименьшее возможное значение a. Начнем перебор по значению c при условии, что $a = 3$.

Пусть $c = 1$. Тогда

$$a + 3c = 3 + 3 \cdot 1 = 6 \not\vdots\, 9.$$

Пусть $c = 2$. Тогда

$$a + 3c = 3 + 3 \cdot 2 = 9 \,\vdots\, 9.$$

Таким образом, при $a = 3$ получили вариант, при котором $a + c = 5$.

Следующее значение a – это 6. В таком случае $a + c \geqslant 7$. Значит, если число делится на 9, то $a + c \geqslant 5$. Следовательно, такое число не может иметь в записи более $2026 - 5 = 2021$ нуля.

Для примера на 2021 ноль подойдет число $22266\underbrace{00\ldots000}_{2021\text{ ноль}}$.