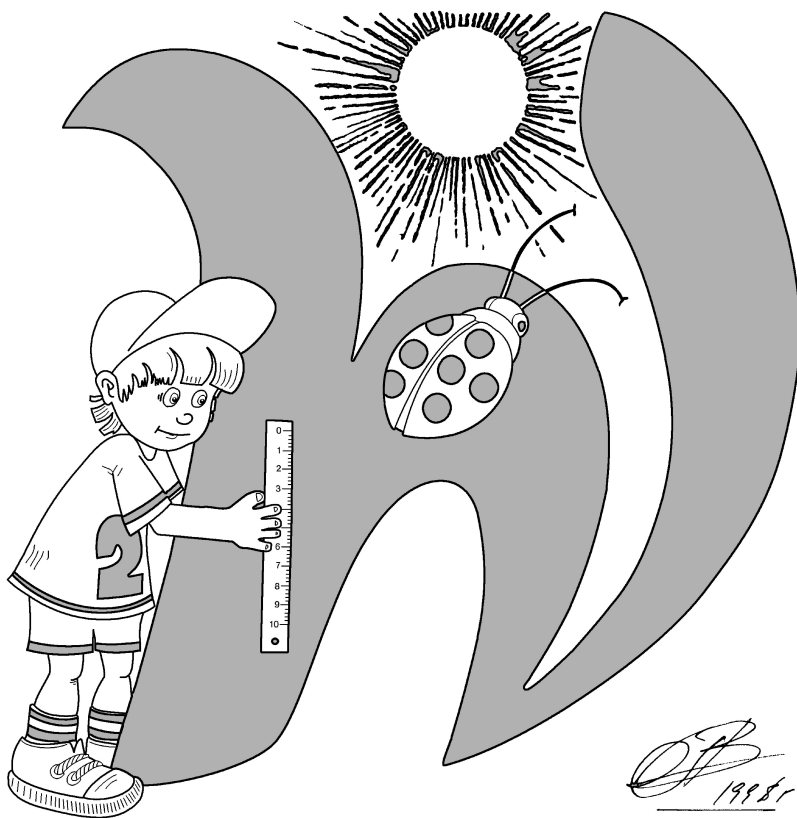


Министерство просвещения Российской Федерации
Центральная предметно-методическая комиссия
Всероссийской олимпиады школьников по физике

ЛІХ Всероссийская олимпиада школьников по физике

Заключительный этап

Теоретический тур



Новый Уренгой, 2026 г.

Комплект задач подготовлен
центральной предметно-методической комиссией
Всероссийской олимпиады школьников по физике
E-mail: physolymp@gmail.com

Авторы задач

Теоретический тур

9 класс

- **9-Т1.** Антон Вергунов
- **9-Т2.** Александр Ершов
- **9-Т3.** Александр Ершов
- **9-Т4.** Антон Вергунов
- **9-Т5.** Денис Рубцов, Александр Ершов

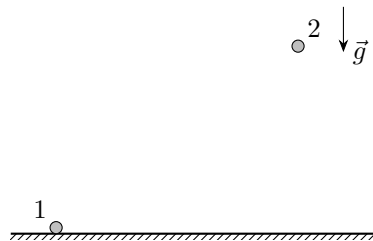
10-11 класс

- **10-Т1.** Алексей Заяц
- **10-Т2.** Иван Гурьянов
- **10-Т3.** Александр Аполонский, Александр Воронцов, Алексей Заяц
- **10-Т4.** Александр Аполонский, Иван Юдин
- **10-Т5.** Алексей Заяц
- **11-Т1.** Павел Ярных
- **11-Т2.** Константин Соломатин
- **11-Т3.** Григорий Расторгуев
- **11-Т4.** Александр Аполонский
- **11-Т5.** Семён Либерман

9 класс

Задача №1. Фотография

На горизонтальной поверхности вплотную друг к другу расположены два небольших шарика 1 и 2. Им одновременно сообщили скорости во взаимно перпендикулярных направлениях, в результате чего шарики начали двигаться в одной вертикальной плоскости, не сталкиваясь. В момент, близкий к падению шарика 1, была сделана фотография, зафиксировавшая положения обоих шариков (см. рисунок). При этом ни один из них ещё не касался горизонтальной поверхности. Соппротивлению воздуха пренебречь, ускорение свободного падения $g = 9,8 \text{ м/с}^2$.



Фотография с положениями шариков приведена в заданном масштабе на отдельном листе. Все необходимые построения выполняйте прямо на ней.

1. Найдите время t полёта шарика 1, если известно, что оно является максимально возможным.
2. Какие скорости v_1 и v_2 сообщили шарикам 1 и 2 соответственно?

Задача №2. Спиза

Проволока закреплена в вертикальной плоскости и состоит из прямого отрезка и полуокружности радиусом R , которые касаются друг друга в верхней точке (см. рисунок 1). На прямом участке расположен груз массой m , на полуокружности — груз массой $2m$. Грузы соединены невесомой нерастяжимой нитью, трение отсутствует. На дополнительном бланке изображены положения грузов при равновесии системы, показано направление ускорения свободного падения и начерчена масштабная сетка.

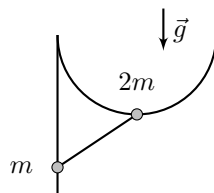


Рис. 1

1. Восстановите расположение проволоки по изображённой системе грузов и определите, чему равен радиус R полуокружности.

Не изменяя форму проволоки, груз массой $2m$ заменили на невесомое колечко, соединённое с телом m нитью длиной R (см. рисунок 2). Коэффициент трения между проволокой и колечком равен μ .

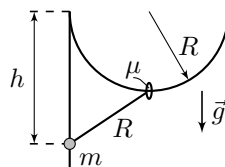


Рис. 2

2. При каких расстояниях h между изломом проволоки и грузом m система может находиться в равновесии?

Задача №3. Наезд

Из гладкой проволоки, закреплённой в вертикальной плоскости, изготовлена горка высотой H , состоящая из двух четвертей окружности, соединяющих горизонтальные участки (см. рисунок 1). В начальной точке горки покоится маленькая бусинка массой m , надетая на проволоку. К ней приложена постоянная по модулю и направлению сила \vec{F} .

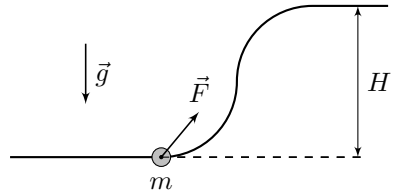


Рис. 1

1. Найдите минимальное значение модуля силы $F_{\min 1}$, при котором бусинка может преодолеть горку, если сила направлена горизонтально.

2. Найдите минимальный модуль силы $F_{\min 2}$, при котором бусинка может преодолеть горку. Под каким углом α_{opt} к горизонтالي должна быть направлена сила в этом случае?

Пусть теперь модуль силы постоянен, а её направление может изменяться в процессе движения. Бусинка находится на расстоянии s от начала горки (см. рисунок 2).

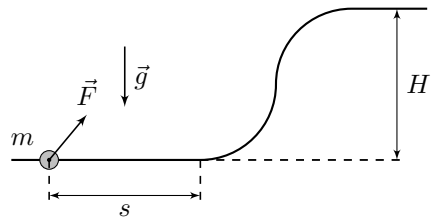
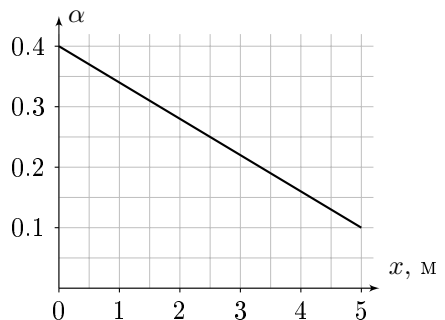


Рис. 2

3. При $F = |\vec{F}| = mg/2$ найдите минимальное значение s , при котором бусинка может преодолеть горку. Опишите как должно меняться направление силы \vec{F} , чтобы это стало возможным.

Задача №4. Теплообменник

Теплообменник состоит из двух коаксиальных труб длиной $L = 5$ м. По внутренней трубе в положительном направлении оси x течёт смесь воды и льда с массовым расходом $\mu_x = 0,70$ кг/с. По внешней трубе встречным потоком течёт горячая вода с $\mu_r = 0,50$ кг/с, температура T_r которой при $x = L$ составляет 60°C . Устройство теплообменника таково, что зависимость массовой доли $\alpha(x)$ льда от координаты x имеет вид, показанный на графике. Площадь поперечного сечения внутренней трубы постоянна и равна $S = 100$ см².

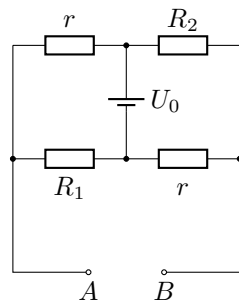


Удельная теплота плавления льда $\lambda = 3,35 \cdot 10^5$ Дж/кг, удельная теплоёмкость воды $c = 4,2 \cdot 10^3$ Дж/(кг·К), плотности воды и льда равны $\rho_{\text{в}} = 1000$ кг/м³ и $\rho_{\text{л}} = 900$ кг/м³ соответственно. Теплопотери в окружающую среду и теплоёмкостью стенок пренебречь.

1. Найдите температуру горячей воды $T_{\text{г}}$ в сечении с координатой $x = 0$.
2. Постройте график зависимости температуры $T_{\text{г}}(x)$ горячей воды от координаты.
3. Получите зависимость скорости $v(x)$ смеси воды и льда от координаты. Считайте, что скорость течения смеси одинакова по всему поперечному сечению.

Задача №5. Мосты

Электрическая цепь, схема которой изображена на рисунке, состоит из резисторов сопротивлениями R_1, R_2, r ($R_1 \neq R_2$) и идеального источника постоянного напряжения U_0 . К выводам A и B подключают второй идеальный источник постоянного напряжения. При одной его полярности на резисторах R_1 и R_2 мощность не выделяется, а при другой полярности на них выделяются одинаковые ненулевые мощности.



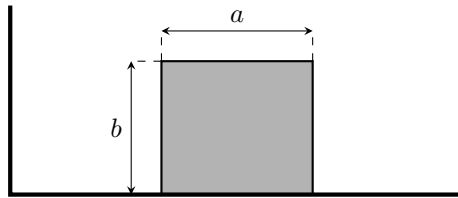
Считая заданными сопротивления R_1, R_2 и напряжение U_0 , определите:

1. напряжение источника, подключаемого к A и B ;
 2. сопротивление r ;
 3. показание R омметра, подключенного к выводам A и B , если ЭДС и внутреннее сопротивление омметра равны \mathcal{E}_0 и r_0 .
- Омметр показывает отношение напряжения на его выводах к силе тока, протекающего через него.

10 класс

Задача №1. Всплывающий брусок

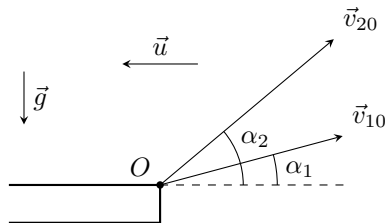
На дне сосуда с плоским горизонтальным дном лежит длинный однородный брусок, поперечное сечение которого представляет собой прямоугольник со сторонами a и $b = a\sqrt{7}/3$ (см. рис.). В сосуд медленно наливают воду.



При какой высоте H уровня воды в сосуде брусок перестанет касаться дна? Плотность материала бруска равна 50% от плотности воды. Длина бруска много больше a . Из-за шероховатости поверхностей бруска и дна сосуда вода свободно подтекает между ними.

Задача №2. Двое против ветра

С высокого, но узкого моста над рекой одновременно и практически из одной точки O бросили два одинаковых шарика: первый — под углом $\alpha_1 = 10^\circ$ к горизонту со скоростью $v_{10} = 8$ м/с, второй — под углом $\alpha_2 = 50^\circ$ к горизонту (см. рис.).



В районе моста дует сильный горизонтальный ветер, в результате чего шарики спустя достаточно большое время стали двигаться по параллельным прямым, всё время находясь на **одной вертикали** на расстоянии $L = 6$ м друг от друга. Известно, что первый шарик упал в воду спустя $\tau = 5$ с после броска, а второй упал позднее. Считая, что величина и направление скорости ветра всюду одинаковы и не меняются со временем, определите:

1. начальную скорость второго шарика v_{20} ;
2. высоту моста H над поверхностью воды;

3. скорость ветра u , если известно, что оба шарика пересекли вертикаль, проходящую через точку O , на одинаковом от неё **расстоянии**.

Траектории обоих шариков лежат в одной плоскости, параллельной вектору \vec{u} . Сила, действующая на шарик со стороны воздуха, определяется формулой $\vec{F} = -k\vec{v}_{\text{отн}}$, где $\vec{v}_{\text{отн}}$ — скорость шарика относительно воздуха, а k — коэффициент пропорциональности. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10 \text{ м/с}^2$.

Задача №3. Газировка под поршнем

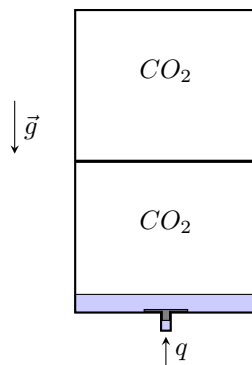
Вертикально расположенный цилиндрический сосуд разделён на две равные части объёмом $V_0 = 6,6 \text{ л}$ каждая лёгким горизонтальным газонепроницаемым поршнем, который может перемещаться без трения. Площадь поперечного сечения сосуда $S = 128 \text{ см}^2$. В обеих частях сосуда находятся одинаковые количества углекислого газа при давлении $P_0 = 164 \text{ кПа}$ и температуре $T_0 = 274 \text{ К}$.

В момент времени $t = 0 \text{ с}$ в нижнюю часть сосуда через клапан в его дне начинает медленно поступать холодная вода с постоянным объёмным расходом $q = 0,004 \text{ л/с}$. Поступившая вода постоянно перемешивается так, что углекислый газ растворяется в ней до равновесного состояния. Температура воды и газа в обеих частях сосуда поддерживается постоянной и равной T_0 . Работа насоса, подающего воду, прекращается в момент, когда давление газа в верхней части сосуда достигает значения $P_{\text{кр}} = 410 \text{ кПа}$.

Когда углекислый газ находится над поверхностью жидкости, масса CO_2 , растворённого при температуре T_0 в 1 м^3 жидкости, в равновесном состоянии равна $\mu_p = k \cdot P$, где $k = 3,17 \cdot 10^{-5} \text{ кг}/(\text{Па} \cdot \text{м}^3)$, а P — парциальное давление углекислого газа, контактирующего с поверхностью жидкости (закон Генри).

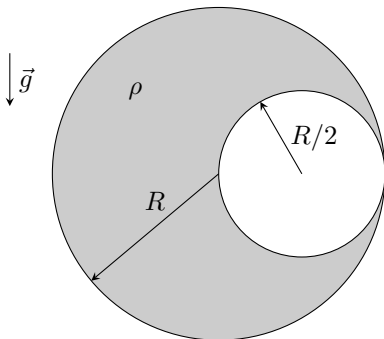
Молярная масса углекислого газа $M = 44 \text{ г/моль}$, универсальная газовая постоянная $R = 8,31 \text{ Дж}/(\text{К} \cdot \text{моль})$. Давлением насыщенных паров воды, изменением объёма воды при растворении в ней газа и объёмом клапана пренебречь.

1. С какой скоростью и в каком направлении движется поршень в начальный момент времени?
2. Через какое время с момента включения насоса достигается минимальное давление в верхней части сосуда?
3. Определите минимальное давление в верхней части сосуда за время работы насоса.
4. Сколько времени проработал насос до своего выключения?
5. Постройте график зависимости объёма газа в верхней части сосуда от времени. Укажите на нём координаты характерных точек.

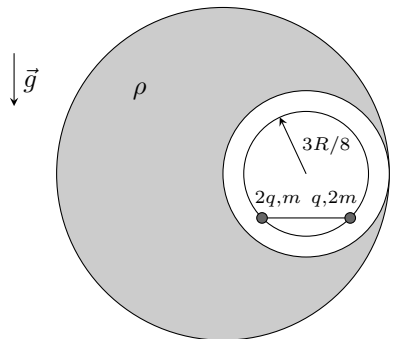


Задача №4. Гантель в полости

В равномерно заряженном по объёму очень длинном непроводящем цилиндре радиусом R высверлили цилиндрическую полость радиусом $R/2$. Ось полости параллельна оси цилиндра, расстояние между осями равно $R/2$. Цилиндр закреплён в поле тяжести так, что плоскость, проходящая через оси цилиндра и полости, горизонтальна (рис. а). Известно, что небольшой шарик массой m , заряженный зарядом q того же знака, что и заряд цилиндра, отпущенный из точки на оси полости без начальной скорости, столкнётся со стенкой полости через время $\tau = \sqrt{\sqrt{2}R/(2g)}$, где g — ускорение свободного падения.



(а)



(б)

1. Определите объёмную плотность заряда цилиндра ρ .

В полости цилиндра в вертикальной плоскости закрепляют гладкое непроводящее кольцо радиусом $3R/8$, так что центр кольца лежит на оси полости. На кольцо надевают две маленькие бусинки и шарнирно соединяют их лёгким стержнем длиной $3\sqrt{2}R/8$. Заряды и массы бусинок равны $2q, m$ и $q, 2m$ соответственно. Систему из бусинок и стержня удерживают так, что стержень горизонтален (рис. б). Систему отпускают, и она начинает двигаться без трения по кольцу.

2. Определите максимальную скорость бусинок в процессе их движения.

3. Определите силу, с которой стержень действует на бусинку в момент, когда скорость бусинок максимальна.

4. Определите силы, с которыми каждая из бусинок действует на кольцо в момент, когда скорость бусинок максимальна.

Кольцо находится вдали от торцов цилиндра.

Задача №5. Термистор, лазер и диод

Десятиклассник Паша, познакомившись на прошедшем региональном этапе со свойствами термистора, решил собрать электрическую цепь, состоящую из источника, ЭДС которого можно регулировать, резистора сопротивлением $r = 40$ Ом, а также соединённых между собой параллельно диода и термистора (см. рис. 1). ЭДС источника можно изменять в пределах от 0 В до некоторого достаточного большого значения \mathcal{E}_{max} .

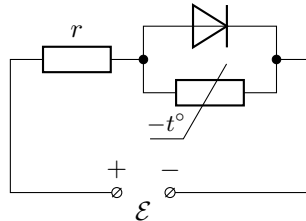


Рис. 1

Паше известно, что вольт-амперная характеристика диода имеет вид, представленный на рис. 2, а температурная зависимость сопротивления термистора задаётся формулой

$$R(t) = R_0 / (1 + \alpha(t - t_0))^2,$$

где $R_0 = 60$ Ом — сопротивление термистора при комнатной температуре t_0 (значение константы α мальчик не нашёл). Включив источник и медленно увеличивая его ЭДС, Паша обнаружил, что диод открывается при ЭДС источника $\mathcal{E}_1 = 5$ В.

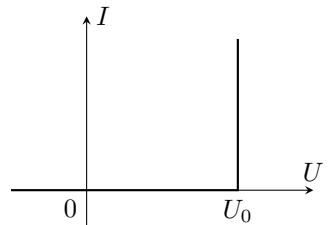


Рис. 2

1. Продолжая свои эксперименты, Паша взял мощный лазер и стал светить им прямо на термистор. Оказалось, что диод при этом закрылся и, более того, никакие изменения ЭДС источника не приводили к его открытию! Определите минимальную тепловую мощность P , передаваемую при этом от лазера термистору.

2. Выключив лазер, Паша обнаружил, что диод остался закрытым, несмотря на то, что ЭДС источника была близка к \mathcal{E}_{max} . Удивившись, мальчик стал плавно уменьшать ЭДС. При каком максимальном значении ЭДС источника \mathcal{E}_2 диод снова откроется?

Напряжение на открытом диоде равно $U_0 = 2$ В. Теплоёмкостью термистора и внутренним сопротивлением источника можно пренебречь. Мощность тепловых потерь пропорциональна разности температур тела и окружающей среды. Термистор во всех экспериментах находится в воздухе, имеющем температуру t_0 , не контактируя с другими предметами.

11 класс

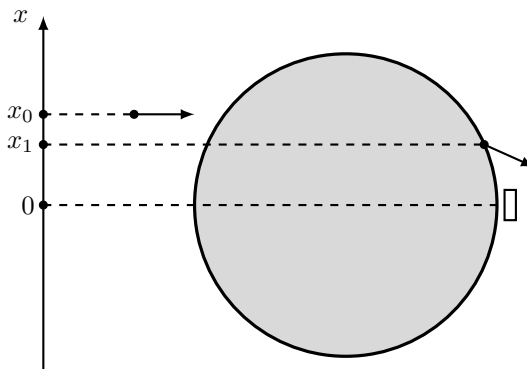
Задача №1. Выбоина

Экспериментатор Глюк решил научиться играть в настольную игру – аэро-хоккей. Для этого он купил всё необходимое оборудование и начал тренироваться. Однако, к своему удивлению, обнаружил, что нередко после запуска шайбы траектория отличается от прямолинейной.

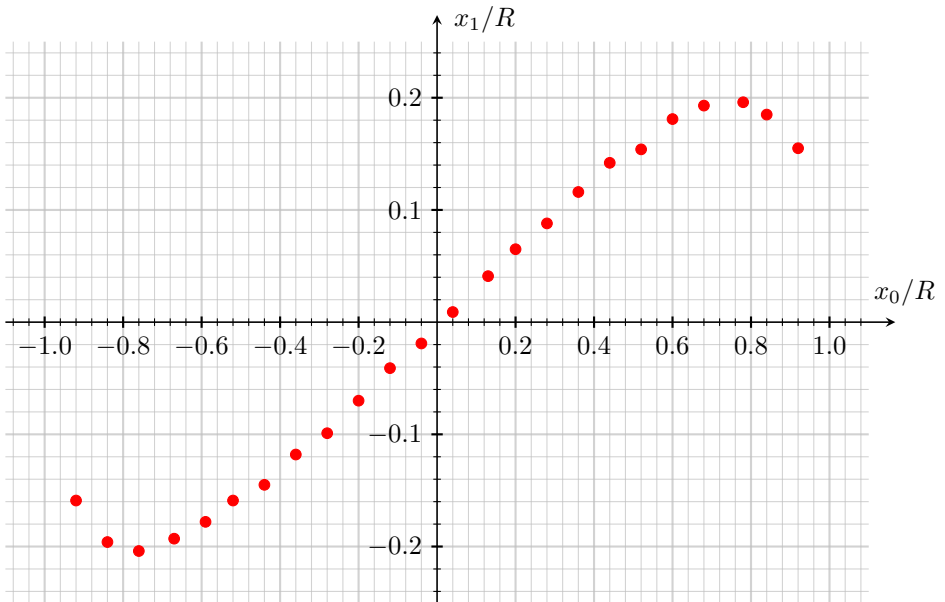
Глюк решил проверить в чём дело и обнаружил деформацию горизонтальной поверхности игрового поля: на одном из ее участков было круглое осесимметричное углубление (выбоина) радиусом R с гладкими краями и горизонтальным дном (см. рис.).



Экспериментатор решил проанализировать, как смещается шайба при прохождении через выбоину. Для этого он запускал шайбу перпендикулярно оси OX (см. рис.) из разных начальных положений с координатой x_0 и измерял координату x_1 выхода шайбы из выбоины.



В результате он получил вот такие экспериментальные точки:



Начальная скорость всех запущенных шайб v_1 , ускорение свободного падения g . Трение отсутствует.

1. Определите глубину выбоины.
2. Определите при какой глубине выбоины Глюк всегда попадал бы в ворота, запуская шайбу из точек с начальными координатами $|x_0| \ll R$.

Примечание

- Считайте, что проекции наклонных участков выбоины (её «стенок») на горизонтальную плоскость много меньше радиуса выбоины, а шайба никогда не отрывается от поверхности и является точечной.
- Место установки ворот изображено на рисунке. Считайте, что их размеры малы.
- Для геометрических построений и получения числовых значений, необходимых для решения задачи, используйте график, построенный на отдельном листе.
- Не забудьте сдать этот лист вместе с остальными.

Задача №2. Молекулярка

Идеальный двухатомный газ совершает циклический процесс, состоящий из четырёх последовательных участков: 1–2, 2–3, 3–4 и 4–1. Пусть p , V и n — давление, объём и концентрация газа, а p_0 , V_0 и n_0 — некоторые постоянные величины, причём $n_0 V_0 = N_0$, где N_0 — неизменное число молекул газа.

Если изобразить этот цикл на диаграмме состояний в координатах p/p_0 (ордината) и V/V_0 (абсцисса), то участки 1–2 и 3–4 представляют собой отрезки, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Точка 2 имеет наибольшую ординату в цикле, а участок 4–1 содержит точку с координатами (1,1). Углы наклона участков 1–2 и 3–4 к оси абсцисс отличаются на α . Масштаб осей на графике — одинаковый.

Если изобразить этот же цикл на диаграмме состояний в координатах p/p_0 (ордината) и n/n_0 (абсцисса), то теперь уже участки 2–3 и 4–1 представляют собой отрезки, лежащие на прямых, проходящих через начало координат. Масштаб осей на этом графике — также одинаковый.

Известно, что КПД цикла идеальной тепловой машины, построенного между максимальной и минимальной температурами, достигаемыми в ходе данного цикла, равно $\eta_K = 0,5$.

1. Найдите углы наклона прямых, содержащих отрезки 2–3 и 4–1 на диаграмме состояний в координатах $p/p_0 - n/n_0$.

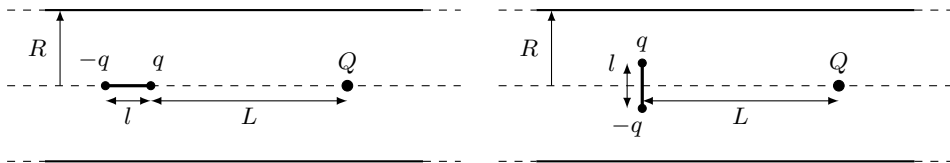
2. Постройте (качественно) рассматриваемый цикл на диаграмме состояний в координатах n/n_0 (ордината) и T/T_0 (абсцисса), где T — абсолютная температура, а $p_0 = n_0 k T_0$. Отметьте на полученном графике известные точки/точку и значения.

3. Какие значения может принимать КПД данного цикла?

4. Найдите диапазон возможных КПД для значения угла $\alpha = \pi/3$.

5. Найдите диапазон возможных КПД для значения угла $\alpha = \pi/6$.

Задача №3. Электростатический этюд



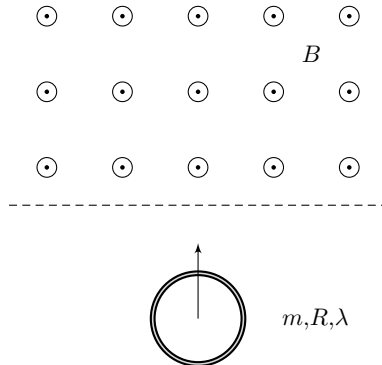
На оси бесконечной цилиндрической полости радиусом R с проводящими стенками находится электрический диполь с зарядами q и $-q$ и плечом l . На расстоянии L от него также на оси расположен электрический заряд Q . При этом $l \ll R, L$. На заряд Q действует сила F_Q . Электрический диполь в этой системе

разворачивают на 90° , так что ось полости становится серединным перпендикуляром к плечу диполя, а расстояние до заряда не меняется. В этом случае на диполь действует сила F_D .

1. Найдите отношение $\frac{F_Q}{F_D}$.

Задача №4. Кольцо на границе

В полупространстве создано вертикальное однородное магнитное поле с индукцией B . На гладкой горизонтальной плоскости, касаясь границы области, с магнитным полем, лежит жёсткое непроводящее тонкое кольцо массой m и радиусом R . Кольцо равномерно заряжено с линейной плотностью заряда λ . Кольцу сообщают некоторую начальную скорость, вектор которой горизонтален и перпендикулярен границе области с магнитным полем, при этом до пересечения области с магнитным полем кольцо движется поступательно.



1. Пусть начальная скорость кольца такова, что оно полностью оказалось в магнитном поле. Определите угловую скорость вращения кольца сразу после этого.
2. Определите минимальное значение начальной скорости v_{\min} , при которой кольцо целиком окажется в области магнитного поля.
Сообщим кольцу скорость $v_0 > v_{\min}$.
3. Определите угол θ , который будет составлять вектор скорости центра кольца с границей области магнитного поля сразу после того, как кольцо полностью пересечёт границу.
4. Определите максимальное расстояние y_{\max} от границы, на которое удалится центр кольца.

Примечание. При решении задачи вам может потребоваться вычислить следующий интеграл:

$$\int \arccos z \, dz = z \arccos z - \sqrt{1 - z^2} + \text{const}.$$

Задача №5. RLC-метр

RLC-метр это прибор, позволяющий непосредственно измерять сопротивления, индуктивности и емкости. В него встроены генератор синусоидального напряжения, а также вольтметры, позволяющие измерять напряжения на выходах прибора и на резисторе, подключенном к одному из выводов. Таким образом, прибор определяет соотношение амплитуд протекающего через него тока и напряжения на выходах. По этим измеренным значениям и известной частоте рассчитывается значение измеряемой величины (индуктивности, емкости или сопротивления в зависимости от режима).

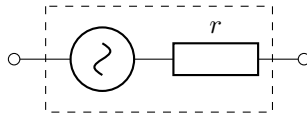


Схема *RLC*-метра

Экспериментатор Глюк взял катушку с индуктивностью L и конденсатор с емкостью C . В первом эксперименте он соединил их последовательно, подключил к *RLC*-метру и снял показания в двух режимах работы. В режиме измерения индуктивности показания были равны $L_1 = 6,20$ мГн, а в режиме измерения емкости — $C_1 = 2,84$ мкФ. Во втором эксперименте те же самые элементы были соединены параллельно и подключены к тому же прибору. В режиме измерения индуктивности прибор показал $L_2 = 21,3$ мГн. Частота при всех этих измерениях поддерживалась одинаковой.

1. Какое значение C_2 покажет *RLC*-метр в режиме измерения емкости во втором эксперименте? Получите формулу и численное значение.

2. Чему равны индуктивность L и емкость C используемых Глюком катушки и конденсатора? Получите формулы и численные значения.

3. Пусть теперь измерения производятся для неидеальной катушки, индуктивность которой $L = 10,0$ мГн, а сопротивление $R = 5,0$ Ом. При каких значениях частоты f , на которой производятся измерения, связанная с сопротивлением погрешность определения индуктивности меньше 0,1 %? Считайте, что реальную катушку можно представить как последовательно соединенные идеальную катушку и резистор.

4. К катушке из предыдущего пункта Глюк последовательно присоединил конденсатор с емкостью $C = 1,00$ мкФ. Экспериментатор провел измерения индуктивности полученной цепи RLC -метром в максимально широком диапазоне частот. Постройте качественный график зависимости измеренных значений индуктивности от частоты. Укажите характерные точки и асимптотики зависимости индуктивности от частоты в пределе малых и больших частот.

Возможные решения

Задача №9-1. Фотография

Обозначим через O общее начальное положение шариков, через A и B — положения шариков 1 и 2 в момент времени t , соответствующий съёмке. Пусть \vec{v}_1 и \vec{v}_2 — векторы скоростей, сообщённых шарикам 1 и 2 соответственно. Тогда векторы их перемещений к моменту времени t выражаются как:

$$\vec{s}_1 = \vec{v}_1 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}, \quad \vec{s}_2 = \vec{v}_2 t + \frac{\vec{g} t^2}{2}.$$

Поскольку шарики начали движение из одной точки, вектор их относительного перемещения равен:

$$\vec{r}_{\text{отн}} = \vec{s}_1 - \vec{s}_2 = (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)t.$$

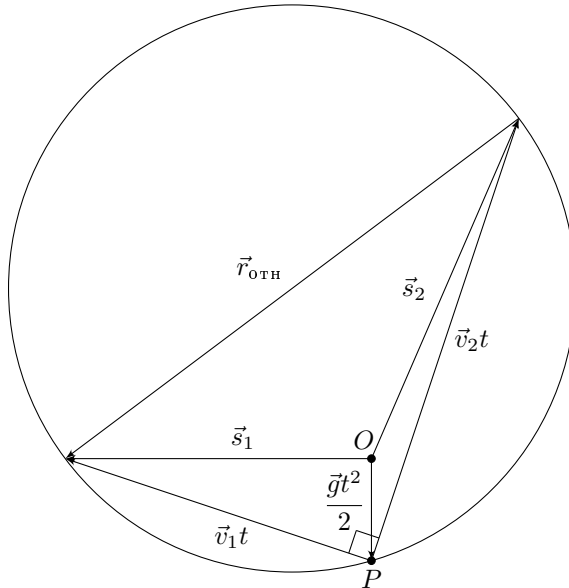


Рис. 1

Опустим из центра окружности перпендикуляр к горизонтальной поверхности и получим максимальное значение OP_{\max} (см. рисунок 2):

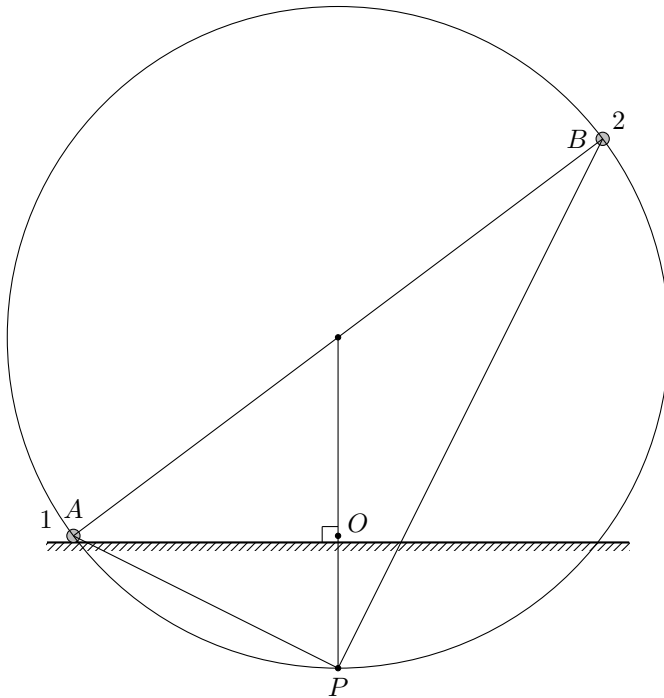


Рис. 2

Из заданного масштаба следует, что:

$$OP_{\max} \approx 2,5 \text{ м.}$$

Тогда время полёта шарика 1:

$$t = \sqrt{\frac{2OP_{\max}}{g}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,5}{9,8}} \approx 0,71 \text{ с.}$$

Найдём AP и BP :

$$AP \approx 4,3 \text{ м, } BP \approx 7,1 \text{ м.}$$

Учитывая, что $v_1 = AP/t$, а $v_2 = BP/t$, находим:

$$v_1 \approx 6,0 \text{ м/с, } v_2 \approx 10,0 \text{ м/с.}$$

Задача №9-2. Спица

Метод 1

Рассмотрим систему, состоящую из двух грузов и нити. На неё действуют три силы: сила тяжести $3m\vec{g}$, реакция опоры \vec{N}_1 со стороны вертикального участка и сила реакции \vec{N}_2 со стороны полуокружности. Линии действия сил \vec{N}_1 и $3m\vec{g}$ пересекаются в точке O . Следовательно, по теореме о трёх непараллельных силах, линия действия силы \vec{N}_2 также проходит через точку O (см. рисунок 1).

Сила \vec{N}_2 перпендикулярна касательной к окружности, поэтому направлена к её центру. Таким образом, центр полуокружности лежит на прямой, проходящей через точку приложения силы \vec{N}_2 и точку O .

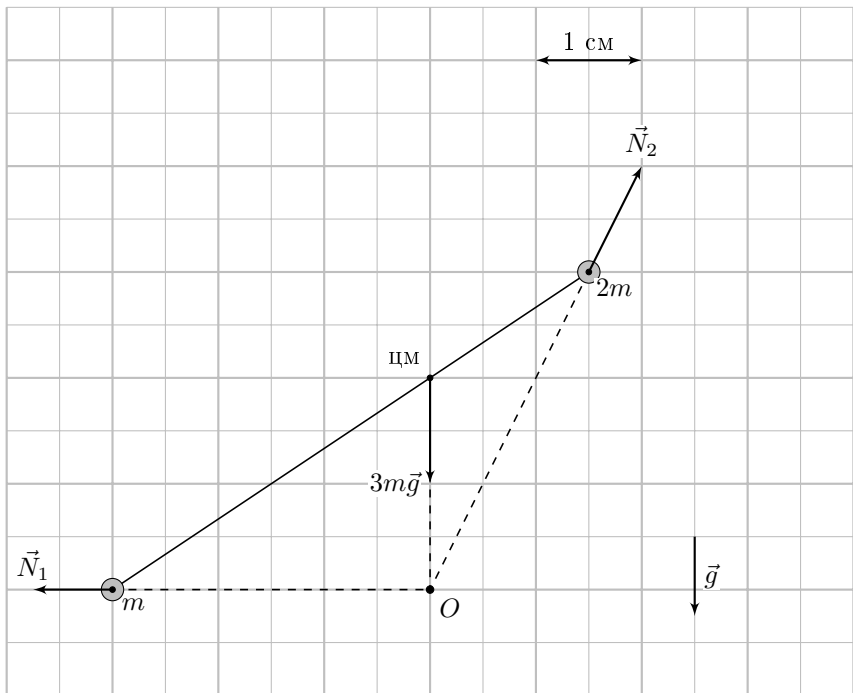


Рис. 1

Проведём через точку, соответствующую положению груза массой $2m$, касательную к окружности (перпендикуляр к \vec{N}_2). Обозначим через B точку пересечения этой касательной с вертикальным участком проволоки (см. рисунок 2).

Полученная точка B равноудалена от $2m$ и от точки излома проволоки A .

С помощью циркуля или линейки отложим отрезок AB вверх, восстановив точку A . Затем пересечем перпендикуляр к касательной, проведённой через точку $2m$, а также горизонтальную линию, проходящей через точку A (точку соединения участков проволоки) и получим центр полуокружности. Это позволяет восстановить положение всей полуокружности.

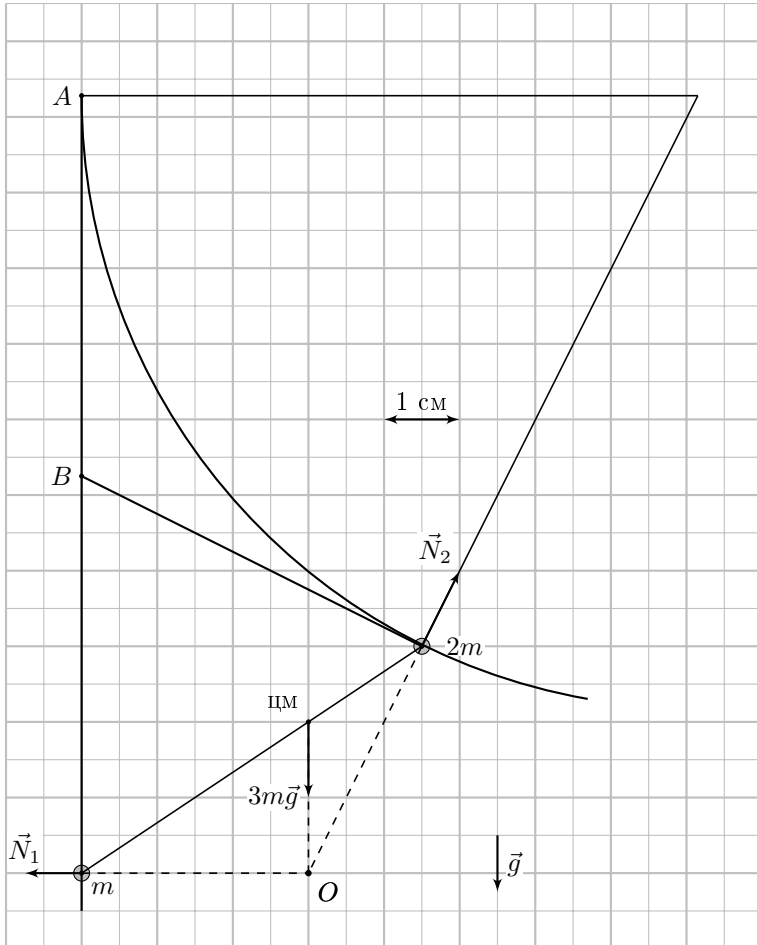


Рис. 2

Метод 2

После теоремы о трех силах можно не строить центр окружности геометрически,

а записать подобие:

$$\frac{R-x}{R+y} = \frac{z}{y}$$

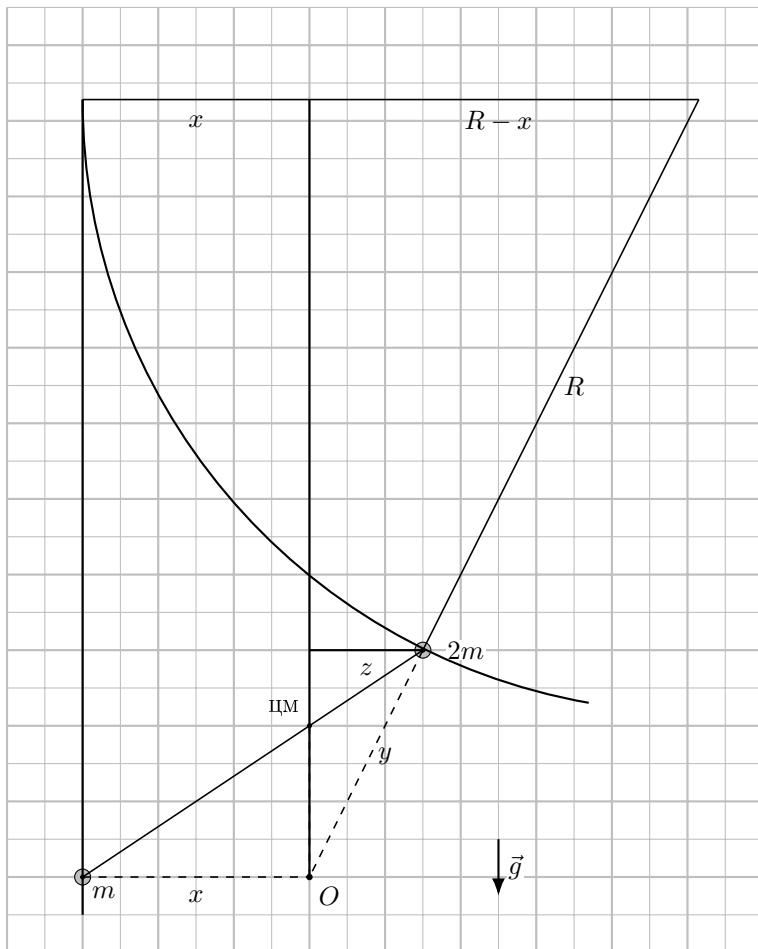


Рис. 3

Численные значения длин отрезков x , y и z находятся из рисунка: $x = 3$ см, $y = 3\sqrt{5}/2$ см, $z = 1,5$ см. Откуда:

$$R = \frac{y(x+z)}{y-z}.$$

Метод 3

Расставим силы и введём систему координат, как показано на рисунке 4. В ней координаты грузов m и $2m$, определяемые по масштабу, соответственно равны $(0; -y_1) = (0; -3 \text{ см})$ и $(x_2; 0) = (4,5 \text{ см}; 0)$. Обозначим через α угол между нитью и вертикалью, а через φ — угол между силой \vec{N}_2 и вертикалью.

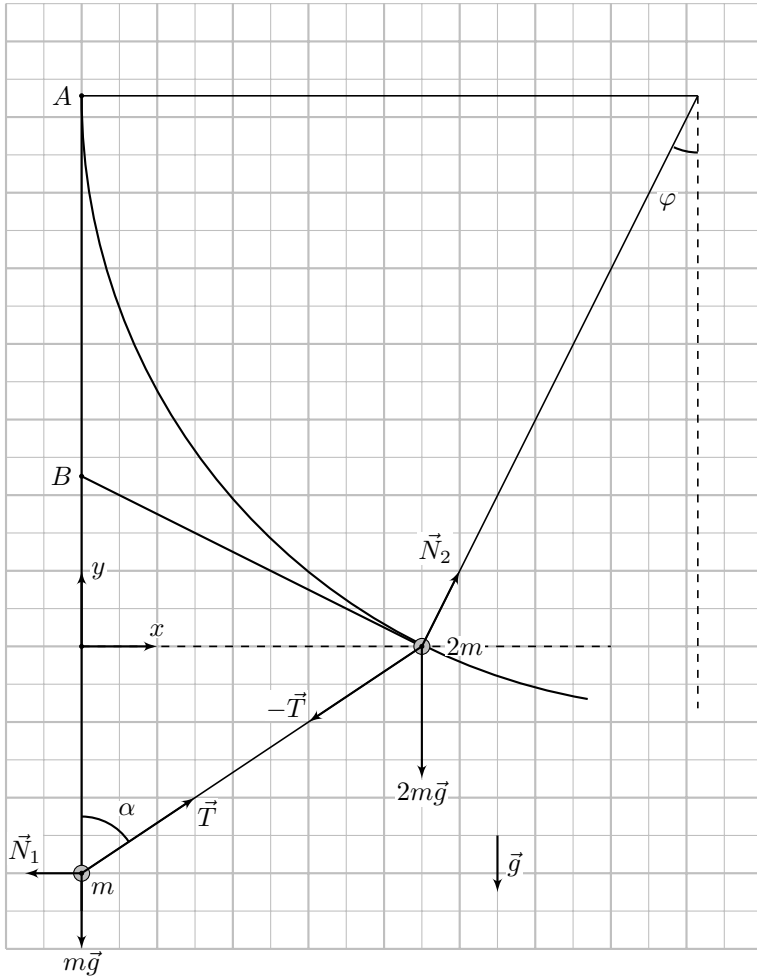


Рис. 4

Запишем условия равновесия для груза массы m :

$$\vec{N}_1 + \vec{T} + m\vec{g} = 0, \quad (1)$$

и для всей системы:

$$\vec{N}_1 + \vec{N}_2 + 3m\vec{g} = 0. \quad (2)$$

Из соответствующих треугольников сил (см. рисунок 5) получаем:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{3}.$$

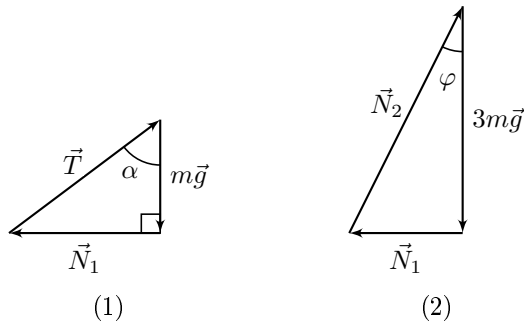


Рис. 5

С другой стороны,

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{x_2}{y_1} \Rightarrow \operatorname{tg} \varphi = \frac{x_2}{3y_1} = \frac{4,5}{9} = 0,5.$$

Следовательно,

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Из геометрии окружности:

$$x_2 = R(1 - \sin \varphi),$$

откуда:

$$R = \frac{4,5}{1 - \frac{1}{\sqrt{5}}} \approx 8,1 \text{ см},$$

а координаты центра окружности:

$$(R; R \cos \varphi) \approx (8,1 \text{ см}; 7,3 \text{ см}).$$

Сила полной реакции опоры \vec{Q} , действующая на кольцо, полностью компенсирует силу натяжения \vec{T} . При этом \vec{Q} составляет угол β с силой нормальной реакции опоры \vec{N} , направленной в центр окружности (см. рисунок 6). Тогда условие равновесия с учётом трения имеет вид:

$$\beta \leq \beta_{cr}, \quad \beta_{cr} = \text{tg } \mu.$$

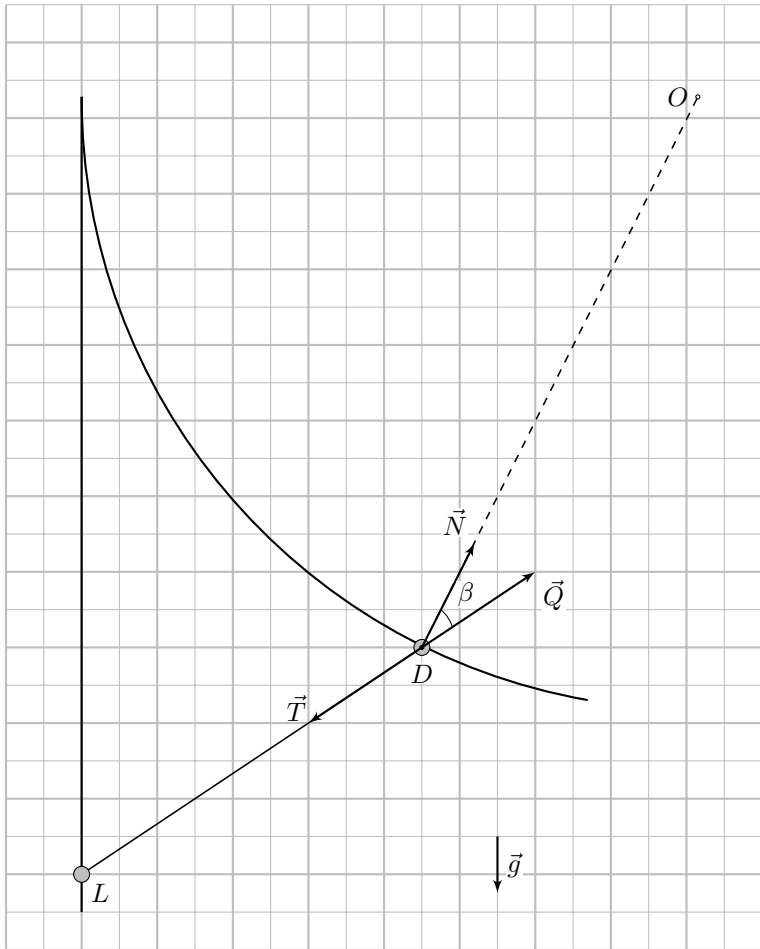


Рис. 6

Обозначим положение груза m точкой L , кольца — D . По теореме косинусов

для треугольника $\triangle ODL$:

$$OL^2 = R^2 + R^2 + 2R^2 \cos \beta.$$

С учётом ограничения на угол β получаем:

$$2R^2 + 2R^2 \cos \beta_{cr} \leq OL^2 \leq 4R^2.$$

По теореме Пифагора:

$$OL^2 = R^2 + h^2 \Rightarrow R^2 + 2R^2 \cos \beta_{cr} \leq h^2 \leq 3R^2.$$

Так как

$$\cos \beta_{cr} = \frac{1}{\sqrt{1 + \mu^2}},$$

получаем:

$$R\sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{1 + \mu^2}}} \leq h \leq R\sqrt{3}.$$

Задача №9-3. Наезд

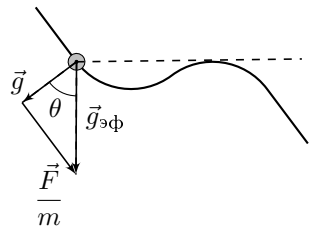
Метод 1

Бусинка движется под действием суммы внешних сил $\vec{F} + m\vec{g}$. Рассмотрим движение в поле эффективного ускорения свободного падения:

$$\vec{g}_{eff} = \vec{g} + \frac{\vec{F}}{m}.$$

Для преодоления горки необходимо, чтобы в любой точке траектории потенциальная энергия была меньше, чем в точке старта.

В критическом случае перпендикуляр к эффективному ускорению свободного падения касается второй четверть-окружности. Тогда из геометрии $\theta = 2 \arctg 1/2$.



$$F_{\min 1} = mg \operatorname{tg} \theta = \frac{4mg}{3}.$$

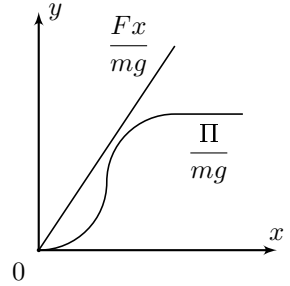
Метод 2

Если бусинка преодолела горку, это значит, что в любой момент времени работа внешних сил:

$$A_F \geq \Pi,$$

где Π — потенциальная энергия. Поделим обе части неравенства на mg и подставим $A_F = F \cdot x$:

$$\frac{F \cdot x}{mg} \geq h.$$



Рассмотрим график зависимости обеих величин от x . В критическом случае графики касаются. Тогда тангенс угла наклона прямой равен:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3} = \frac{F}{mg}.$$

Получаем:

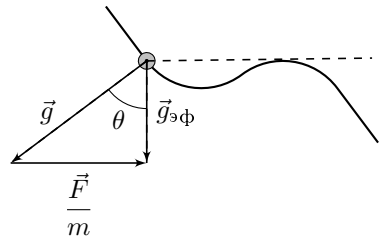
$$F_{\min 1} = mg \operatorname{tg} \theta = \frac{4mg}{3}.$$

Метод 1

Минимум силы достигается, когда вектор \vec{F}/m перпендикулярен вектору \vec{g}_{eff} . Направление силы F — по касательной к горке под углом θ к горизонту.

$$F_{\min 2} = mg \sin \theta = \frac{4}{5} mg;$$

$$\theta = 2 \operatorname{arctg} 1/2 = \operatorname{arcsin} 4/5.$$



Метод 2

Снова запишем неравенство

$$A_F \geq \Pi.$$

Подставим $A_F = F_x \cdot x + F_y \cdot h$:

$$F_x \cdot x + F_y \cdot h \geq mgh;$$

$$F_x \cdot x \geq h(mg - F_y);$$

$$\frac{F_x}{mg - F_y} \cdot x \geq h.$$

Аналогично предыдущему пункту получаем, что:

$$\frac{F_x}{mg - F_y} = \operatorname{tg} \theta = \frac{4}{3};$$

$$F_x = \frac{4}{3}mg - \frac{4}{3}F_y$$

С учётом того, что $F^2 = F_x^2 + F_y^2$ получаем:

$$F^2 = \frac{16}{9}F_y^2 - \frac{32}{9}F_ymg + \frac{16}{9}m^2g^2 + F_y^2 = \frac{25}{9}F_y^2 - \frac{32}{9}F_ymg + \frac{16}{9}m^2g^2.$$

Минимум этой квадратичной зависимости достигается при:

$$F_y = \frac{16}{25}mg.$$

Тогда

$$F_{\min 2}^2 = \frac{16}{9}m^2g^2 - \frac{16^2}{25 \cdot 9}m^2g^2 = \frac{16}{25}m^2g^2.$$

Получаем ответ:

$$F_{\min 2} = \frac{4}{5}mg.$$

Угол с горизонтом:

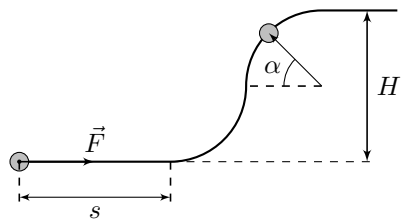
$$\theta = \operatorname{arctg} \frac{F_y}{F_x} = \operatorname{arctg} \frac{4}{3}$$

Если бусинка преодолела горку, это значит, что в любой момент времени сумма работ внешних сил:

$$A_F + A_{mg} \geq 0.$$

Для максимизации работы силы F , последняя должна быть всегда направлена вдоль траектории. Рассмотрим критический случай, когда бусинка достигает предельной точки, остановившись на второй четверть-окружности. Параметризуем эту точку углом α . В критическом случае эта точка является положением равновесия:

$$F = mg \cos \alpha.$$



Работа сил равна нулю:

$$F \cdot \left(s + H/2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right) \right) = mg \frac{H}{2} \cdot (1 + \sin \alpha);$$

$$s = \frac{mg}{F} \frac{H}{2} \cdot (1 + \sin \alpha) - \frac{H}{2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} + \alpha \right);$$

$$s = \frac{H}{2} \left(\frac{1 + \sin \alpha}{\cos \alpha} - \frac{\pi}{2} - \alpha \right)$$

С учётом $F = mg \cos \alpha$:

$$s = \frac{H}{2} \left(\frac{1 + \sqrt{1 - F^2/m^2 g^2}}{F/mg} - \frac{\pi}{2} - \arccos \frac{F}{mg} \right).$$

Для $F = mg/2$:

$$s = \frac{H}{2} \left(2 + \sqrt{3} - \frac{5\pi}{6} \right).$$

Задача №9-4. Теплообменник

Пока в смеси есть лёд, её температура 0°C . Всё тепло от горячей воды идёт на плавление льда.

Далее будем рассматривать изменение всех величин вдоль оси x . Выделим элементарный участок трубы длиной Δx , настолько малый, что можно считать скорость движения смеси постоянной. За время $\Delta \tau$ внутри выделенного объёма масса льда изменится на:

$$\Delta m_{\text{л}} = \mu_x \Delta \tau \Delta \alpha.$$

Изменение внутренней энергии горячей воды:

$$\delta Q_2 = -c\mu_r \Delta \tau \Delta T_r.$$

Так как теплопотерями в окружающую среду и теплоёмкостью стенок можно пренебречь и режим течения является установившимся, то изменение внутренней энергии выделенного элемента равно 0:

$$\Delta U = 0; \quad -\lambda\mu_x \Delta \alpha - c\mu_r \Delta T_r = 0. \quad (1)$$

Из выражения (1) следует, что

$$\frac{\Delta T_r}{\Delta \alpha} = -\frac{\lambda\mu_x}{c\mu_r} = \text{const}. \quad (2)$$

Отсюда следует, что

$$T_{\Gamma}(L) - T_{\Gamma}(0) = \frac{\mu_x \lambda}{\mu_{\Gamma} c} (\alpha(0) - \alpha(L)),$$

где $\alpha(0) = 0,4$, $\alpha(L) = 0,1$.

Отсюда

$$T_{\Gamma}(0) = T_{\Gamma}(L) - \frac{\mu_x \lambda}{\mu_{\Gamma} c} (\alpha(0) - \alpha(L)),$$

или:

$$T_{\Gamma}(0) = 26,5^{\circ}\text{C}.$$

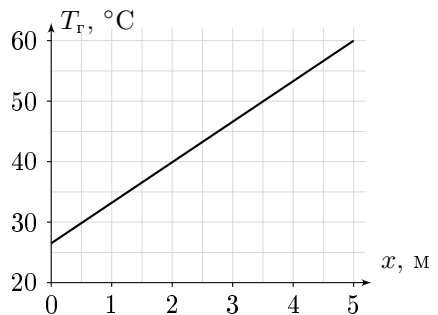
Разделим числитель и знаменатель левой части выражения (2) на Δx и получим:

$$\frac{\Delta T_{\Gamma}}{\Delta x} = -\frac{\lambda \mu_x}{c \mu_{\Gamma}} \frac{\Delta \alpha}{\Delta x} = 6,7^{\circ}\text{C}/\text{м}.$$

Тогда:

$$T(x) = 26,5^{\circ}\text{C} + 6,7x.$$

График зависимости температуры $T_{\Gamma}(x)$ горячей воды от координаты приведён на рисунке.



Рассмотрим элементарный участок трубы длиной Δx . Объем смеси равен

$$\Delta V = \Delta V_{\text{л}} + \Delta V_{\text{в}},$$

где $\Delta V_{\text{л}}$ и $\Delta V_{\text{в}}$ — объёмы твёрдой и жидкой фаз. Тогда

$$\Delta V = \frac{\alpha(x) \Delta m}{\rho_{\text{л}}} + \frac{(1 - \alpha(x)) \Delta m}{\rho_{\text{в}}}.$$

Плотность смеси:

$$\rho(x) = \frac{\Delta m}{\Delta V} = \left(\frac{\alpha(x)}{\rho_{\text{л}}} + \frac{1 - \alpha(x)}{\rho_{\text{в}}} \right)^{-1}.$$

Массовый расход постоянен:

$$\mu = S \rho(x) v(x),$$

откуда

$$v(x) = \frac{\mu_x}{S \rho(x)} = \frac{\mu_x}{S} \left(\frac{\alpha(x)}{\rho_{\text{л}}} + \frac{1 - \alpha(x)}{\rho_{\text{в}}} \right).$$

С учётом того, что

$$\alpha(x) = 0,4 - 0,06x,$$

$$v(x) = \frac{\mu_x}{S\rho_{\text{в}}\rho_{\text{л}}} (0,6\rho_{\text{л}} + 0,4\rho_{\text{в}} - 0,06x(\rho_{\text{в}} - \rho_{\text{л}})).$$

Задача №9-5. Мосты

Воспользуемся методом узловых потенциалов. Рассмотрим случай, когда на резисторах R_1 и R_2 мощность не выделяется. Тогда напряжения на этих резисторах равны нулю.

Пусть $\varphi_C = 0$, тогда $\varphi_D = U_0$ (см. рисунок 1). Так как токи через R_1 и R_2 равны нулю, получаем:

$$\varphi_A = \varphi_C = 0$$

и

$$\varphi_B = \varphi_D = U_0.$$

Следовательно, напряжение источника, подключенного к точкам A и B равно:

$$\varphi_B - \varphi_A = U_0.$$

Метод 1

Воспользуемся методом наложения. Рассмотрим схему с противоположной полярностью источника (подключенного к A и B) как суперпозицию ранее рассмотренной схемы и схемы с источником таким, что $\varphi_B - \varphi_A = -2U_0$. Ранее рассмотренная схема дает нулевые токи через R_1 и R_2 . Значит, осталось лишь определить силы токов I_1 и I_2 , текущих через резисторы R_1 и R_2 во второй схеме. Расставим токи во второй схеме с учетом закона Ома (см. рисунок 2). Из закона сохранения заряда:

$$I_1 + \frac{I_1 R_1}{r} = I_2 + \frac{I_2 R_2}{r};$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \frac{R_2 + r}{R_1 + r}.$$

Мощности на этих резисторах $P_1 = I_1^2 R_1$ и $P_2 = I_2^2 R_2$ равны, следовательно:

$$1 = \frac{P_1}{P_2} = \left(\frac{I_1}{I_2}\right)^2 \frac{R_1}{R_2} = \left(\frac{R_2 + r}{R_1 + r}\right)^2 \frac{R_1}{R_2}.$$

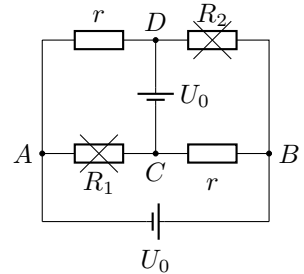


Рис. 1

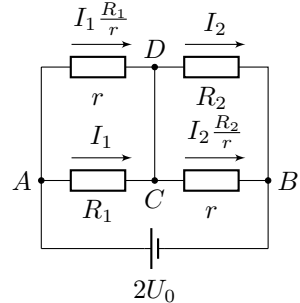


Рис. 2

Метод 2

Введём силы токов через резисторы с учетом закона сохранения заряда (см. рисунок 3). Распишем разность потенциалов двумя способами:

$$\varphi_A - \varphi_B = Ir + I_2R_2;$$

$$\varphi_A - \varphi_B = I_1R_1 + (I_1 - I_2 + I)r;$$

$$I_2R_2 - I_1R_1 = (I_1 - I_2)r.$$

Откуда

$$r = \frac{I_2R_2 - R_1}{1 - \frac{I_2}{I_1}}.$$

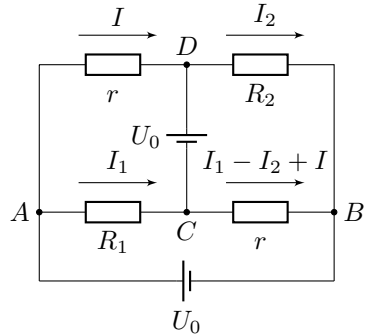


Рис. 3

Условие равенства мощностей $I_1^2R_1 = I_2^2R_2$, следовательно:

$$\frac{I_2}{I_1} = \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}; \Rightarrow r = \frac{\sqrt{\frac{R_1}{R_2}}R_2 - R_1}{1 - \sqrt{\frac{R_1}{R_2}}}.$$

Из полученных формул выразим r :

$$r = \sqrt{R_1R_2}.$$

Метод 1

Воспользуемся методом эквивалентного источника. Заменяем всю схему на источник напряжением U^* и сопротивлением r^* . Эквивалентное напряжение найдем как разность потенциалов между узлами A и B в отсутствие внешних токов (см. рисунок 4):

$$U^* = \varphi_A - \varphi_B = -\frac{U_0}{R_1 + r}r + \frac{U_0}{R_2 + r}R_2 = 0.$$

Эквивалентное сопротивление найдем, заменив ветвь с источником на перемычку:

$$r^* = \frac{R_1r}{R_1 + r} + \frac{R_2r}{R_2 + r} = \sqrt{R_1R_2}.$$

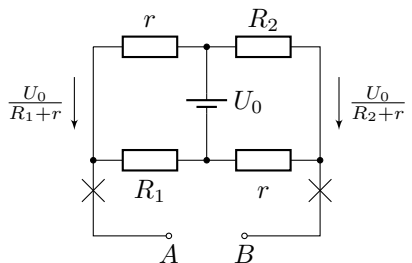


Рис. 4

Таким образом, двухполюсник AB эквивалентен просто резистору сопротивлением $\sqrt{R_1 R_2}$. Следовательно, омметр при подключении к такому двухполюснику покажет $R = \sqrt{R_1 R_2}$ вне зависимости от его полярности.

Метод 2

Заметим, что условие $r^2 = R_1 R_2$ эквивалентно условию сбалансированности моста $r/R_1 = R_2/r$. Рассмотрим схему, в которой источник \mathcal{E}_0 внутри омметра заменен на перемычку. Через внутреннее сопротивление r_0 омметра ток не течет, поскольку он расположен на диагонали сбалансированного моста. Тогда:

$$(\varphi_A - \varphi_B)^{(1)} = 0; I_{AB}^{(1)} = 0.$$

Рассмотрим схему, в которой источник U_0 заменен на перемычку. Через эту перемычку ток также не течет в силу сбалансированности моста, тогда:

$$(\varphi_A - \varphi_B)^{(2)} = \pm \mathcal{E}; I_{AB}^{(2)} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{r^*}; r^* = \frac{R_1 r}{R_1 + r} + \frac{R_2 r}{R_2 + r}.$$

Наложим две рассматриваемые схемы. Итоговая разность потенциалов на выводах омметра:

$$\varphi_A - \varphi_B = (\varphi_A - \varphi_B)^{(1)} + (\varphi_A - \varphi_B)^{(2)} = \pm \mathcal{E},$$

а сила тока

$$I_{AB} = I_{AB}^{(1)} + I_{AB}^{(2)} = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{r^*}.$$

Тогда показание омметра:

$$R = \frac{\varphi_A - \varphi_B}{I_{AB}} = r^* = \frac{R_1 r}{R_1 + r} + \frac{R_2 r}{R_2 + r} = \sqrt{R_1 R_2}.$$

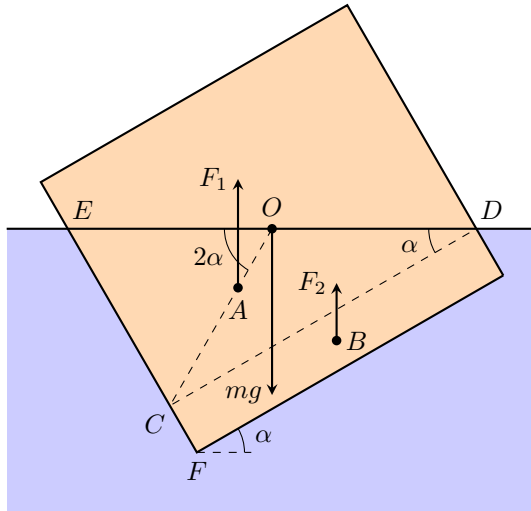
Получили, что через омметр не течет ток от источника U_0 . Следовательно, омметр показывает эквивалентное сопротивление r^* вне зависимости от полярности подключения.

$$R = \sqrt{R_1 R_2}.$$

Задача №10-1. Всплывающий брусок

Рассмотрим сначала ситуацию, когда брусок плавает, не касаясь дна и повернувшись на угол α вокруг своей продольной оси (на рисунке изображено поперечное сечение бруска). Поскольку плотность материала равна 50% плотности воды, брусок погружён на половину своего объёма, и, следовательно, поверхность воды проходит через продольную ось симметрии бруска (через точку O на рис.). Помимо силы тяжести, приложенной в точке O , на брусок действует сила Архимеда. Для удобства подсчётов, разобьём погружённую часть изображённого сечения отрезком CD на две фигуры — треугольник ECD и оставшийся

прямоугольник — и найдём центры масс каждой из них. Центр первой фигуры находится в точке пересечения медиан $\triangle ECD$ (в точке A), а центр второй — в точке B , где пересекаются диагонали прямоугольника.



Учитывая, что $CD = a$, $EC = a \operatorname{tg} \alpha$, $CF = (b - a \operatorname{tg} \alpha)/2$, и обозначив длину бруска как L , запишем выражения для составляющих силы Архимеда F_1 и F_2 , приложенных в точках A и B соответственно:

$$F_1 = \rho_{\text{в}} g L \cdot \frac{1}{2} a \cdot a \operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{2} \rho_{\text{в}} g a^2 L \operatorname{tg} \alpha, \quad F_2 = \rho_{\text{в}} g a L \cdot \frac{b - a \operatorname{tg} \alpha}{2}.$$

Длины отрезков AO и BO , опираясь на различные геометрические теоремы, можно найти как

$$AO = \frac{1}{3} CO = \frac{1}{6} ED = \frac{a}{6 \cos \alpha}, \quad BO = \frac{a \operatorname{tg} \alpha + CF}{2} = \frac{b + a \operatorname{tg} \alpha}{4}.$$

Определим теперь значение угла α , не равное нулю, при котором брусок находится в равновесии. Для этого запишем правило моментов относительно точки O :

$$F_1 \cdot AO \cos 2\alpha = F_2 \cdot BO \cos(90^\circ - \alpha) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \rho_{\text{в}} g a^2 L \operatorname{tg} \alpha \cdot \frac{a \cos 2\alpha}{6 \cos \alpha} = \rho_{\text{в}} g a L \cdot \frac{b^2 - a^2 \operatorname{tg}^2 \alpha}{8} \cdot \sin \alpha \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \frac{2}{3}(1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) &= \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \operatorname{tg}^2 \alpha \quad \Rightarrow \\ \Rightarrow \quad \operatorname{tg}^2 \alpha &= 3 \left(\frac{b}{a}\right)^2 - 2 = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30^\circ. \end{aligned}$$

Данное положение равновесия является устойчивым, так как при $\alpha > 30^\circ$ момент силы F_1 превышает момент силы F_2 , и брусок будет поворачиваться по часовой стрелке (угол α будет уменьшаться). Если же $\alpha < 30^\circ$, то, наоборот, момент силы F_2 будет больше, и брусок будет поворачиваться против часовой стрелки (α станет увеличиваться). Причём это справедливо, в том числе, и для малых углов, близких к 0° . Таким образом, когда вода дойдёт до высоты $b/2$, исходное положение бруска (при $\alpha = 0^\circ$) перестанет быть устойчивым, и один из краёв бруска (левый или правый — дело случая) станет подниматься вверх. При дальнейшем подъёме уровня воды вращение бруска продолжится, пока угол α не достигнет величины 30° . Если уровень воды продолжит увеличиваться, брусок оторвётся от дна сосуда и будет плавать в таком (устойчивом!) положении. Найдём высоту уровня воды, при которой произойдёт отрыв бруска:

$$H = EF \cos \alpha = \frac{b + a \operatorname{tg} \alpha}{2} \cdot \cos \alpha = \frac{\sqrt{7/3} + 1}{4} \cdot a \approx 0,632a.$$

Задача №10-2. Двое против ветра

Метод №1

Рассмотрим относительное движение шариков. Запишем второй закон Ньютона для каждого из них

$$\begin{aligned} m\vec{a}_1 &= m\vec{g} - k(\vec{v}_1 - \vec{u}), \\ m\vec{a}_2 &= m\vec{g} - k(\vec{v}_2 - \vec{u}) \end{aligned}$$

и вычтем полученные выражения друг из друга

$$m\vec{a}_r = -k\vec{v}_r.$$

Здесь $\vec{a}_r = \vec{a}_2 - \vec{a}_1$ — относительное ускорение шариков, а $\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1$ — их относительная скорость. Из этого равенства следует, что малое изменение относительной скорости $d\vec{v}_r$ и малое изменение вектора смещения второго шарика относительно первого $d\vec{l}$ связаны соотношением

$$d\vec{v}_r = -\frac{k}{m}d\vec{l}.$$

Поскольку оно справедливо в любой момент времени, полное изменение относительной скорости $\Delta \vec{v}_r$ и полное изменение вектора смещения $\Delta \vec{l}$ связаны аналогично

$$\Delta \vec{v}_r = -\frac{k}{m} \Delta \vec{l}.$$

Согласно условию, спустя некоторое достаточно большое время относительная скорость шариков пренебрежимо мала ($\vec{v}_r = \vec{0}$), а вектор смещения между ними $\vec{l} = \vec{L}$ направлен вертикально вверх и имеет длину L , следовательно

$$\begin{aligned} \vec{0} - (\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10}) &= -\frac{k}{m} (\vec{L} - \vec{0}), \\ \vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} &= \frac{k}{m} \vec{L}. \end{aligned}$$

Запишем это равенство в проекции на горизонтальную ось

$$v_{20} \cos \alpha_2 - v_{10} \cos \alpha_1 = 0,$$

откуда

$$v_{20} = v_{10} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \approx 12,26 \text{ м/с}.$$

Метод №2

Запишем для первого шарика второй закон Ньютона в проекции на ось OX , направленную горизонтально вправо,

$$m \frac{dv_{1x}}{dt} = -k(v_{1x} + u).$$

Отсюда, применяя непосредственное интегрирование и учитывая начальные условия ($x_1(0) = 0$ и $v_{1x}(0) = v_{10} \cos \alpha_1$), получим

$$\begin{aligned} v_{1x}(t) &= (v_{10} \cos \alpha_1 + u) e^{-\frac{k}{m}t} - u, \\ x_1(t) &= \frac{m}{k} (v_{10} \cos \alpha_1 + u) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - ut. \end{aligned}$$

Аналогичным образом,

$$\begin{aligned} v_{2x}(t) &= (v_{20} \cos \alpha_2 + u) e^{-\frac{k}{m}t} - u, \\ x_2(t) &= \frac{m}{k} (v_{20} \cos \alpha_2 + u) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - ut. \end{aligned}$$

Из условия следует, что $x_1(\infty) = x_2(\infty)$, поэтому

$$v_{10} \cos \alpha_1 = v_{20} \cos \alpha_2,$$

откуда

$$v_{20} = v_{10} \frac{\cos \alpha_1}{\cos \alpha_2} \approx 12,26 \text{ м/с.}$$

Метод №1

Заметим, что в соответствии с тем, что второй шарик упал позднее, вектор \vec{L} направлен вверх. Запишем полученное выше векторное равенство $\vec{v}_{20} - \vec{v}_{10} = \frac{k}{m} \vec{L}$ в проекции на вертикальную ось

$$v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1 = \frac{k}{m} L.$$

Отсюда

$$\frac{m}{k} = \frac{L}{v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1} = 0,75 \text{ с.}$$

Теперь рассмотрим движение первого шарика в отдельности. Запишем для него второй закон Ньютона в проекции на вертикальную ось OY ,

$$m \frac{dv_{1y}}{dt} = -mg - kv_{1y} \quad \Rightarrow \quad dv_{1y} = -gdt - \frac{k}{m} dy_1.$$

Здесь y_1 — вертикальная координата первого шарика. Нетрудно заметить, что спустя достаточно большое время вертикальная проекция скорости примет значение $-mg/k$. Переходя к конечным приращениям так, как мы раньше сделали с относительной скоростью и вектором смещения между шариками, получим

$$-\frac{mg}{k} - v_{10} \sin \alpha_1 = -g\tau + \frac{k}{m} H.$$

Отсюда

$$H = \frac{m}{k} (g\tau - v_{10} \sin \alpha_1) - \frac{m^2}{k^2} g = 30,83 \text{ м.}$$

Метод №2

Запишем для первого шарика второй закон Ньютона в проекции на ось OY , направленную вертикально вверх,

$$m \frac{dv_{1y}}{dt} = -mg - kv_{1y}.$$

Отсюда, интегрируя с учётом начальных условий ($y(0) = 0$ и $v_{1y}(0) = v_{10} \sin \alpha_1$), получим

$$v_{1y}(t) = \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k},$$

$$y_1(t) = \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k} t.$$

Аналогичным образом,

$$v_{2y}(t) = \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) e^{-\frac{k}{m}t} - \frac{mg}{k},$$

$$y_2(t) = \frac{m}{k} \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}t}) - \frac{mg}{k}t.$$

Из условия следует, что $y_2(\infty) - y_1(\infty) = L$, так что

$$\frac{m}{k}(v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1) = L.$$

Отсюда

$$\frac{m}{k} = \frac{L}{v_{20} \sin \alpha_2 - v_{10} \sin \alpha_1} = 0,75 \text{ с.}$$

Согласно условию,

$$H = -y_1(\tau) = \frac{mg}{k}\tau - \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m}\tau}) = 30,84 \text{ м.}$$

Метод №1

Рассмотрим движение системы шариков как целого. Ускорение центра масс $\vec{a}_c = (\vec{a}_1 + \vec{a}_2)/2$ связано с внешними силами выражением

$$2m\vec{a}_c = -k(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 - 2\vec{u}) + 2m\vec{g} = -2k(\vec{v}_c - \vec{u}) + 2m\vec{g},$$

где $\vec{v}_c = (\vec{v}_1 + \vec{v}_2)/2$ — скорость центра масс. Введём обозначение $\vec{v}_f = \vec{u} + m\vec{g}/k$ — несложно показать, что это установившаяся скорость любого из шариков. Получим

$$\vec{a}_c = -\frac{k}{m}(\vec{v}_c - \vec{v}_f).$$

Перейдём в систему отсчёта, которая движется с постоянной скоростью \vec{v}_f . Ускорение и скорость центра масс в этой системе обозначим \vec{a}'_c и \vec{v}'_c соответственно. Тогда

$$\vec{a}'_c = -\frac{k}{m}\vec{v}'_c.$$

Это уравнение описывает прямолинейное движение! При этом известно, что центр масс дважды проходил через точку O , которая в выбранной системе отсчёта движется с постоянной скоростью $-\vec{v}_f$. Следовательно, $\vec{v}'_c \parallel \vec{v}_f$. Но $\vec{v}'_c = \vec{v}_c - \vec{v}_f$, а значит

$$\vec{v}_c \parallel \vec{v}_f,$$

то есть

$$(\vec{v}_1 + \vec{v}_2) \parallel \left(\vec{u} + \frac{m\vec{g}}{k} \right).$$

Это верно для любого момента времени, в том числе для начального. Таким образом

$$\frac{v_{10} \cos \alpha_1 + v_{20} \cos \alpha_2}{v_{10} \sin \alpha_1 + v_{20} \sin \alpha_2} = \frac{u}{mg/k}.$$

С учётом $v_{20} \cos \alpha_2 = v_{10} \cos \alpha_1$ отсюда получим

$$u = \frac{m}{k} \frac{2g}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \approx 10,96 \text{ м/с.}$$

Метод №2

Пусть ось OY шарики пересекают в момент времени t_1 на расстояниях h от точки O . Тогда имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m}{k} (v_{10} \cos \alpha_1 + u) (1 - e^{-\frac{k}{m} t_1}) - ut_1, \\ -h &= \frac{m}{k} \left(v_{10} \sin \alpha_1 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m} t_1}) - \frac{mg}{k} t_1, \\ h &= \frac{m}{k} \left(v_{20} \sin \alpha_2 + \frac{mg}{k} \right) (1 - e^{-\frac{k}{m} t_1}) - \frac{mg}{k} t_1. \end{aligned}$$

Исключив из этой системы t_1 и h , выразим

$$u = \frac{2mg}{k} \frac{v_{10} \cos \alpha_1}{v_{10} \sin \alpha_1 + v_{20} \sin \alpha_2}.$$

С учётом $v_{20} \cos \alpha_2 = v_{10} \cos \alpha_1$ отсюда получим

$$u = \frac{m}{k} \frac{2g}{\operatorname{tg} \alpha_1 + \operatorname{tg} \alpha_2} \approx 10,96 \text{ м/с.}$$

Задача №10-3. Газировка под поршнем

Пусть $V_{\text{в}}$ — объём верхней части сосуда, V_1 и V_2 — объёмы газа и, соответственно, газированной воды в нижней части сосуда. Так как вода поступает с постоянной скоростью, а суммарный объём сосуда равен $2V_0$, то

$$V_2 = qt, \quad V_1 = 2V_0 - V_{\text{в}} - qt.$$

Рассмотрим случай, когда вода ещё не заполнила всю нижнюю часть сосуда ($V_1 > 0$). Поршень, разделяющий сосуд, лёгкий и движется без трения, поэтому давление углекислого газа P по обе стороны от него одинаково. Масса CO_2 , растворённого в воде, согласно закону Генри равна

$$m_2 = \mu_{\text{п}} V_2 = kPV_2 = kPqt.$$

В начальный момент массы газа в верхней и нижней частях сосуда равны, следовательно в некоторый момент t масса газа под поршнем

$$m_1 = m_b - m_2 = m_b - kPqt, \quad (*)$$

где m_b — масса углекислого газа в верхней части сосуда. Запишем теперь уравнения Менделеева–Клапейрона для газа, находящегося по обе стороны от поршня, и, выражая оттуда массы, подставим их в уравнение (*)

$$\begin{aligned} \begin{cases} PV_b = m_b RT_0/M, \\ PV_1 = m_1 RT_0/M \end{cases} &\Rightarrow \frac{PV_1 M}{RT_0} = \frac{PV_b M}{RT_0} - kPqt \Rightarrow \\ &\Rightarrow V_1 = V_b - \frac{kRT_0}{M} \cdot qt. \end{aligned}$$

Отсюда, решая систему, найдём, что

$$V_b = V_0 + \frac{qt}{2} \left(\frac{kRT_0}{M} - 1 \right), \quad V_1 = V_0 - \frac{qt}{2} \left(\frac{kRT_0}{M} + 1 \right). \quad (**)$$

Поскольку

$$\frac{kRT_0}{M} = \frac{3,17 \cdot 10^{-5} \cdot 8,31 \cdot 274}{0,044} \approx 1,64 > 1,$$

то из первого выражения в (**) следует, что V_b увеличивается с постоянной скоростью, а поршень движется вниз. Скорость его движения равна

$$v_{\text{п}} = \frac{\Delta V_b}{S \Delta t} = \frac{q}{2S} \left(\frac{kRT_0}{M} - 1 \right) = \frac{4 \text{ см}^3/\text{с}}{256 \text{ см}^2} (1,64 - 1) \approx 0,01 \text{ см/с}.$$

Из второго выражения в (**) следует, что объём газа над поверхностью воды в нижней части сосуда непрерывно уменьшается и в момент времени

$$t_1 = \frac{2V_0}{q(kRT_0/M + 1)} = \frac{2 \cdot 6,6 \text{ л}}{0,004 \text{ л/с} \cdot (1,64 + 1)} \approx 1250 \text{ с}$$

становится нулевым, весь газ оказывается растворённым в жидкости, а жидкость упирается в поршень. В дальнейшем поступающая вода будет поднимать поршень, а объём газа в верхней части сосуда станет уменьшаться. Процесс, происходящий с газом над поршнем, изотермический, поэтому минимальное давление P_{\min} достигается при максимальном V_b , то есть через время $t = t_1$ после включения насоса.

Максимальный объём верхней части сосуда достигается в момент времени t_1 . Найдём этот объём, подставив выражение для t_1 в первую формулу (**):

$$V_{b \max} = 2V_0 \cdot \frac{kRT_0/M}{kRT_0/M + 1} \approx 8,2 \text{ л}.$$

Давление газа над поршнем в этот момент, согласно закону Бойля–Мариотта, равно

$$P_{min} = \frac{P_0 V_0}{V_{B \max}} \approx 132 \text{ кПа.}$$

В момент выключения насоса давление газа над поршнем равно $P_{кр}$, а объём верхней части сосуда составляет

$$V_{B \text{кр}} = \frac{P_0 V_0}{P_{кр}} = \frac{2V_0}{5} = 2,64 \text{ л.}$$

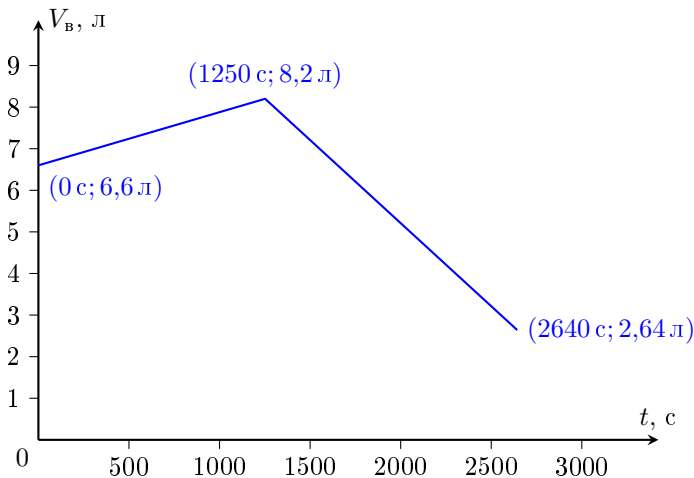
Объём остальной части сосуда, заполненной водой, равен

$$V_{2 \text{кр}} = 2V_0 - V_{B \text{кр}} = \frac{8V_0}{5}.$$

Отсюда получим, что время работы насоса

$$t_2 = \frac{V_{2 \text{кр}}}{q} = \frac{8V_0}{5q} = 2640 \text{ с.}$$

Исходя из результатов, полученных в предыдущих пунктах, график зависимости $V_B(t)$ имеет вид ломаной, состоящей из двух прямолинейных участков. Вершина ломаной находится в точке с координатами $(t_1; V_{B \max})$, а её концы — в точках $(0; V_0)$ и $(t_2; V_{B \text{кр}})$. Построим график функции $V_B(t)$, отметив на нём характерные точки.



Задача №10-4. Гантель в полости

Рассмотрим плоскость, перпендикулярную осям полости и цилиндра. Пусть O — точка пересечения оси цилиндра с этой плоскостью, а O' — точка пересечения с осью полости (рис. 1). Выберем произвольную точку A внутри полости. Если $\vec{r} = \vec{OA}$, $\vec{r}' = \vec{O'A}$, а $\vec{d} = \vec{OO'}$, тогда $\vec{r} = \vec{r}' + \vec{d}$.

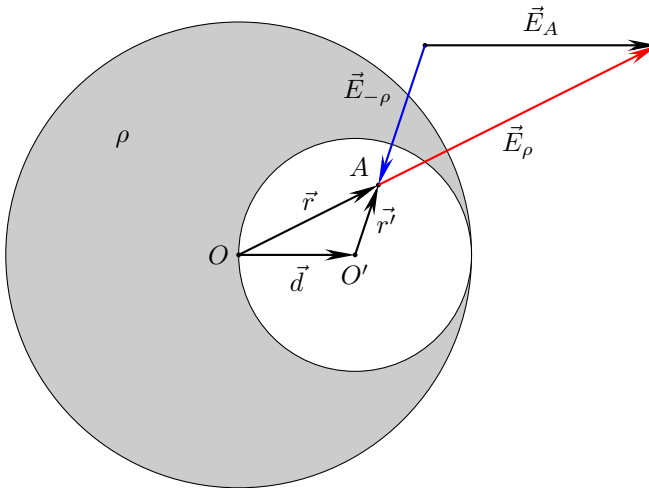


Рис. 1

Пусть ρ — объёмная плотность заряда цилиндра, тогда полость можно представить как суперпозицию цилиндров с объёмной плотностью заряда ρ и $-\rho$. Первый цилиндр дополняет цилиндр с вырезом до полного сплошного цилиндра. Поле внутри выреза представим как суперпозицию полей дополненного цилиндра и цилиндра с плотностью заряда $-\rho$.

Используя симметрию, найдём с помощью теоремы Гаусса напряжённость поля $E(r)$ внутри равномерно заряженного цилиндра:

$$\Phi_E = \frac{q_{in}}{\varepsilon_0}, \text{ где } \Phi_E = 2\pi r l E(r), q_{in} = \pi r^2 l \rho,$$

откуда $E(r) = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$ или, в векторном виде, $\vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r}$. Тогда напряжённость поля в произвольной точке A равна

$$\vec{E}_A = \vec{E}_\rho(\vec{r}) + \vec{E}_{-\rho}(\vec{r}') = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{r} + \frac{(-\rho)}{2\varepsilon_0} \vec{r}' = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} (\vec{r} - \vec{r}') = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} \vec{d}.$$

Таким образом, поле внутри полости однородно, вектор напряжённости направлен горизонтально, а его модуль равен $E_{\text{п}} = \frac{\rho R}{4\varepsilon_0}$.

На заряженный шарик массой m и зарядом q , помещённый в полость, действует сила $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_E$, где $F_g = mg$ — сила тяжести, $F_E = \frac{q\rho R}{4\varepsilon_0}$ — сила со стороны электрического поля. Эти силы взаимно перпендикулярны и однородны, поэтому шарик будет двигаться с постоянным ускорением $a = \sqrt{g^2 + \left(\frac{q\rho R}{4m\varepsilon_0}\right)^2}$.

С другой стороны, шарик долетел до стенки полости за время τ . Это значит, что $a = \frac{2(R/2)}{\tau^2} = \sqrt{2}g$, откуда $\rho = \frac{4\varepsilon_0 mg}{qR}$.

Пусть B — середина стержня, $r = 3R/8$ — радиус кольца, а $L = \sqrt{2}r$ — расстояние между бусинками. При движении стержня с бусинками вектор $\vec{O'B}$ будет поворачиваться против часовой стрелки в плоскости рисунка, а скорость обеих бусинок будет, в силу кинематической связи, одинакова. Обозначим φ угол поворота вектора $\vec{O'B}$ и найдём значение угла φ_p , соответствующее максимальной скорости бусинок.

Метод №1

Согласно теореме о кинетической энергии

$$\frac{3mv^2}{2} = A_g + A_E,$$

где v — скорость бусинок, A_g и A_E — работа силы тяжести и электрической силы соответственно. Запишем выражения для обеих работ при повороте вектора $\vec{O'B}$ на угол φ :

$$A_g = mgr(\cos(\varphi - \pi/4) - \cos(\pi/4)) + 2mgr(\cos(\pi/4 + \varphi) - \cos(\pi/4)),$$

$$A_E = 2qE_{\text{п}}r(\sin(\varphi - \pi/4) + \sin(\pi/4)) + qE_{\text{п}}r(\sin(\pi/4 + \varphi) - \sin(\pi/4)).$$

Из соотношений, найденных в первом пункте, получим, что

$$qE_{\text{п}} = q \cdot \frac{\rho R}{4\varepsilon_0} = mg.$$

Используя это, запишем выражение для суммарной работы:

$$A_{\Sigma} = A_g + A_E = mgr(2 \cos(\varphi - \pi/4) - \sqrt{2}).$$

Скорость бусинок будет наибольшей тогда, когда A_{Σ} достигнет максимума, то есть при $\varphi_p = \pi/4$. Подставляя это значение в выражение для суммарной работы,

получим

$$A_{\Sigma max} = mgr(2 - \sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad \frac{3mv_{max}^2}{2} = mgr(2 - \sqrt{2}) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})gr}{3}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})gR}}{2}.$$

Метод №2

В момент достижения бусинками максимальной скорости их тангенциальное ускорение равно нулю. Поэтому сумма моментов сил тяжести и электрических сил, рассчитанных в данный момент относительно точки O' , равна нулю. Запишем выражения для M_g и M_E (суммарного момента сил тяжести и электрических сил соответственно), принимая в качестве положительного направление против часовой стрелки:

$$M_g = -mgr \sin(\varphi - \pi/4) - 2mgr \sin(\varphi + \pi/4),$$

$$M_E = 2qE_{\pi}r \cos(\varphi - \pi/4) + qE_{\pi}r \cos(\varphi + \pi/4).$$

Из соотношений, найденных в первом пункте, получим, что

$$qE_{\pi} = q \cdot \frac{\rho R}{4\epsilon_0} = mg.$$

Используя это, запишем выражение для суммарного момента

$$M_{\Sigma} = M_g + M_E = -mgr \sin(\varphi - \pi/4) - 2mgr \sin(\varphi + \pi/4) +$$

$$+ 2mgr \cos(\varphi - \pi/4) + mgr \cos(\varphi + \pi/4) = -2mgr \sin(\varphi - \pi/4).$$

При $\varphi < \pi/4$ суммарный момент положительный, и система разгоняется, достигая максимальной скорости при $\varphi_p = \pi/4$, когда $M_{\Sigma} = 0$. Согласно закону изменения энергии

$$\frac{3mv_{max}^2}{2} + 2mgr - 3mg \cdot \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right) = 2qE_{\pi} \cdot \frac{r}{\sqrt{2}} + qE_{\pi} \left(r - \frac{r}{\sqrt{2}}\right),$$

откуда

$$\frac{3mv_{max}^2}{2} = mgr(2 - \sqrt{2}) \quad \Rightarrow \quad v_{max} = \sqrt{\frac{2(2 - \sqrt{2})gr}{3}} = \frac{\sqrt{(2 - \sqrt{2})gR}}{2}.$$

Сделаем несколько утверждений:

1) Так как стержень невесом, сумма сил, действующих на стержень, равна нулю.

2) Так как стержень и бусинки соединены шарнирно, сила, с которой стержень действует на бусинки, направлена вдоль него.

3) В момент достижения бусинкой максимальной скорости её тангенциальное ускорение равно нулю, поэтому проекция сил, действующих на эту бусинку, на ось, перпендикулярную радиусу, равна нулю.

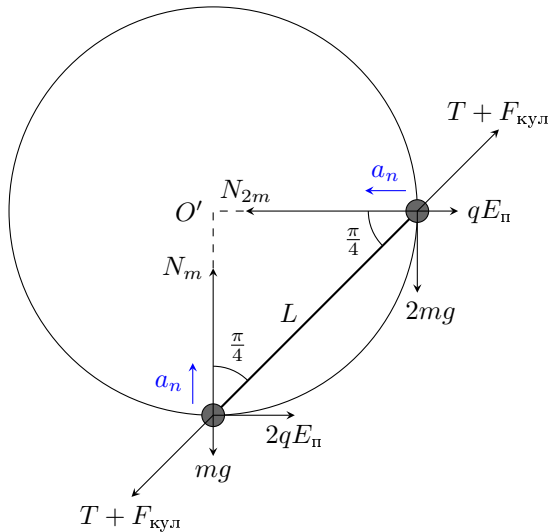


Рис. 2

Рассмотрим силы, действующие на каждую из бусинок в момент достижения ими максимальной скорости, то есть при $\varphi_p = \pi/4$ (рис. 2). Запишем второй закон Ньютона для нижней бусинки в проекции на горизонтальную ось, учитывая третье утверждение,

$$0 = 2qE_{\pi} - (T + F_{кул}) \cos(\pi/4),$$

где T — сила реакции стержня, а $F_{кул} = q^2/(2\pi\epsilon_0 L^2)$ — сила электростатического отталкивания бусинок.

Отсюда получим, что

$$T = 2\sqrt{2}qE_{\pi} - F_{кул} = 2\sqrt{2}mg - \frac{q^2}{2\pi\epsilon_0 L^2} = 2\sqrt{2}mg - \frac{16q^2}{9\pi\epsilon_0 R^2}.$$

Нормальное ускорение в этот момент равно $a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3}g$. Запишем

второй закон Ньютона для обеих бусинок в проекции на радиально направленные оси (для нижней бусинки — на вертикальную, для верхней — на горизонтальную):

$$ma_n = -(T + F_{\text{кул}}) \sin(\pi/4) - mg + N_m,$$

$$2ma_n = -(T + F_{\text{кул}}) \sin(\pi/4) - qE_{\text{п}} + N_{2m}.$$

Поскольку $T + F_{\text{кул}} = 2\sqrt{2}qE_{\text{п}}$,

$$N_m = mg + ma_n + 2qE_{\text{п}} = 3mg + mg \cdot \frac{2(2 - \sqrt{2})}{3} = mg \cdot \frac{13 - 2\sqrt{2}}{3},$$

$$N_{2m} = 2ma_n + 3qE_{\text{п}} = 3mg + mg \cdot \frac{4(2 - \sqrt{2})}{3} = mg \cdot \frac{17 - 4\sqrt{2}}{3}.$$

Задача №10-5. Термистор, лазер и диод

Когда диод открывается, напряжение на нём и на термисторе равно U_0 , а сила тока через диод равна нулю. Поэтому сила тока, протекающего через резистор r и термистор, равна $I = (\mathcal{E}_1 - U_0)/r$. С другой стороны,

$$I = U_0/R_0 \cdot (1 + \alpha(t_1 - t_0))^2,$$

где t_1 — температура термистора в данном режиме. Приравнявая эти выражения, находим, что

$$\alpha(t_1 - t_0) = \sqrt{\frac{R_0}{r} \cdot \frac{(\mathcal{E}_1 - U_0)}{U_0}} - 1 = 0,5.$$

Тепловая мощность, выделяющаяся на термисторе, должна в установившемся режиме рассеиваться в окружающий воздух. Поэтому

$$\frac{U_0^2}{R_0} \cdot (1 + \alpha(t_1 - t_0))^2 = k(t_1 - t_0),$$

где k — коэффициент в законе Ньютона-Рихмана. Выразим из данного выражения величину k/α :

$$\frac{k}{\alpha} = \frac{U_0^2}{R_0} \cdot \frac{(1 + \alpha(t_1 - t_0))^2}{\alpha(t_1 - t_0)} = 0,3 \text{ Вт}.$$

Рассмотрим теперь случай, когда на термистор светят лазером. Запишем условие баланса мощностей при напряжении на термисторе, равном U :

$$\frac{U^2}{R_0} \cdot (1 + \alpha(t - t_0))^2 + P = k(t - t_0).$$

Выразим U^2 :

$$U^2 = R_0 \cdot \frac{k(t - t_0) - P}{(1 + \alpha(t - t_0))^2} \quad (*)$$

и найдём максимум этой функции. Обозначая $z = \alpha(t - t_0 - P/k)$, получим

$$U^2 = \frac{R_0 k / \alpha \cdot z}{(1 + \alpha P / k + z)^2} = \frac{R_0 k / \alpha}{\left(\frac{1 + \alpha P / k}{\sqrt{z}} + \sqrt{z}\right)^2}.$$

Далее используем неравенство о средних:

$$U^2 \leq U_{max}^2 = \frac{R_0 k / \alpha}{4(1 + \alpha P / k)}.$$

Если диод не открывается при любой ЭДС источника,

$$U_{max} \leq U_0 \quad \Rightarrow \quad P \geq \frac{k}{\alpha} \cdot \left(\frac{R_0 k / \alpha}{4U_0^2} - 1\right) = 0,0375 \text{ Вт}.$$

Таким образом, минимальная тепловая мощность, которую должен передавать лазер, чтобы диод закрылся при любой \mathcal{E} , равна 37,5 мВт.

Для того чтобы понять, почему диод после выключения лазера не открылся, заметим, что выражение (*) при $P = 0$ тоже имеет максимум, а следовательно напряжение на термисторе может быть меньше U_0 как при малых токах (и малых ЭДС), так и при больших токах (и, соответственно, больших ЭДС). Подставив в (*) значения U_0 , R_0 , k/α и $P = 0$, получим уравнение

$$\frac{\alpha(t - t_0)}{(1 + \alpha(t - t_0))^2} = \frac{2}{9},$$

которое имеет два корня: первый нам уже известен

$$\alpha(t_1 - t_0) = 1/2,$$

а второй — новый

$$\alpha(t_2 - t_0) = 2.$$

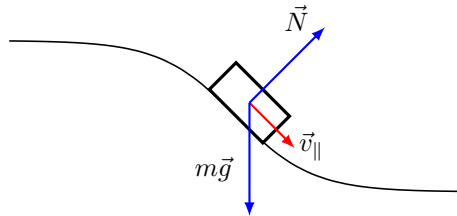
Рассчитаем для него ЭДС источника, считая ток через диод равным нулю:

$$\mathcal{E}_2 = I_2 r + U_0 = \frac{U_0 r}{R_0} (1 + \alpha(t_2 - t_0))^2 + U_0 = \frac{9U_0 r}{R_0} + U_0 = 14 \text{ В}.$$

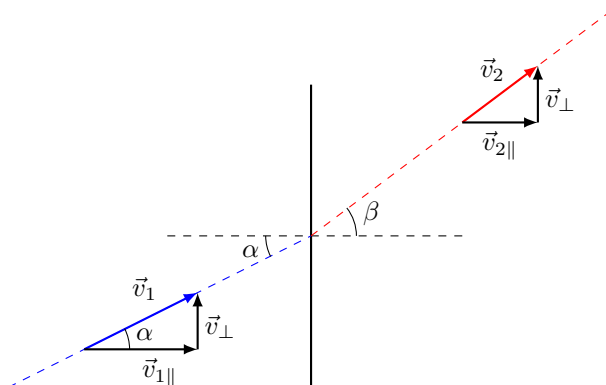
Таким образом, ЭДС источника надо уменьшить до 14 В, чтобы диод снова открылся.

Задача №11-1. Выбоина

Рассмотрим скатывание шайбы по границе. В малой окрестности области скатывания участок деформации выбоины можно считать некоторым наклонным профилем. Тогда сила реакции на шайбу действует только в вертикальной плоскости, проходящей через центры шайбы и выбоины (см. рис.), а значит из закона сохранения импульса следует, что перпендикулярная этому сечению компонента скорости шайбы сохраняется.

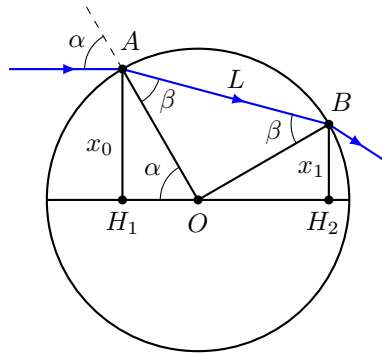


На поверхности вне выбоины скорость шайбы v_1 и она направлена под углом α к перпендикуляру к границе раздела. На дне выбоины скорость шайбы v_2 и она направлена под углом β к границе раздела. Из рисунка видно, что при переходе шайбы с одной горизонтальной плоскости на другую можно получить формулу, похожую на закон преломления света: $v_{\perp} = v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$.



Пусть угол падения равен α , а угол преломления β . Из предыдущего результата: $v_1 \sin \alpha = v_2 \sin \beta$ получаем $\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}$, где $n = \frac{v_2}{v_1}$. Теперь проанализируем геометрию траектории. Построим вспомогательные высоты AH_1 и BH_2 , длины которых из условия равны x_0 и x_1 . Так как $AO = OB$ (это радиусы, которые

равны R), то $\angle OAB = \angle OBA = \beta$. Тогда из $\triangle AOB$: $AB = L = 2R \cos \beta$. Из геометрии для трапеции AH_1H_2B видно, что $x_0 - x_1 = L \sin(\alpha - \beta)$.



Тогда получаем, что $x_1 = x_0 - 2R \cos \beta (\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta)$. Также из $\triangle AOH_1$ мы видим, что $\sin \alpha = \frac{x_0}{R}$. Таким образом мы можем получить зависимость:

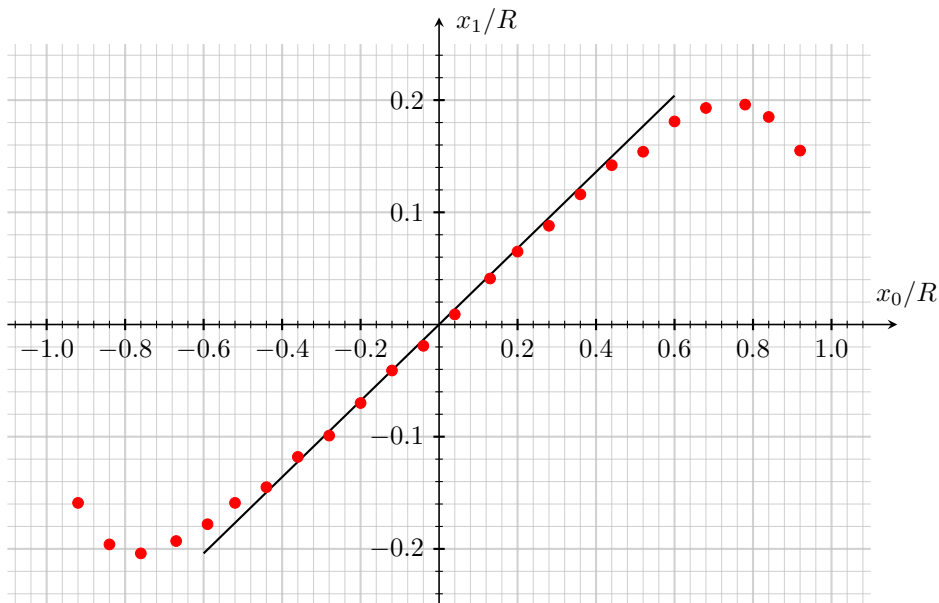
$$\frac{x_1}{R} = \frac{x_0}{R} \left(\frac{2}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^2 + \frac{2}{n} \sqrt{1 - \frac{n^2 + 1}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^2 + \frac{1}{n^2} \left(\frac{x_0}{R} \right)^4} - 1 \right).$$

Однако она получается сложной для анализа, поэтому обратим внимание на центральную часть графика. Можно заметить, что центральный участок графика близок к линейной зависимости и для него выполняется условие $\frac{x_0}{R} \ll 1$. Используем его и преобразуем зависимость для центрального участка:

$$\frac{x_1}{R} = \frac{x_0}{R} \left(\frac{2}{n} - 1 \right).$$

Это выражение можно было получить сразу, воспользовавшись малостью углов α и β . Мы видим, что при малых x_0 зависимость $x_1(x_0)$ — линейная, причем угловой коэффициент этой прямой $k = \left(\frac{2}{n} - 1 \right)$. Строим аппроксимирующую прямую в центральной части графика.

Из графика получаем $k \approx 0,34$. Тогда $n = \frac{v_2}{v_1} = \frac{2}{1+k} \approx 1,49$, откуда $v_2 = 1,49v_1$. Тогда из закона сохранения энергии: $\frac{mv_2^2}{2} = \frac{mv_1^2}{2} + mgh$ находим глубину выбоины: $h = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2g}$.



Подставляя числа, получим итоговый ответ:

$$h \approx 0,61 \frac{v_1^2}{g}$$

Исследуем, при каких условиях x_1 не зависит от x_0 . При $n = 2$ на центральном участке $k = 0$, что соответствует тому, что траектории фокусируются в точке установки ворот.

Тогда $v_2 = 2v_1$, а для h получим:

$$h = 1,5 \frac{v_1^2}{g}$$

Задача №11-2. Молекулярка

На участках 1 – 2 и 3 – 4 давление и объём прямо пропорциональны друг другу, поэтому вдоль этих участков они одновременно увеличиваются или уменьшаются. Следовательно, температура монотонно изменяется и достигает минимального и максимального значения на концах этих участков. Участки цикла (2 – 3 и 4 – 1) являются изотермами, так как $p = nkT$, поэтому $p/n = \text{const}$ только при $T = \text{const}$. Так как точка 2 имеет наибольшую ординату, то участок 2 – 3 является с изотермой с наибольшей температурой, а 4 – 1 – с наименьшей. Обозначим эти температуры T_{max} и T_{min} соответственно. По условию мы знаем

КПД цикла Карно, построенного между этими температурами:

$$\eta_K = 0,5 = \frac{T_{\max} - T_{\min}}{T_{\max}}.$$

Получим соотношение между максимальной и минимальной температурами:

$$T_{\max} = 2T_{\min}.$$

Точка (1,1) лежит на участке 4 – 1, поэтому:

$$p_0 = \frac{N_0}{V_0} k T_{\min}$$

. Выражая температуру, получаем:

$$T_{\min} = \frac{p_0 V_0}{N_0 k} = \frac{p_0}{n_0 k}; \quad T_{\max} = \frac{2p_0}{n_0 k}.$$

Найдём коэффициент наклона графика зависимости p/p_0 от n/n_0 для изотермы с температурой T :

$$p = nkT, \quad \frac{p}{p_0} = \frac{n_0 k T}{p_0} \cdot \frac{n}{n_0}$$

Коэффициент наклона является тангенсом соответствующего угла:

$$\tan \beta = \frac{n_0 k T}{p_0}.$$

Подставим найденные ранее температуры и получим ответ.

Для 4 – 1: $\tan \beta_{4-1} = 1$ или $\beta_{4-1} = 45^\circ$. Для 2 – 3: $\tan \beta_{2-3} = 2$ или $\beta_{2-3} = \arctan 2 = 63,4^\circ$.

Заметим, что на 4 – 1 из найденного ранее значения температуры получаем $T/T_0 = 1$, аналогично на 2 – 3 имеем $T/T_0 = 2$. Соответственно точка (1,1) принадлежит участку 4 – 1 и в такой системе координат. Теперь проанализируем вид участков 1 – 2 и 3 – 4. На них давление и объём пропорциональны:

$$\frac{p}{p_0} \propto \frac{V}{V_0} = \frac{n_0}{n},$$

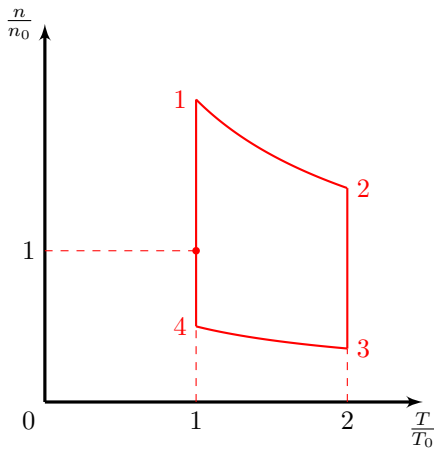
так как $nV = n_0 V_0 = N_0$.

$$n = \frac{p}{kT} \propto \frac{V}{T} \propto \frac{1}{nT}, \quad n^2 \propto \frac{1}{T}$$

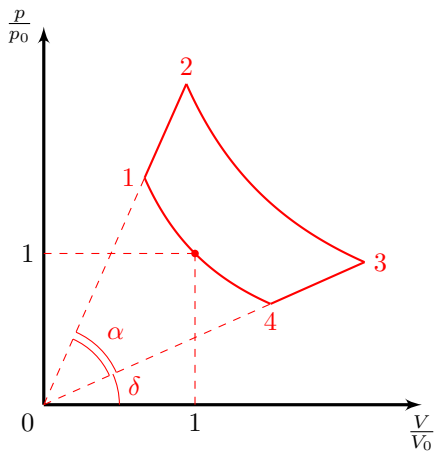
Таким образом на этих участках имеем:

$$\frac{n}{n_0} \propto \sqrt{\frac{T_0}{T}}.$$

Построим качественно график.



Для удобства нарисуем наш цикл в координатах $p/p_0 - V/V_0$.



Заметим, что 1 – 2 и 3 – 4 удовлетворяют уравнению $pV^{-1} = \text{const}$, то есть это политропы. Найдём теплоёмкость в таком процессе.

$$\delta Q = dU + \delta A = \nu C_V dT + p dV$$

$$p \propto V \Rightarrow \frac{dp}{p} = \frac{dV}{V}$$

$$pV = \nu RT \Rightarrow \frac{dT}{T} = \frac{dp}{p} + \frac{dV}{V} = 2 \frac{dV}{V} \Rightarrow \frac{dV}{V} = \frac{dT}{2T}$$

$$pdV = \frac{pV dT}{2T} = \frac{\nu RT dT}{2T} = \frac{\nu R}{2} dT$$

$$\delta Q = \nu C_V dT + \frac{\nu R}{2} dT = \nu \left(C_V + \frac{R}{2} \right) dT$$

Учитывая, что газ двухатомный, получаем, что в этих процессах его теплоёмкость $C = 3\nu R$. Таким образом можем найти теплоту в процессах 1 – 2 и 3 – 4:

$$Q_{1-2} = -Q_{3-4} = C(2T_0 - T_0) = 3\nu RT_0.$$

Обозначим угол между 3 – 4 и осью абсцисс δ . Найдём значения объёма газа в вершинах цикла. Точка 4:

$$\frac{p_4}{p_0} \cdot \frac{V_4}{V_0} = \left(\frac{V_4}{V_0} \right)^2 \tan \delta = \frac{T_4}{T_0} = 1, \quad \frac{V_4}{V_0} = \sqrt{\frac{1}{\tan \delta}}$$

Аналогично получим остальные значения.

$$\frac{V_3}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{\tan \delta}}, \quad \frac{V_1}{V_0} = \sqrt{\frac{1}{\tan(\delta + \alpha)}}, \quad \frac{V_2}{V_0} = \sqrt{\frac{2}{\tan(\delta + \alpha)}}$$

Найдём теплоты на участках 4 – 1 и 2 – 3. Так как это изотермы, то они равны соответствующим работам.

$$Q_{2-3} = \int_{V_2}^{V_3} pdV = 2\nu RT_0 \int_{V_2}^{V_3} \frac{dV}{V} = 2\nu RT_0 \ln \frac{V_3}{V_2},$$

$$Q_{2-3} = 2\nu RT_0 \ln \left(\sqrt{\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta}} \right) = \nu RT_0 \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right).$$

Аналогично для участка 4 – 1.

$$Q_{4-1} = -\frac{\nu RT_0}{2} \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right).$$

Заметим, что работа в цикле $A = Q_{1-2} + Q_{2-3} + Q_{3-4} + Q_{4-1}$. При этом тепло подводится только на участках 1 – 2 и 2 – 3, поэтому $Q_+ = Q_{1-2} + Q_{2-3}$. Таким образом КПД цикла:

$$\eta = \frac{\frac{\nu RT_0}{2} \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right)}{\nu RT_0 \ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right) + 3\nu RT_0} = \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right)} \right)}.$$

Найдём, как $\frac{\tan(\delta+\alpha)}{\tan \delta}$ зависит от δ .

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\delta} \left(\frac{\tan(\delta + \alpha)}{\tan \delta} \right) &= \frac{\frac{\tan \delta}{\cos^2(\delta+\alpha)} - \frac{\tan(\delta+\alpha)}{\cos^2 \delta}}{\tan^2 \delta} = \\ &= \frac{\sin \delta \cos \delta - \sin(\delta + \alpha) \cos(\delta + \alpha)}{\sin^2 \delta \cos^2(\delta + \alpha)}. \end{aligned}$$

Заметим, что производная обращается в 0 при:

$$\sin \delta \cos \delta - \sin(\delta + \alpha) \cos(\delta + \alpha) = 0.$$

$$\sin 2\delta = \sin 2(\delta + \alpha)$$

$$2\delta = \pi - 2(\delta + \alpha)$$

$$\delta = \frac{\pi}{2} - (\delta + \alpha)$$

$$\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

Заметим, что это соответствует ситуации, когда 1–2 и 3–4 симметричны относительно прямой $p/p_0 = V/V_0$. Таким образом, исследуемая функция уменьшается от бесконечности при $\delta = 0$ до минимального значения в этот момент, а потом возрастает к бесконечности при $\alpha + \delta = \pi/2$. С точки зрения КПД это означает, что в симметричном случае $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ он минимален, а максимален или при максимальном значении, или при минимальном значении δ . Найдём ограничения на δ . Из физических соображений понятно, что $\delta > 0$ и $\alpha + \delta < \pi/2$. Так же из условия следует, что точка (1,1) лежит между прямыми содержащими 1–2 и 3–4, поэтому $\alpha + \delta > \pi/4$ и $\delta < \pi/4$. Суммарно получаем:

$$\max \left(0, \frac{\pi}{4} - \alpha \right) \leq \delta \leq \min \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2} - \alpha \right).$$

Заметим, что в любом случае симметричный случай реализуется, поэтому минимум КПД при $\delta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$:

$$\eta \geq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln \left(\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \right)} \right)}.$$

Максимум КПД зависит от граничных значений δ . Если $\alpha \geq \pi/4$, то отношение тангенсов может быть сколь угодно большим и соответственно ограничение на КПД:

$$\eta < 1/2.$$

В ином случае граничные значения δ равны $\pi/4 - \alpha$ и $\pi/4$ дают одинаковый КПД, так как $\tan(\alpha + \pi/4) = 1/\tan(\pi/4 - \alpha)$, и ограничение на КПД:

$$\eta \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}\right)} \right)}.$$

При $\alpha \geq \pi/4$:

$$\frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}\right)} \right)} \leq \eta < \frac{1}{2}.$$

При $\alpha < \pi/4$:

$$\frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln\left(\frac{1+\tan \alpha}{1-\tan \alpha}\right)} \right)} \leq \eta \leq \frac{1}{2 \left(1 + \frac{3}{\ln(\tan(\frac{\pi}{4} + \alpha))} \right)}.$$

В этом случае $\alpha > \pi/4$. Подставим значение угла в соответствующие формулы.

$$0,234 \leq \eta < 0,5$$

В этом случае $\alpha < \pi/4$. Подставим значение угла в соответствующие формулы.

$$0,134 \leq \eta \leq 0,153$$

Задача №11-3. Электростатический этюд

Рассмотрим один заряд q , расположенный на оси симметрии цилиндра. Поскольку поверхность цилиндра проводящая, на ней возникнут индуцированные заряды, величина которых пропорциональна q . Их электрическое поле на оси цилиндра на расстоянии z до заряда можно записать в виде

$$E_z^{(\text{ind})}(z) = qf^{(\text{ind})}(z),$$

где $f^{(\text{ind})}(z)$ — некоторая неизвестная функция, зависящая от распределения индуцированных зарядов.

Вклад в осевую напряжённость вносят не только индуцированные заряды на поверхности проводника, но и заряды, находящиеся на оси. Напряжённость от такого заряда модулем \tilde{q} мы обозначим за $\tilde{q}f^{(\text{p})}$ (здесь «р» от английского point). Разумеется, её можно вычислить напрямую:

$$qf^{(\text{p})}(z) = k \frac{q}{z^2}.$$

Тогда, согласно принципу суперпозиции, поле в точке, где находится заряд Q :

$$E_1 = q(f(L) - f(L + l)),$$

где

$$f(z) = f^{(\text{ind})}(z) + f^{(\text{p})}(z).$$

Тогда с учетом условия $l \ll L$ получим для силы, действующей на заряд,

$$F_Q = QE_1 = -qQl f'(L)$$

или

$$F_Q = -qQl(f^{(\text{ind})})'(L) + 2qQl \frac{k}{L^3}.$$

Теперь рассмотрим случай повернутого диполя. Заряд Q и индуцированные им заряды создают на оси цилиндра поле

$$Qf^{(\text{p})}(z) + Qf^{(\text{ind})}(z) = Qf(z).$$

При смещении от оси на малое расстояние $r \ll R$ у электрического поля появляется радиальная составляющая E_r . Чтобы определить ее, рассмотрим цилиндр высоты dz с радиусом основания r , ось симметрии которого совпадает с осью внешнего цилиндра. Поскольку внутри этого цилиндра нет зарядов, согласно теореме Гаусса, поток электрического поля через его поверхность равен нулю:

$$\pi r^2 Q(f(z + dz) - f(z)) + 2\pi r dz E_r = 0,$$

откуда

$$E_r(z) = -\frac{1}{2}Qr f'(z)$$

или же

$$E_r(z) = -\frac{1}{2}Qr(f^{(\text{ind})})'(z) + \frac{1}{4}Qr \frac{k}{z^3}.$$

Из симметрии задачи относительно оси цилиндра следует, что от системы, состоящей из заряда Q и индуцированных им зарядов, в точках, где расположены заряды диполя, составляющие электрического поля вдоль оси z равны, а значит, проекция суммарной силы на ось z равна 0.

Более того, из-за зеркальной симметрии системы индуцированных диполем зарядов, осевая проекция силы на диполь от них равна нулю. Силы же, создаваемые радиальными составляющими поля от индуцированных диполем зарядов, уничтожают друг друга.

Суммарная сила, действующая на диполь,

$$F_D = 2qE_r \left(\frac{l}{2} \right) = -\frac{1}{2}qQl f'(L).$$

Отсюда искомое отношение

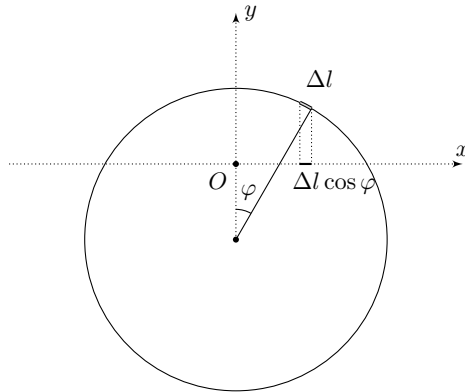
$$\frac{F_Q}{F_D} = 2$$

Задача №11-4. Кольцо на границе

На участки кольца, находящиеся в магнитном поле, действует сила Лоренца, перпендикулярная вектору \vec{B} и вектору скорости участка кольца. Можно рассматривать движение кольца как наложение поступательного движения в направлении вдоль границы со скоростью v_x , поступательного движения перпендикулярно границе со скоростью v_y и вращения с угловой скоростью ω .

Из-за поступательного движения в направлении y возникает момент силы Лоренца, раскручивающий кольцо. Этот момент сил исчезает только после того, как кольцо полностью окажется в области поля. Сумма сил Лоренца, действующих на участки в области поля, связанная с движением вдоль y , направлена вдоль границы и изменяет значение v_x .

Силы Лоренца, связанные с поступательным движением вдоль оси x , изменяют скорость v_y , но не создают момента сил, раскручивающих кольцо. Силы Лоренца, возникающие из-за вращательного движения кольца, как легко убедиться, действуют только вдоль y и не влияют на движение вдоль x .



Рассмотрим тангенциальную составляющую силы Лоренца, действующую на участок кольца длины Δl , связанную с v_y . Она равна $\lambda \Delta l B v_y \cos \varphi$, где φ — угол между этим участком и осью x . Величина $\Delta l \cos \varphi$ представляет собой проекцию этого участка на x , а сумма тангенциальных составляющих для всех участков, находящихся в области магнитного поля, будет равна $\lambda l_x B v_y$, где l_x — длина хорды, стягивающей концы участка кольца, находящегося в области поля. Тогда

$$mR \frac{d\omega}{dt} = \lambda B v_y l_x.$$

После домножения обеих частей уравнения на dt , с учётом того, что $v_y dt = dy$, а $l_x dy = dS$, где dS — дополнительная площадь кольца, которая оказывается в области поля за время dt , получаем

$$mRd\omega = \lambda \cdot d\Phi,$$

где $d\Phi$ — прирост потока магнитного поля через плоскость кольца.

Если кольцо полностью окажется в области магнитного поля, его угловая скорость вращения будет равна

$$\omega = \frac{\pi\lambda BR}{m}.$$

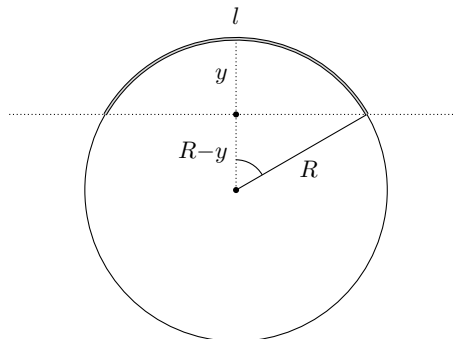
Итак, ответ на первый вопрос задачи: $\omega = \frac{\pi\lambda BR}{m}$.

Как отмечалось выше, вращение не влияет на проекцию скорости v_x , её изменение целиком определяется y -проекцией скорости центра и зарядом той части кольца (дуги длины l), которая находится в поле.

$$m \frac{dv_x}{dt} = \lambda l B v_y.$$

Пусть y — координата точки кольца, наиболее удалённой от границы. Другими словами, это расстояние, на которое сместилось кольцо в направлении y от начала движения. Тогда $l = 2R \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right)$. Далее

$$m \frac{dv_x}{dt} = 2\lambda B R v_y \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right).$$



Домножив на dt , переходим к интегралу

$$v_x = \frac{2\lambda BR}{m} \int_0^{2R} \arccos\left(\frac{R-y}{R}\right) dy = \frac{2\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Теперь воспользуемся законом сохранения энергии, учитывая тот факт, что сила Лоренца работы не совершает и кинетическая энергия кольца в любой момент времени равна начальной.

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{mv_x^2}{2} + \frac{mv_y^2}{2} + \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

Для ответа на второй вопрос задачи положим в этом выражении $v_y = 0$ и воспользуемся результатом ответа на первый пункт для угловой скорости. Тогда

$$v_{\min}^2 = v_x^2 + R^2\omega^2 = 5 \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m} \right)^2.$$

$$v_{\min} = \frac{\sqrt{5}\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Поскольку v_x уже найдено, то для ответа на третий вопрос достаточно определить проекцию v_y в момент, когда кольцо целиком окажется в поле.

Из закона сохранения энергии находим: $v_y = \sqrt{v_0^2 - v_x^2 - \omega^2 R^2} = \sqrt{v_0^2 - v_{\min}^2}$.
Для тангенса искомого угла: $\tan\theta = v_y/v_x$.

Следовательно,

$$\tan\theta = \frac{\sqrt{v_0^2 - v_{\min}^2}}{v_x} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda BR^2}\right)^2 - \frac{5}{4}}.$$

$$\theta = \arctan \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda BR^2}\right)^2 - \frac{5}{4}}.$$

С момента, когда кольцо целиком оказывается в области поля его угловая скорость перестаёт меняться и центр кольца движется как точечный заряд $q = 2\pi R\lambda$ со скоростью, проекции которой равны значениям v_x и v_y в момент пересечения границы области последней точкой кольца. С этого момента

$$m \frac{dv_x}{dt} = 2\pi\lambda RBv_y.$$

После уже традиционного домножения на dt и интегрирования получаем

$$\Delta y = \frac{m\Delta v_x}{2\pi\lambda RB}.$$

Здесь Δy — изменение y — координаты центра от момента полного вхождения в поле до момента максимального удаления центра от границы, Δv_x — соответствующее этим моментам времени изменение проекции скорости.

v_x в момент максимального удаления можно найти из закона сохранения энергии

$$v_x = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m}\right)^2}.$$

Тогда

$$\Delta v_x = \sqrt{v_0^2 - \left(\frac{\pi\lambda BR^2}{m}\right)^2} - \frac{2\pi\lambda BR^2}{m}.$$

Искомое максимальное удаление:

$$y_{\max} = R + \frac{m\Delta v_x}{2\pi\lambda RB} = \sqrt{\left(\frac{mv_0}{2\pi\lambda RB}\right)^2 - \frac{R^2}{4}}.$$

Задача №11-5. RLC-метр

Отношение измеренных амплитуд напряжения и тока равно модулю импеданса $|Z|$ устройства, подключенного выводам RLC -метра. Используя известные формулы для импедансов индуктивности $Z_L = i\omega L$ и емкости $Z_C = -i/\omega C$ (где ω — циклическая частота, на которой проводятся измерения) можно определить измеренные прибором значения индуктивности и емкости. Из формул для последовательного соединения импедансов получим в первом случае

$$\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right| = \omega L_1 = \frac{1}{\omega C_1}. \quad (1)$$

Во втором случае используем формулу для импеданса параллельного соединения

$$\frac{L/C}{\left|\omega L - \frac{1}{\omega C}\right|} = \omega L_2 = \frac{1}{\omega C_2}. \quad (2)$$

Какое бы устройство не подключалось к выводам, показания прибора в режимах измерения индуктивности и емкости связаны соотношением $|Z| = \omega L_1 = 1/\omega C_1$, то есть $L_1 C_1 = 1/\omega^2$. Таким образом $L_1 C_1 = L_2 C_2$, откуда

$$C_2 = \frac{L_1 C_1}{L_2}.$$

$$C_2 = C_1 \frac{L_1}{L_2} \approx 0,83 \text{ мкФ}$$

Знаменатель в уравнении (2) для параллельного соединения совпадает с импедансом для последовательного соединения, поэтому

$$\frac{L}{C \cdot \omega L_1} = \omega L_2.$$

Подставляя в это соотношение значение $\omega^2 = 1/L_1 C_1$, найдем

$$\frac{L}{C} = \frac{L_2}{C_1}.$$

Выражая отсюда C_1 и подставляя в уравнение (1), получим

$$\left| L - \frac{1}{\omega^2 C} \right| = \left| L - \frac{L_1 L_2}{L} \right| = L_1.$$

Отсюда

$$|L^2 - L_1 L_2| = L_1 L,$$

значит L удовлетворяет одному из двух квадратных уравнений

$$L^2 - L_1 L_2 = \pm L_1 L,$$

откуда

$$L^2 \mp L_1 L - L_1 L_2 = 0.$$

Корни этих двух уравнений имеют вид

$$L = \frac{\pm L_1 \pm \sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2}}{2},$$

где первый знак определяется знаком \pm в уравнении, а второй — выбранным корнем квадратного уравнения. При этом индуктивность должна быть положительной, поэтому перед квадратным корнем всегда нужно выбирать знак $+$. Итого получаем, что возможны два значения индуктивности

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1}{2},$$

отвечающие двум разным способам раскрыть модуль. Отвечающие им значения емкости можно найти как

$$C = L \frac{C_1}{L_2} = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \pm L_1 \right) = \frac{2C_1 L_1}{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} \mp L_1}.$$

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} + L_1}{2} = 15,0 \text{ мГн}; \quad C = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1 L_2} + L_1 \right) = 2,00 \text{ мкФ}$$

$$L = \frac{\sqrt{L_1^2 + 4L_1L_2} - L_1}{2} = 8,80 \text{ мГн}; \quad C = \frac{C_1}{2L_2} \left(\sqrt{L_1^2 + 4L_1L_2} - L_1 \right) = 1,17 \text{ мкФ}$$

Комплексный импеданс неидеальной катушки равен

$$Z'_L = R + i\omega L,$$

тогда измеренное значение индуктивности определяется из соотношения

$$\omega L_{\text{exp}} = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad L_{\text{exp}} = \sqrt{L^2 + \frac{R^2}{\omega^2}}.$$

Видим, что это значение всегда больше значения индуктивности катушки, и в пределе больших частот стремится к ней. Тогда частота должна быть больше некоторой критической частоты, которую можно найти из условия, что $L_{\text{exp}} = L(1 + \delta)$, где δ – максимально допустимая погрешность:

$$\sqrt{L^2 + \frac{R^2}{\omega^2}} < L(1 + \delta),$$

откуда с учетом малости δ

$$\frac{R^2}{\omega_c^2} = L^2((1 + \delta)^2 - 1) \approx 2\delta L^2.$$

Получаем критическое значение циклической частоты

$$\omega_c = \frac{R}{L\sqrt{2\delta}},$$

и критическое значение частоты

$$f_c = \frac{R}{2\pi L\sqrt{2\delta}}.$$

$$f > f_c = \frac{R}{2\pi L\sqrt{2\delta}} = 1780 \text{ Гц}$$

Импеданс цепи равен

$$Z = R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}.$$

Приравнявая его модуль к ωL_1 , найдем измеренную индуктивность L_1 :

$$\omega L_{\text{exp}} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2},$$

отсюда

$$L_{\text{exp}} = \sqrt{\frac{R^2}{(2\pi f)^2} + \left(L - \frac{1}{(2\pi f)^2 C}\right)^2}.$$

Проанализируем полученное выражение. При больших частотах слагаемые с частотой в знаменателе стремятся к 0, поэтому измеренное значение индуктивности стремится к постоянной $L_{\text{exp}} \approx L$. При малых частотах наибольшее значение у слагаемого с наибольшей степенью частоты в знаменателе, поэтому

$$L_{\text{exp}} \approx \frac{1}{(2\pi f)^2 C}.$$

Покажем, что у подкоренного выражения есть минимум при промежуточном значении частоты. Для удобства введем вспомогательную переменную $x = 1/(2\pi f)^2$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = xR^2 + \left(L - \frac{x}{C}\right)^2.$$

Ее производная обращается в 0 при

$$R^2 + \frac{2}{C} \left(\frac{x}{C} - L\right) = 0,$$

откуда

$$x = LC - \frac{R^2 C^2}{2} = LC \left(1 - \frac{R^2 C}{2L}\right).$$

Этому значению x отвечает значение частоты

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}\sqrt{1 - R^2 C/2L}},$$

которое существует при $R^2 C/2L < 1$. Это значение отвечает минимуму рассматриваемой функции, поскольку она представляет собой квадратичную зависимость с положительным коэффициентом перед x^2 . Соответствующее значение индуктивности в минимуме

$$L_0 = R\sqrt{CL - \frac{R^2 C^2}{4}}.$$

Для чисел, приведенных в условии

$$f_0 = 1590 \text{ Гц}, \quad L_0 = 0,50 \text{ мГн}.$$

