9 класс

Первый день

9.1. Сначала на тарелке лежат 75 конфет. Петя и Вася по очереди берут из тарелки любое натуральное количество конфет до тех пор, пока конфет на тарелке не останется. Начинает Петя. При каком наименьшем k Петя может играть так, чтобы гарантировать, что в конце игры количества конфет у мальчиков отличаются не более чем на k? (Во время игры мальчики конфеты не едят.)

9.2. Назовём натуральное число n *странным*, если существуют такие попарно различные натуральные числа a, b, c, d и e, большие 1, что $n = a^{a^a} = b^{b^c} = d^{e^e}$. Конечно или бесконечно количество странных чисел? (Напомним, что x^{y^z} означает число, получившееся в результате возведения числа x в степень y^z.)

9.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне BC отмечены точки X и Y таким образом, что $2BX = AB$ и $2CY = AC$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки X и Y, которая касается вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника ABC.

9.4. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

9 класс

Первый день

9.1. Сначала на тарелке лежат 75 конфет. Петя и Вася по очереди берут из тарелки любое натуральное количество конфет до тех пор, пока конфет на тарелке не останется. Начинает Петя. При каком наименьшем k Петя может играть так, чтобы гарантировать, что в конце игры количества конфет у мальчиков отличаются не более чем на k? (Во время игры мальчики конфеты не едят.)

9.2. Назовём натуральное число n *странным*, если существуют такие попарно различные натуральные числа a, b, c, d и e, большие 1, что $n = a^{a^a} = b^{b^c} = d^{e^e}$. Конечно или бесконечно количество странных чисел? (Напомним, что x^{y^z} означает число, получившееся в результате возведения числа x в степень y^z.)

9.3. Дан неравнобедренный треугольник ABC, в котором $\angle A = 60^\circ$. На стороне BC отмечены точки X и Y таким образом, что $2BX = AB$ и $2CY = AC$. Докажите, что существует окружность, проходящая через точки X и Y, которая касается вписанной и одной из вневписанных окружностей треугольника ABC.

9.4. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

10 класс

Первый день

10.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

10.2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет равенству
$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = a_n^2$$
при всех натуральных n. Найдите все такие последовательности, в которых встречается число 3.

10.3. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а его высоты пересекаются в точке H. Касательные к окружности (BHC) в точке B, к окружности (AHB) в точке A и к окружности (CHA) в точке C ограничивают треугольник T_1. Касательные к окружности (BHC) в точке C, к окружности (AHB) в точке B и к окружности (CHA) в точке A образуют треугольник T_2. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников T_1 и T_2 соответственно. Докажите, что HI_1OI_2 — параллелограмм, либо точки H, I_1, O, I_2 лежат на одной прямой.
(Здесь под окружностью (XYZ) мы понимаем окружность, описанную вокруг треугольника XYZ.)

10.4. Даны натуральные числа m и k, причём $m > 100$ и $1 < k < 2m$. Изначально в ряд выложены $2m$ пластилиновых шариков, каждый шарик имеет массу 1. Петя и Вася играют в игру, делая $2m-1$ ходов по очереди, начинает Петя. За ход игрок должен выбрать два соседних шарика и слепить их в один шарик (который остается в том же месте в ряду). Победа присуждается Пете, если в какой-либо момент игры в ряду появлялся шарик массы k. Иначе победа присуждается Васе. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

10 класс

Первый день

10.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

10.2. Последовательность натуральных чисел $a_1, a_2, \ldots$ удовлетворяет равенству

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2n-1} = a_n^2$$

при всех натуральных n. Найдите все такие последовательности, в которых встречается число 3.

10.3. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность с центром O, а его высоты пересекаются в точке H. Касательные к окружности (BHC) в точке B, к окружности (AHB) в точке A и к окружности (CHA) в точке C ограничивают треугольник T_1. Касательные к окружности (BHC) в точке C, к окружности (AHB) в точке B и к окружности (CHA) в точке A образуют треугольник T_2. Пусть I_1 и I_2 — центры вписанных окружностей треугольников T_1 и T_2 соответственно. Докажите, что HI_1OI_2 — параллелограмм, либо точки H, I_1, O, I_2 лежат на одной прямой.
(Здесь под окружностью (XYZ) мы понимаем окружность, описанную вокруг треугольника XYZ.)

10.4. Даны натуральные числа m и k, причём $m > 100$ и $1 < k < 2m$. Изначально в ряд выложены $2m$ пластилиновых шариков, каждый шарик имеет массу 1. Петя и Вася играют в игру, делая $2m-1$ ходов по очереди, начинает Петя. За ход игрок должен выбрать два соседних шарика и слепить их в один шарик (который остается в том же месте в ряду). Победа присуждается Пете, если в какой-либо момент игры в ряду появлялся шарик массы k. Иначе победа присуждается Васе. Кто из игроков имеет выигрышную стратегию?

11 класс

Первый день

11.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

11.2. Медианы остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M. На стороне BC отмечены точки K и N так, что $BK = KN = NC$. Высоты треугольника MKN пересекаются в точке H. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков AH, BH и CH, касается описанной окружности треугольника MKN.

11.3. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

11.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, у которого старший коэффициент равен 1. Оказалось, что можно выбрать 100 попарно различных вещественных корней $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ у многочлена $P(x)$ и 100 попарно различных вещественных корней $y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ у многочлена $P(x)-1$ так, чтобы числа x_i и y_i отличались на 1 при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Каково наименьшее возможное значение n?

11 класс

Первый день

11.1. Можно ли 2026 чисел $1+\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2}, \ldots, 1+2026\sqrt{2}$ разбить на две непустые группы так, чтобы произведения чисел в группах имели одинаковую дробную часть?

11.2. Медианы остроугольного треугольника ABC пересекаются в точке M. На стороне BC отмечены точки K и N так, что $BK = KN = NC$. Высоты треугольника MKN пересекаются в точке H. Докажите, что окружность, проходящая через середины отрезков AH, BH и CH, касается описанной окружности треугольника MKN.

11.3. На олимпиаду приехало несколько участников из n регионов, некоторые из них дружат (дружба всегда взаимна). Выяснилось, что для произвольной рассадки нескольких (хотя бы трёх) участников за круглым столом, при которой любые два соседа дружат, участников из каждого региона за столом окажется не более половины общего числа детей за столом. Докажите, что участников можно рассадить по n кабинетам так, чтобы любые два друга оказались в разных кабинетах.

11.4. Пусть $P(x)$ — многочлен степени n с вещественными коэффициентами, у которого старший коэффициент равен 1. Оказалось, что можно выбрать 100 попарно различных вещественных корней $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ у многочлена $P(x)$ и 100 попарно различных вещественных корней $y_1, y_2, \ldots, y_{100}$ у многочлена $P(x)-1$ так, чтобы числа x_i и y_i отличались на 1 при всех $i = 1, 2, \ldots, 100$. Каково наименьшее возможное значение n?

9 класс

Второй день

9.5. У Кати есть $2n$ катушек с лентами (n — натуральное число). Изначально на катушках намотано $1^2, 2^2, \ldots, (2n)^2$ дециметров ленты соответственно. Каждый час Катя выбирает натуральное число i и отрезает по i дециметров ленты от всех катушек, на которых осталось не менее i дециметров ленты. Через некоторое время все катушки, на которых изначально было нечётное количество дециметров ленты, оказались пустыми. Докажите, что в этот момент длина оставшейся ленты на каждой из остальных катушек меньше $4n$ дециметров.

9.6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Из точки A опустили перпендикуляры AP и AQ на продолжения отрезков BO и CO за точку O. Окружность с центром T, проходящая через точки P и Q, касается отрезка BC. Докажите, что $TO \parallel BC$.

9.7. Пусть n — нечётное натуральное число. Дана таблица $n \times n$. *Расстоянием* между двумя клетками таблицы назовём наименьшее число шагов, за которое можно добраться от одной клетки до другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку (так, расстояние между клетками, соседними по стороне, равно 1). R клеток таблицы окрашены в красный цвет, а другие B клеток — в синий. Известно, что любая прямая, соединяющая центры красной и синей клеток, не параллельна ни одной из диагоналей таблицы. Кроме того, расстояние между любыми красной и синей клетками не равно n. Докажите, что $\sqrt{R}+\sqrt{B} \leqslant n$.

9.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.

9 класс

Второй день

9.5. У Кати есть $2n$ катушек с лентами (n — натуральное число). Изначально на катушках намотано $1^2, 2^2, \ldots, (2n)^2$ дециметров ленты соответственно. Каждый час Катя выбирает натуральное число i и отрезает по i дециметров ленты от всех катушек, на которых осталось не менее i дециметров ленты. Через некоторое время все катушки, на которых изначально было нечётное количество дециметров ленты, оказались пустыми. Докажите, что в этот момент длина оставшейся ленты на каждой из остальных катушек меньше $4n$ дециметров.

9.6. Точка O — центр окружности, описанной около остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. Из точки A опустили перпендикуляры AP и AQ на продолжения отрезков BO и CO за точку O. Окружность с центром T, проходящая через точки P и Q, касается отрезка BC. Докажите, что $TO \parallel BC$.

9.7. Пусть n — нечётное натуральное число. Дана таблица $n \times n$. *Расстоянием* между двумя клетками таблицы назовём наименьшее число шагов, за которое можно добраться от одной клетки до другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку (так, расстояние между клетками, соседними по стороне, равно 1). R клеток таблицы окрашены в красный цвет, а другие B клеток — в синий. Известно, что любая прямая, соединяющая центры красной и синей клеток, не параллельна ни одной из диагоналей таблицы. Кроме того, расстояние между любыми красной и синей клетками не равно n. Докажите, что $\sqrt{R} + \sqrt{B} \leqslant n$.

9.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.

10 класс

Второй день

10.5. Существует ли выпуклый 201-угольник, в котором каждая диагональ перпендикулярна какой-то другой диагонали?

10.6. В стране ровно 1000 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что для любого натурального $k \leqslant 500$ выполнено следующее утверждение: «Если выбрать любое множество A из k городов, то найдётся хотя бы k городов, не принадлежащих A, каждый из которых соединён авиалинией хотя бы с одним городом из A». Какое наименьшее количество авиалиний может быть в этой стране?

10.7. На координатной плоскости вершины выпуклого четырехугольника имеют целые координаты и лежат на графике многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что если диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, то они равны между собой.

10.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab+1$, $bc+1$ и $ca+1$ не является полным квадратом.

10 класс

Второй день

10.5. Существует ли выпуклый 201-угольник, в котором каждая диагональ перпендикулярна какой-то другой диагонали?

10.6. В стране ровно 1000 городов, некоторые пары городов соединены двусторонними авиалиниями. Известно, что для любого натурального $k \leqslant 500$ выполнено следующее утверждение: «Если выбрать любое множество A из k городов, то найдётся хотя бы k городов, не принадлежащих A, каждый из которых соединён авиалинией хотя бы с одним городом из A». Какое наименьшее количество авиалиний может быть в этой стране?

10.7. На координатной плоскости вершины выпуклого четырехугольника имеют целые координаты и лежат на графике многочлена с целыми коэффициентами. Докажите, что если диагонали этого четырехугольника перпендикулярны, то они равны между собой.

10.8. Дан треугольник с различными натуральными длинами сторон a, b и c. Докажите, что хотя бы одно из чисел $ab + 1$, $bc + 1$ и $ca + 1$ не является полным квадратом.

11 класс

Второй день

11.5. Саша поставил фишку в одну из точек координатной плоскости. За одну операцию разрешается переместить фишку, расположенную в точке с координатами (a_i, b_i), в другую точку (a_{i+1}, b_{i+1}), если уравнение прямой, соединяющей эти точки, имеет вид $y = a_i x + c_i$ (где i — номер операции). Может ли после нескольких таких операций фишка вернуться в исходную точку?

11.6. На доску выписаны 2026 попарно различных натуральных чисел, больших 1. Оказалось, что для любого выписанного числа a найдутся хотя бы k пар выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на $a - 1$. Найдите наибольшее возможное значение k.

11.7. Сфера с центром в точке I вписана в тетраэдр $ABCD$ и касается его граней BCD, CDA, DAB, ABC в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Отрезок A_1B_1 пересекает плоскость C_1D_1I в точке E. Докажите, что середина ребра AB лежит в плоскости CDE.

11.8. Даны нечётные числа $a \leqslant b$, большие 1. На клетчатую плоскость (сторона клетки равна 1) выложены по линиям сетки салфетки в форме квадратов 2×2 так, что каждая клетка накрыта не более чем одной салфеткой. Оказалось, что для любого клетчатого прямоугольника с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b его левый нижний угол является центром одной из салфеток в том и только в том случае, когда его правый верхний угол является центром одной из салфеток. Найдите наименьшее положительное число α, при котором для любого натурального N гарантированно найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, содержащий целиком не более αN^2 салфеток.

11 класс

Второй день

11.5. Саша поставил фишку в одну из точек координатной плоскости. За одну операцию разрешается переместить фишку, расположенную в точке с координатами (a_i, b_i), в другую точку (a_{i+1}, b_{i+1}), если уравнение прямой, соединяющей эти точки, имеет вид $y = a_i x + c_i$ (где i — номер операции). Может ли после нескольких таких операций фишка вернуться в исходную точку?

11.6. На доску выписаны 2026 попарно различных натуральных чисел, больших 1. Оказалось, что для любого выписанного числа a найдутся хотя бы k пар выписанных чисел $b < c$, для которых $bc - 1$ делится на $a - 1$. Найдите наибольшее возможное значение k.

11.7. Сфера с центром в точке I вписана в тетраэдр $ABCD$ и касается его граней BCD, CDA, DAB, ABC в точках A_1, B_1, C_1, D_1 соответственно. Отрезок A_1B_1 пересекает плоскость C_1D_1I в точке E. Докажите, что середина ребра AB лежит в плоскости CDE.

11.8. Даны нечётные числа $a \leqslant b$, большие 1. На клетчатую плоскость (сторона клетки равна 1) выложены по линиям сетки салфетки в форме квадратов 2×2 так, что каждая клетка накрыта не более чем одной салфеткой. Оказалось, что для любого клетчатого прямоугольника с горизонтальной стороной a и вертикальной стороной b его левый нижний угол является центром одной из салфеток в том и только в том случае, когда его правый верхний угол является центром одной из салфеток. Найдите наименьшее положительное число α, при котором для любого натурального N гарантированно найдётся клетчатый квадрат $N \times N$, содержащий целиком не более αN^2 салфеток.