

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

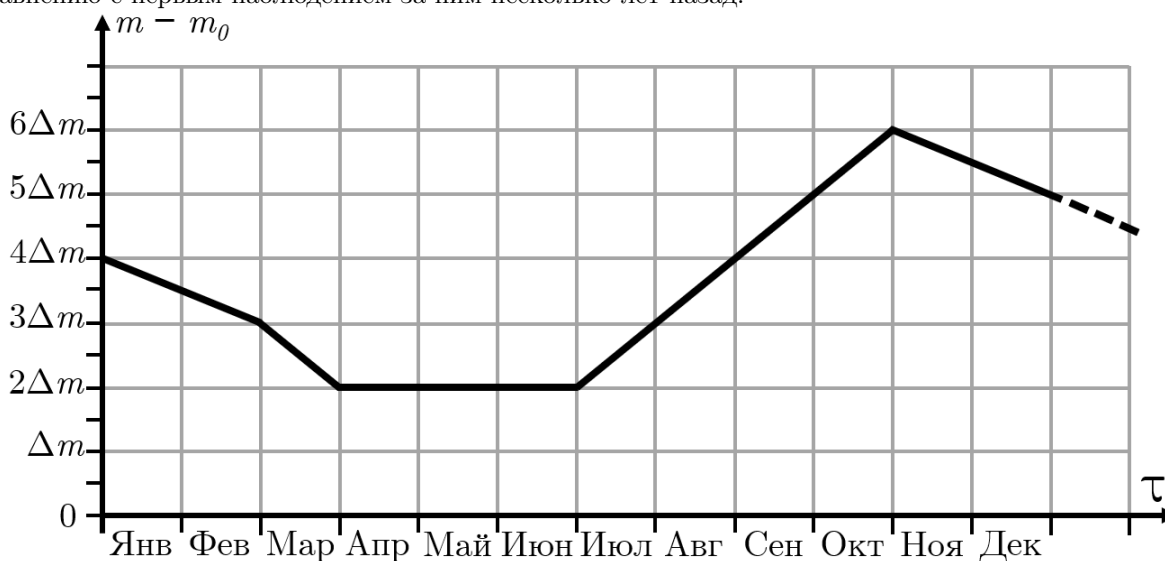
Задание 1. Вариант 1. Овца привязана верёвкой длиной L к колышку на земле. Она съедает всю доступную траву вокруг за 1 час. Ягнёнок ест траву в 2 раза медленнее.

- а) За сколько часов съедает всю доступную траву вокруг себя ягнёнок, привязанный такой же верёвкой?
- б) За сколько минут съедают всю доступную траву вокруг себя ягнёнок и овца, привязанные такими же верёвками к одному колышку?
- в) За сколько часов съедает всю доступную траву вокруг себя овца, привязанная верёвкой длиной $2L$?
- г) Баран ест в 3 раза быстрее ягнёнка. Два барана, привязанные верёвками длиной L к одному колышку съедают всю доступную траву вокруг себя за 2 часа. Какую часть времени бараны дерутся между собой, если всё, что они делают — это едят и дерутся? Ответ запишите в виде обыкновенной дроби (например, $12/17$).

Матрица параметров к вариантам задания 1.

№ варианта	Время поедания травы овцой, ч	Отношение скоростей поедания травы барана и ягнёнка	Время поедания травы 2 баранами, ч
1	1	3	2
2	1	3	4
3	1	3	5
4	1	4	2

Задание 2. Вариант 1. Медведи некоторых видов впадают зимой в спячку. За это время они могут значительно потерять в своей массе. Дан график зависимости прироста массы тела одного медведя от времени в течение календарного года по сравнению с первым наблюдением за ним несколько лет назад.



Здесь $m_0 = 150$ кг, а $\Delta m = 10$ кг.

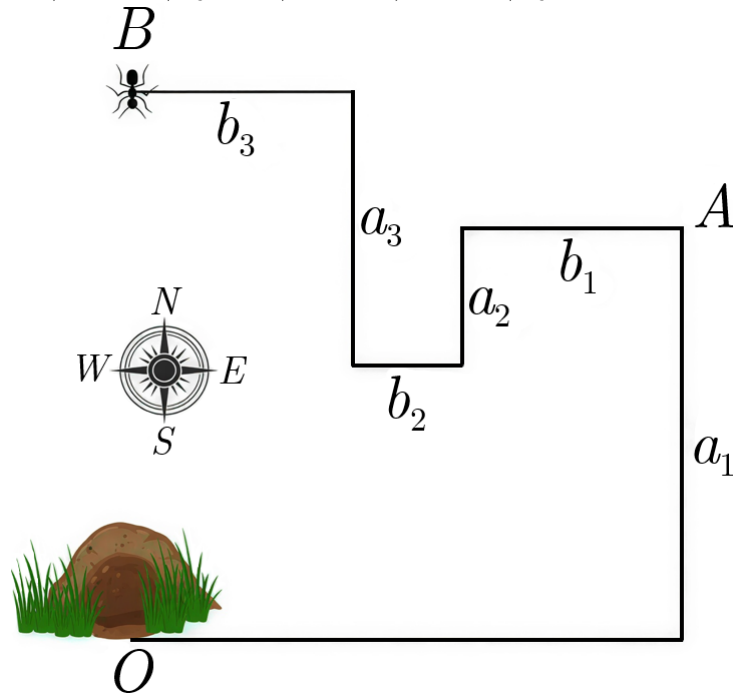
- а) Сколько месяцев в этом году медведь худел?
- б) Какой была максимальная масса медведя в этом году? Ответ выразите в килограммах.
- в) На сколько изменилась масса медведя за этот календарный год? Ответ выразите в килограммах.
- г) Сколько килограммов медведь терял за месяц зимой?
- д) Чему равна средняя масса мартовского медведя в этом году? Ответ выразите в килограммах.

Матрица параметров к вариантам задания 2.

№ варианта	1	2	3	4
m_0 , кг	150	250	350	200
Δm , кг	10	10	10	12

Задание 3. Вариант 1. Муравей отправился от муравейника (точка O на рисунке) на восток за вкусняшкой со скоростью 4 см/с. Спустя некоторое время он нашёл её в точке A и двинулся обратно к муравейнику с вдвое меньшей скоростью. В результате блужданий на обратном пути он оказался в точке B , расположенной строго к северу от муравейника. Траектория движения муравья представлена на рисунке, все отрезки пути ориентированы по сторонам света.

Размеры на рисунке $a_1 = 3$ м, $a_2 = 1$ м, $a_3 = 2$ м, $b_1 = 2$ м, $b_2 = 1$ м, $b_3 = 2$ м.



- С какой скоростью нёс вкусняшку муравей? Ответ выразите в см/с.
- Сколько метров прополз муравей на пути AB ?
- Сколько секунд потратил муравей на путь AB ?
- Сколько метров осталось муравью тащить вкусняшку от B напрямую до муравейника?
- Определите среднюю путевую скорость муравья на участке OAB . Ответ выразите в см/мин.

Матрица параметров к вариантам задания 3.

№ варианта	Скорость муравья, см/с	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	b_1 , м	b_2 , м	b_3 , м
1	4	3	1	2	2	1	2
2	8	3	1	2	2	1	2
3	20	3	1	2	2	1	2
4	32	3	1	2	2	1	2

Максимальное количество баллов за олимпиаду — 30

Задание 1. Вариант 1. Овца привязана верёвкой длиной L к колышку на земле. Она съедает всю доступную траву вокруг за 1 час. Ягнёнок ест траву в 2 раза медленнее.

а) За сколько часов съедает всю доступную траву вокруг себя ягнёнок, привязанный такой же верёвкой?

Ответ: 2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) За сколько минут съедают всю доступную траву вокруг себя ягнёнок и овца, привязанные такими же верёвками к одному колышку?

Ответ: 40

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

в) За сколько часов съедает всю доступную траву вокруг себя овца, привязанная верёвкой длиной $2L$?

Ответ: 4

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Баран ест в 3 раза быстрее ягнёнка. Два барана, привязанные верёвками длиной L к одному колышку съедают всю доступную траву вокруг себя за 2 часа. Какую часть времени бараны дерутся между собой, если всё, что они делают — это едят и дерутся? Ответ запишите в виде обыкновенной дроби (например, $12/17$).

Ответ: $5/6$

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 4 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Так как скорость поедания $Q_{\text{я}}$ у ягнёнка в 2 раза ниже, чем у овцы $Q_{\text{о}}$ при том же запасе доступной травы M , время увеличится в 2 раза: $t_{\text{я}} = 2t_{\text{о}} = 2$ ч.

б) В этом случае скорости поедания складываются:

$$t_2 = \frac{M}{Q_{\text{о}} + Q_{\text{я}}} = \frac{M}{\frac{M}{t_{\text{о}}} + \frac{M}{t_{\text{я}}}} = \frac{t_{\text{о}}t_{\text{я}}}{t_{\text{о}} + t_{\text{я}}} = \frac{2}{3} \text{ часа} = 40 \text{ мин.}$$

в) Запас травы пропорционален доступной площади, площадь пропорциональна квадрату характерного размера фигуры (в нашем случае L). То есть травы больше в 4 раза.

$$t_3 = \frac{4M}{Q_{\text{о}}} = 4t_{\text{о}} = 4 \text{ ч.}$$

г) Не мешая друг другу, бараны съели бы всю траву за

$$t_4 = \frac{M}{3Q_{\text{я}} + 3Q_{\text{я}}} = \frac{M}{3Q_{\text{о}}} = \frac{1}{3} \text{ часа.}$$

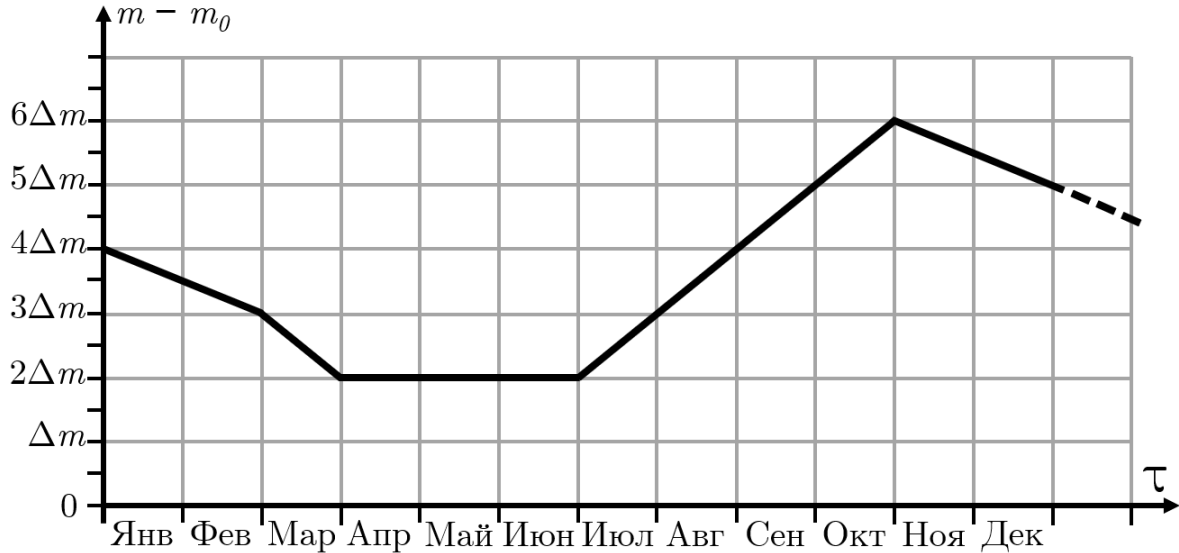
Но они съедают траву за $t_6 = 2$ ч, тратя на драки

$$\frac{t_6 - t_4}{t_6} = \frac{5}{6} \text{ доступного времени.}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 1.

№ варианта	Время поедания травы овцой, ч	Отношение скоростей поедания травы барана и ягнёнка	Время поедания травы 2 баранами, ч	Ответ (пункт а)	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)
1	1	3	2	2	40	4	$5/6$
2	1	3	4	2	40	4	$11/12$
3	1	3	5	2	40	4	$14/15$
4	1	4	2	2	40	4	$7/8$

Задание 2. Вариант 1. Медведи некоторых видов впадают зимой в спячку. За это время они могут значительно потерять в своей массе. Дан график зависимости прироста массы тела одного медведя от времени в течение календарного года по сравнению с первым наблюдением за ним несколько лет назад.



Здесь $m_0 = 150$ кг, а $\Delta m = 10$ кг.

а) Сколько месяцев в этом году медведь худел?

Ответ: 5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) Какой была максимальная масса медведя в этом году? Ответ выразите в килограммах.

Ответ: 210

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

в) На сколько изменилась масса медведя за этот календарный год? Ответ выразите в килограммах.

Ответ: 10

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Сколько килограммов медведь терял за месяц зимой?

Ответ: 5

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

д) Чему равна средняя масса мартовского медведя в этом году? Ответ выразите в килограммах.

Ответ: 175

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) Масса медведя снижалась с января по март, в ноябре и в декабре, всего 5 месяцев.

б) Судя по графику, максимальная масса у медведя была в конце октября $m_{\max} = m_0 + 6\Delta m = 210$ кг.

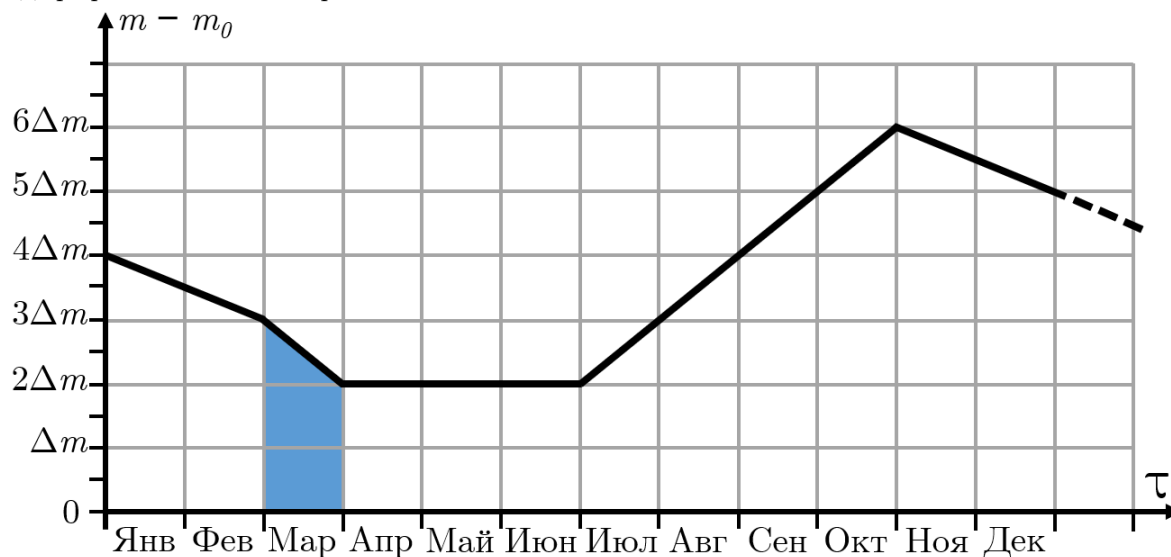
в) Масса в начале года — $m_0 + 4\Delta m$, масса в конце года — $m_0 + 5\Delta m$. Прирост массы $\Delta m = 10$ кг.

г) В январе, феврале и декабре медведь терял за месяц $\frac{\Delta m}{2} = 5$ кг.

д) Так как масса медведя в течение месяца меняется равномерно, среднюю массу можно найти как среднее арифметическое значение масс в начале и конце марта либо как значение массы в середине месяца:

$$m_{\text{ср}} = \frac{(m_0 + 3\Delta m) + (m_0 + 2\Delta m)}{2} = m_0 + 2.5\Delta m = 175 \text{ кг.}$$

Более общее решение (справедливое при любом законе изменения массы во времени) заключается в нахождении площади под графиком массы за март.

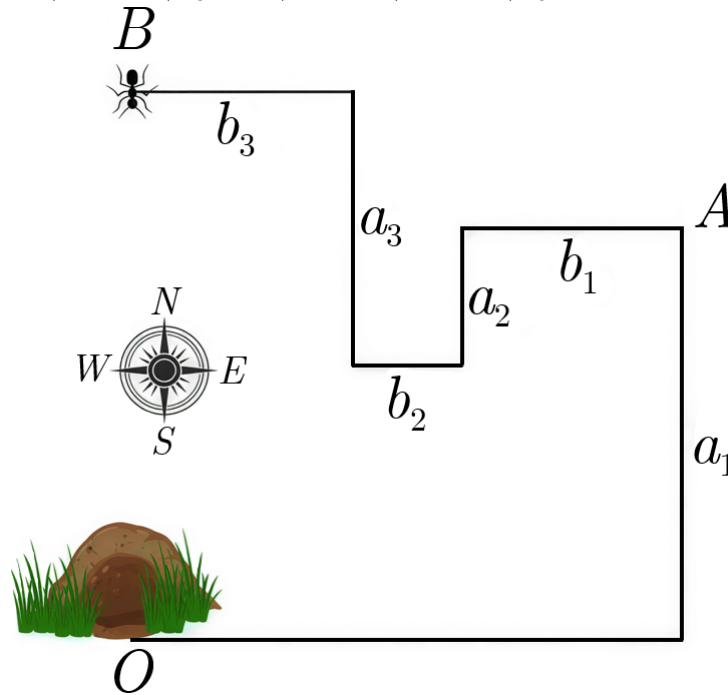


Матрица параметров и ответов к вариантам задания 2.

№ варианта	m_0 , кг	Δm , кг	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)	Ответ (пункт д)
1	150	10	210	10	5	175
2	250	10	310	10	5	275
3	350	10	410	10	5	375
4	200	12	272	12	6	230

Задание 3. Вариант 1. Муравей отправился от муравейника (точка O на рисунке) на восток за вкусняшкой со скоростью 4 см/с. Спустя некоторое время он нашёл её в точке A и двинулся обратно к муравейнику с вдвое меньшей скоростью. В результате блужданий на обратном пути он оказался в точке B , расположенной строго к северу от муравейника. Траектория движения муравья представлена на рисунке, все отрезки пути ориентированы по сторонам света.

Размеры на рисунке $a_1 = 3$ м, $a_2 = 1$ м, $a_3 = 2$ м, $b_1 = 2$ м, $b_2 = 1$ м, $b_3 = 2$ м.



а) С какой скоростью нёс вкусняшку муравей? Ответ выразите в см/с.

Ответ: 2

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 1 балл

б) Сколько метров прополз муравей на пути AB ?

Ответ: 8

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

в) Сколько секунд потратил муравей на путь AB ?

Ответ: 400

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

г) Сколько метров осталось муравью тащить вкусняшку от B напрямую до муравейника?

Ответ: 4

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 2 балла

д) Определите среднюю путевую скорость муравья на участке OAB . Ответ выразите в см/мин.

Ответ: 160

Критерий оценивания: точное совпадение ответа — 3 балла

Максимальный балл за задание — 10

Решение.

а) По условию скорость упала в 2 раза: $v_1 = \frac{v_0}{2} = 2$ см/с.

б) $S_{AB} = a_2 + a_3 + b_1 + b_2 + b_3 = 8$ м.

в) $t_{AB} = \frac{S_{AB}}{v_1} = \frac{800 \text{ см}}{2 \text{ см/с}} = 400$ с.

г) $S_{BO} = a_1 - a_2 + a_3 = 4$ м.

д) Заметим, что путь от муравейника до первого поворота равен $b_1 + b_2 + b_3$.

Путь $S_{OAB} = S_{AB} + a_1 + b_1 + b_2 + b_3 = 16$ м = 1600 см.

Участок OA муравей преодолел за время $t_{OA} = \frac{a_1 + b_1 + b_2 + b_3}{v_0} = 200$ с.

Участок AB , как мы знаем, муравей преодолел за время $t_{AB} = 400$ с.

Средняя скорость:

$$v_{\text{ср}} = \frac{S_{OAB}}{t_{AB} + t_{OA}} = \frac{1600 \text{ см}}{600 \text{ с}} = \frac{1600 \text{ см}}{10 \text{ мин}} = 160 \text{ см/мин.}$$

Матрица параметров и ответов к вариантам задания 3.

№ варианта	Скорость муравья, см/с	a_1 , м	a_2 , м	a_3 , м	b_1 , м	b_2 , м	b_3 , м	Ответ (пункт а)	Ответ (пункт б)	Ответ (пункт в)	Ответ (пункт г)	Ответ (пункт д)
1	4	3	1	2	2	1	2	2	8	400	4	160
2	8	3	1	2	2	1	2	4	8	200	4	320
3	20	3	1	2	2	1	2	10	8	80	4	800
4	32	3	1	2	2	1	2	16	8	50	4	1280