

Содержание

9.1. Калейдоскоп планет	2
9.2. Тихо! Эхо сверхновой	4
9.3. Одно из двух	6
9.4. Звездный градусник	8
9.5. Два в одном	10
9.6. Восточный экспресс	15

9.1. Калейдоскоп планет

В. Б. Игнатьев

Марс кульминирует в астрономическую полночь на высоте 55° , а Юпитер ровно через 6^h на высоте 31.5° . На какой высоте будет кульминировать Солнце в этот день? Чему равна широта места наблюдения? Какая дата наблюдения?

Рефракцией и уравнением времени пренебречь. Орбиты всех планет круговые и лежат в одной плоскости.

Решение. Нижние кульминации планет даже в приполярных регионах не могут происходить выше 23.5° , а значит, в условии могут рассматриваться только их верхние кульминации. Поскольку Марс кульминирует в полночь, то он находится в противостоянии, а Юпитер, кульминирующий спустя 6^h , находится в западной квадратуре. Угловое расстояние между точками кульминации планет не может превышать $2\varepsilon = 47^\circ$, где ε — наклон небесного экватора к эклиптике, поскольку их склонения заключены в пределах от $-\varepsilon$ до ε . Значит, кульминации Марса и Юпитера происходят по одну сторону от зенита. Разница высот кульминаций составляет $\Delta h = 55^\circ - 31.5^\circ = 23.5^\circ = \varepsilon$. Этой же величине равна и разность склонений. Поскольку планеты находятся на эклиптике в 90° друг от друга, такая ситуация может быть только в том случае, когда одна из планет находится в одной из точек равноденствий, а другая — в одной из точек солнцестояний.

Случай 1: Юпитер находится в одной из точек равноденствий ($\delta_{Ю} = 0$). Тогда широта места наблюдения φ определяется из условия для верхней кульминации Юпитера:

$$h_{Ю\uparrow} = 90^\circ - |\varphi_{1,2} - \delta_{Ю}| = 90^\circ - |\varphi_{1,2}| = 31.5^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi_{1,2} = \pm 58.5^\circ.$$

Марс кульминирует выше Юпитера, то есть его склонение должно быть по модулю больше склонения Юпитера. При наблюдении в северном полушарии $\delta_{M1} = 23.5^\circ$, то есть он находится в точке летнего солнцестояния. Солнце находится в противоположной от Марса точке эклиптики — точке зимнего солнцестояния. Следовательно, дата наблюдения — день зимнего солнцестояния (21–22 декабря). Высота Солнца в верхней кульминации будет на ε ниже высоты кульминации Юпитера: $h_1 = h_{Ю\uparrow} - \varepsilon = 8^\circ$.

Для наблюдателя в южном полушарии Марс также будет кульминировать выше Юпитера, но его склонение составит $\delta_{M2} = -23.5^\circ$, то есть он окажется в точке зимнего солнцестояния, а Солнце — в точке летнего солнцестояния. Такая ситуация возможна в день летнего солнцестояния (20–21 июня). Высота Солнца в верхней кульминации вновь должна быть на ε ниже высоты Юпитера, то есть $h_2 = 8^\circ$.

Случай 2: Марс находится в одной из точек равноденствия ($\delta_M = 0$). Тогда широту места наблюдения удобно получить из условия для верхней кульминации Марса:

$$h_{M\uparrow} = 90^\circ - |\varphi_{3,4}| = 55^\circ \quad \Rightarrow \quad \varphi_{3,4} = \pm 35^\circ.$$

Поскольку Солнце находится в противоположной точке равноденствия и имеет то же склонение, что и Марс, то и кульминирует на той же высоте, что и Марс:

$$h_{3,4} = 55^\circ.$$

Если наблюдение происходит в день весеннего равноденствия (20–21 марта), то Юпитер, находящийся к западу от Солнца в точке зимнего солнцестояния, имеет склонение -23.5° и кульминирует ниже Марса в северном полушарии. В день осеннего равноденствия (22–23 сентября) склонение Юпитера положительное и подобный случай реализуется в южном полушарии.

Таким образом, возможны четыре варианта ответа, приведенные в таблице:

Дата	h_\odot	φ
20–21 марта	55°	35° с. ш.
20–21 июня	8°	58.5° ю.ш.
22–23 сентября	55°	35° ю. ш.
21–22 декабря	8°	58.5° с.ш.

9.2. Тихо! Эхо сверхновой

А. С. Аношин

Иоганн Кеплер открыл три своих закона, основываясь на чрезвычайно точных результатах наблюдений великого датского астронома Тихо Браге, с которым он работал в его последний год жизни. В молодые годы Браге наблюдал вспышку сверхновой, которую мы теперь называем сверхновой Тихо. Ее современные координаты: прямое восхождение $\alpha_0 = 00^{\text{h}} 25^{\text{m}} 08^{\text{s}}$, склонение $\delta_0 = +64^{\circ} 09' 56''$, а годичный параллакс $\pi'' = (0.43 \cdot 10^{-3})''$.

Спектр сверхновой был определен астрономами в 2006 году благодаря эффекту светового эха. Излучение от вспышки, рассеянное на окружающих пылевых структурах, позволило получить её спектр и установить тип сверхновой. Координаты одной из наблюдаемых пылевых структур $\alpha = 01^{\text{h}} 46^{\text{m}} 38^{\text{s}}$, $\delta = +57^{\circ} 13' 36''$.

1. Оцените расстояние между сверхновой Тихо и этой пылевой структурой. Ответ выразите в световых годах.
2. Одновременно световое эхо от этой сверхновой может наблюдаться на многих пылевых структурах. Выделим любую плоскость, содержащую прямую наблюдатель-сверхновая. Определите вид кривой в этой плоскости, вдоль которой располагаются отражающие структуры?

Решение. Тихо Браге наблюдал свет сверхновой, который двигался к нам по кратчайшему расстоянию. Это произошло совсем недавно по космическим меркам, так что расстояние до места вспышки сверхновой можно считать неизменным. Его можно определить из годичного параллакса:

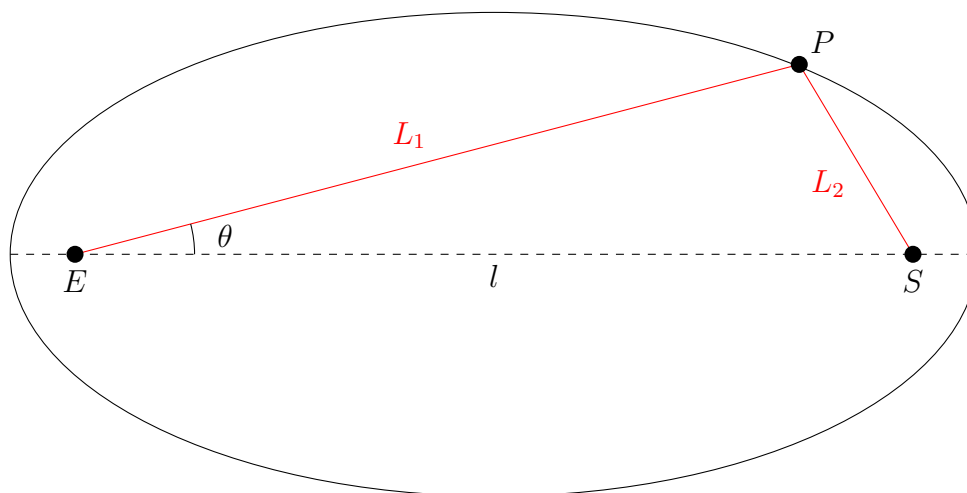
$$l = \frac{1}{\pi''} = 2.33 \text{ кпк.}$$

Свет, отразившийся от пылевого облака, преодолел расстояние большее l на величину, которую свет проходит за время, прошедшее с момента наблюдения самой сверхновой. Вспышка наблюдалась в 1572 году, то есть за 434 года до определения спектра. Но можно и примерно прикинуть время этого события. Например, опираясь на время работы Кеплера. Другое реперное событие — изобретение телескопа. Тихо Браге был, пожалуй, последней яркой фигурой в дотелескопической астрономии, а Кеплер уже модернизировал телескоп Галилея новым окуляром. Телескоп был изобретен примерно 400 лет назад, а молодость Тихо Браге должна была прийти не менее чем на четверть века раньше. Для дальнейших вычислений будем принимать величину запаздывания отраженного сигнала равной $\Delta t = 400$ лет. Следовательно, этот сигнал прошел дополнительные 400 световых лет или 123 пк.

Обратимся к рисунку. Обозначим точкой S место вспышки сверхновой, E — положение наблюдателя, а P — пылевую структуру, отразившую свет сверхновой. Расстояние SP обозначим как L_2 , EP — как L_1 : $L_1 + L_2 = l + c\Delta t$.

Заметим, что последнее уравнение описывает геометрическое место точек P , сумма расстояний которых от двух заданных точек E и S постоянна. Это геометрическое определение эллипса, то есть все отражающие структуры, которые мы можем видеть одновременно лежат на дуге эллипса (поверхности эллипсоида в общем случае).

Обозначим угол $\angle SEP$ как θ . Запишем теорему косинусов для треугольника $\triangle ESP$:



$$L_2^2 = l^2 + L_1^2 - 2lL_1 \cos \theta = l^2 + (l + c\Delta t - L_2)^2 - 2l(l + c\Delta t - L_2) \cos \theta;$$

Раскроем скобки в правой части. Тогда члены с L_2^2 сократятся и уравнение станет линейным относительно L_2 . Проведя простые преобразования, получим:

$$L_2 = \frac{l^2 + (l + c\Delta t)^2 - 2l(l + c\Delta t) \cos \theta}{2(l + c\Delta t - l \cos \theta)}.$$

Угол θ — это угловое расстояние между пылевой структурой и сверхновой. Из координат видно, что это расстояние невелико, поэтому можем получить приближенное значение с помощью теоремы Пифагора. Главное, не забывать, что при больших склонениях координатная сетка по прямому восхождению сжата в $\cos \delta$ раз.

$$\theta = \sqrt{\Delta\delta^2 + \Delta\alpha^2 \cdot \cos^2 \langle \delta \rangle} = \sqrt{6.9^2 + 20.4^2 \cdot \cos^2 61^\circ} \approx 12^\circ.$$

Здесь $\langle \delta \rangle$ — среднее значение склонения, $\Delta\alpha$ и $\Delta\delta$ — разности прямых восхождений и склонений сверхновой и пылевой структуры. Для любителей сферических треугольников приведем точное решение:

$$\theta = \arccos(\sin \delta \cdot \sin \delta_0 + \cos \delta \cdot \cos \delta_0 \cdot \cos \Delta\alpha) \approx 12^\circ.$$

Из полученной ранее формулы получаем

$$L_2 \approx 760 \text{ пк} = 2500 \text{ св. лет.}$$

Комментарий. Результат с точностью до нескольких процентов совпадает с вычисленным расстоянием в статье «Scattered-light echoes from the historical galactic supernovae Cassiopeia A and Tycho (SN 1572)», из которой брались данные для этой задачи.

9.3. Одно из двух

А. Н. Акинъщиков

С помощью телескопа составляется каталог всех звёзд, видимый поток от которых превышает фиксированный порог. В окрестностях Солнца на один красный гигант приходится 400 звезд, подобных Солнцу (желтых карликов). Абсолютная звездная величина красных гигантов равна -0.5^m , а желтых карликов 5^m . Считайте, что звёзды распределены в пространстве равномерно, а поглощением света можно пренебречь. Какой класс звёзд из представленных окажется более многочисленным в итоговом каталоге и во сколько раз?

Решение. Поток от звезды светимости L на расстоянии d равен

$$F = \frac{L}{4\pi d^2}.$$

Минимальному значению потока F_{\min} соответствуют звезды, находящиеся на максимальном расстоянии d_{\max} . Тогда

$$d_{\max} = \sqrt{\frac{L}{4\pi F_{\min}}} \propto L^{1/2}.$$

Пусть $V_{\max} = \frac{4}{3}\pi d_{\max}^3$ — объем, в котором находятся все видимые звезды данного типа. Тогда число звезд в этом объеме:

$$N = nV = \frac{4}{3}\pi n d_{\max}^3 \propto n d_{\max}^3 \propto nL^{3/2},$$

где n — пространственная плотность числа звёзд данного типа. Следовательно, отношение числа красных гигантов N_g к числу карликов N_d равно:

$$\frac{N_g}{N_d} = \frac{n_g}{n_d} \left(\frac{L_g}{L_d}\right)^{3/2}.$$

Абсолютные звездные величины гигантов и карликов отличаются на 5.5^m звездных величин. Тогда из формулы Погсона получаем:

$$\frac{L_g}{L_d} = 10^{-0.4(-0.5-5)} \approx 158.$$

Отношение пространственных плотностей задано в условии. Подставим числа:

$$\frac{N_g}{N_d} = \frac{1}{400} \cdot 158^{3/2} \approx \frac{1986}{400} \approx 5.$$

Значит, в таком каталоге красных гигантов окажется в 5 раз больше, при том, что в пространстве они встречаются в 400 раз реже. Причина этого кажущегося парадокса в том, что яркая звезда видна с намного большего расстояния, то есть мы их выбираем из гораздо большего объема пространства.

Альтернативное решение. Выразим предельные звездные величины для красных гигантов и желтых карликов:

$$m_{\lim} = M_g - 5 + 5 \lg d_{\max g}$$

$$m_{\text{lim}} = M_d - 5 + 5 \lg d_{\text{max d}}$$

Так как предельная звездная величина одинакова из-за одинакового предельного потока:

$$M_g - 5 + 5 \lg d_{\text{max g}} = M_d - 5 + 5 \lg d_{\text{max d}}$$

$$5 \lg d_{\text{max g}} - 5 \lg d_{\text{max d}} = M_d - M_g$$

Тогда отношение предельных расстояний:

$$\frac{d_{\text{max g}}}{d_{\text{max d}}} = 10^{\frac{M_d - M_g}{5}} = 10^{\frac{5 - (-0.5)}{5}} = 10^{1.1} \approx 12.59$$

И итоговое отношение числа звезд:

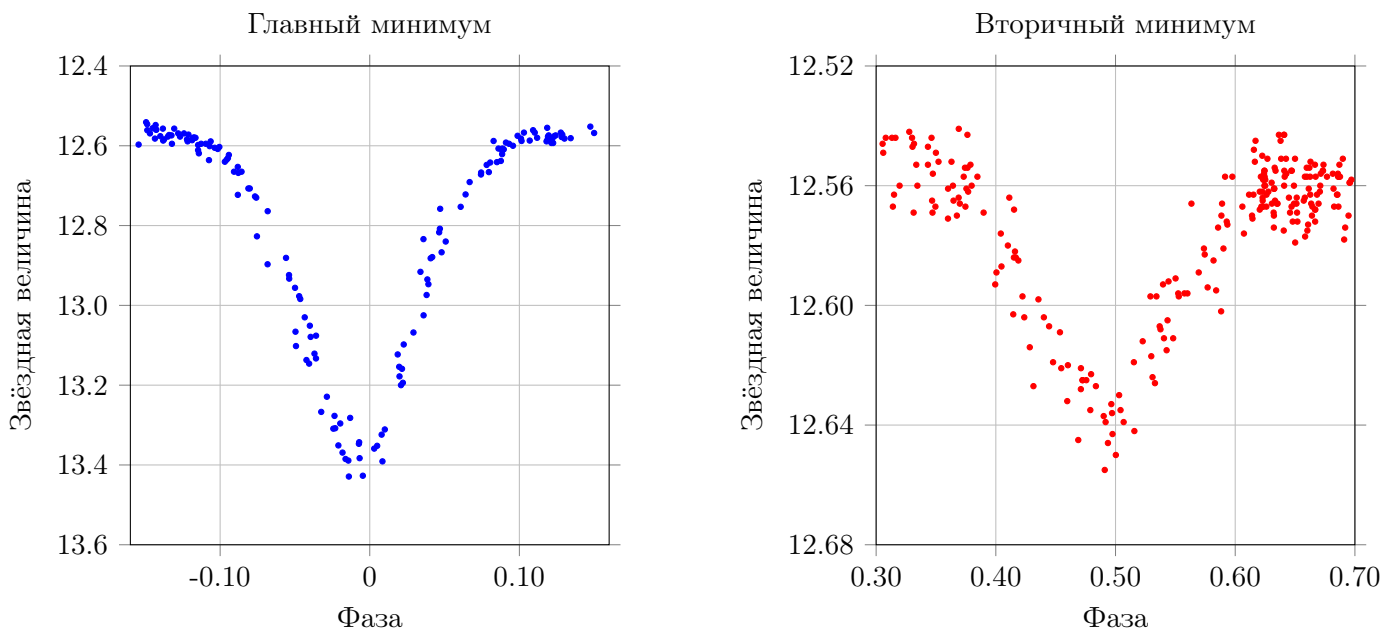
$$\frac{N_g}{N_d} = \frac{n_g \frac{4}{3} \pi n d_{\text{max g}}^3}{n_d \frac{4}{3} \pi n d_{\text{max d}}^3} = \frac{12.59^3}{400} = \frac{1986}{400} \approx 5.$$

9.4. Звездный градусник

В. Б. Игнатъев, М. В. Кузнецов

Перед вами кривая блеска затменно-переменной звезды с круговыми орбитами. Из спектральных наблюдений известно, что одна из звезд системы полностью аналогична Солнцу. Определите температуру второй звезды.

Потемнением диска к краю и эффектом прогрева пренебречь.



Решение.

Пусть поток от двойной звезды вне затмения равен F_0 , поток в главном минимуме равен F_1 , поток во вторичном минимуме равен F_2 .

В главном минимуме закрывается более горячая звезда. Договоримся, что $T_1 > T_2$. Поскольку по условию орбиты звёзд круговые, то площадь перекрытия дисков звезд будет одинакова, обозначим её через S .

Запишем выражение для потока от двойной звезды минимумах: $F_1 = F_0 - \Delta F_1$, $F_2 = F_0 - \Delta F_2$, где ΔF_1 и ΔF_2 — слагаемые, в которых учитывается вклад излучения от площади S закрываемой звезды с температурами T_1 и T_2 соответственно: $\Delta F_1 \sim \sigma T_1^4 S/r^2$, $\Delta F_2 \sim \sigma T_2^4 S/r^2$ (расстояние r до обеих звёзд считаем одинаковым).

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} = \frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2}.$$

Это выражение можно свести к отношению потоков, и как следствие, к звездным величинам. Разделим и числитель, и знаменатель на F_0

$$\frac{1 - F_1/F_0}{1 - F_2/F_0} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$$

Теперь вернемся к графикам, в которых по оси y отложена звездная величина, а не поток. Поэтому нужно провести еще несколько действий. В главном минимуме изменение звездной величины составляет $\Delta m_1 = 0.84^m$. Во вторичном минимуме — $\Delta m_2 = 0.09^m$.

Тогда отношение потоков:

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{-0.4 \cdot 0.84} = 0.46,$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{-0.4 \cdot 0.09} = 0.92.$$

Тогда искомое отношение температур

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1 - 0.46}{1 - 0.92}} \approx 1.6.$$

Нам неизвестно, какой индекс имеет звезда с массой и температурой Солнца. Возможно, это более горячая, а возможно, это более холодная звезда. Рассмотрим оба варианта.

1. Звезда типа Солнца, это более горячая звезда. Тогда вторая звезда будет иметь температуру 3600 К.
2. Звезда типа Солнца, это более холодная звезда. Тогда вторая звезда будет иметь температуру 9300 К.

9.5. Два в одном

В. Б. Игнатьев

Полное лунное затмение вместе с частными теньевыми фазами наблюдалось с 20:35 до 24:00 по всемирному времени. Одновременно вместе с затмением произошло покрытие Луной звезды Завийява, которое было видно только в небольшой части южного полушария.

1. Определите длительность полной фазы этого лунного затмения.
2. Определите дату этого затмения.
3. Оцените возможные широты, на которых можно было наблюдать покрытие Завийявы.

Орбиты Земли и Луны считайте круговыми. Эклиптические координаты Завийявы: широта $\beta = 41'$, долгота $\lambda = 177^\circ$. Изменением эклиптической широты Луны за время затмения пренебречь.

Решение. Рассмотрим конус тени (см. рисунок ниже), который образует подобные треугольники, используя которые можно записать

$$\frac{R_\odot}{a_\oplus + x_2} = \frac{R_\oplus}{x_2} = \frac{R_2}{x_2 - a_\zeta},$$

где R_\odot и R_\oplus — это радиусы Солнца и Земли соответственно, R_2 — радиус тени на удалении Луны (a_ζ) от Земли, a_\oplus — большая полуось орбиты Земли, x_2 — длина конуса земной тени. Выражаем из первого равенства x_2 , получаем:

$$x_2 = a_\oplus \frac{R_\oplus}{R_\odot - R_\oplus} = 1.496 \cdot 10^8 \cdot \frac{6370}{696\,000 - 6370} \approx 1.38 \cdot 10^6 \text{ км.}$$

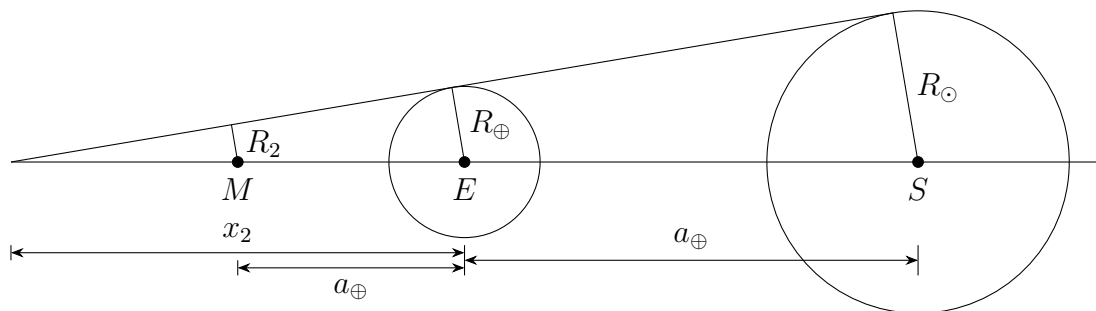


Рис. 1: Схема образования земной тени.

Из второго равенства выразим R_2 :

$$R_2 = R_\oplus \frac{x_2 - a_\zeta}{x_2} \approx 4600 \text{ км.}$$

Определим длину хорды, по которой проходит Луна через земную тень. Стоит отметить, что в пространстве движется и Луна и тень. Эту задачу можно решить через относительную угловую скорость (разность угловой скорости Луны и тени), которая связана с синодическим периодом. Или же можно остаться в логике линейных скоростей, считая, что

$$v = \frac{2\pi a_\zeta}{S} = 0.947 \text{ км/с.}$$

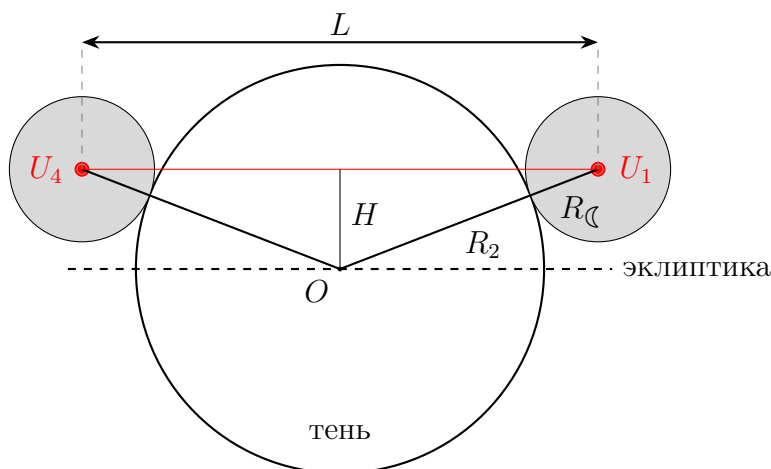


Рис. 2: Схема лунного затмения. Точка U_1 – момент начала затмения, диск Луны заходит в тень. Точка U_4 – момент окончания затмения.

где S – синодический период Луны.

Если затмение не центральное, Луна проходит через тень не по диаметру, а по некоторой хорде. Расстояние, которое проходит центр Луны относительно тени в течение затмения можно определить, зная относительную скорость Луны и продолжительность затмения T :

$$L = vT = 12\,300 \text{ с} \cdot 0.947 \text{ км/с} \approx 11\,650 \text{ км.}$$

Высота, на которой центр Луны проходит выше или ниже центра тени H равна

$$H = \sqrt{(R_2 + R_{\text{Ц}})^2 - (L/2)^2} = 2490 \text{ км.}$$

Теперь определим расстояние, которое проходит центр Луны во время полной фазы затмения:

$$L_2 = 2\sqrt{(R_2 - R_{\text{Ц}})^2 - H^2} \approx 2820 \text{ км.}$$

Тогда искомое время полной фазы равно

$$\Delta t_2 = \frac{L_2}{v} = \frac{2820 \text{ км}}{0.947 \text{ км/с}} = 2970 \text{ с} \approx 50 \text{ мин.}$$

Второй вопрос задачи – определим дату затмения. Воспользуемся двумя фактами.

1. Во время полного лунного затмения Луна находится в противоположной Солнцу точке неба. Следовательно, эклиптическая долгота Солнца отличается от долготы Луны на 180° .
2. Происходит покрытие Луной звезды с долготой $\lambda = 177^\circ$.

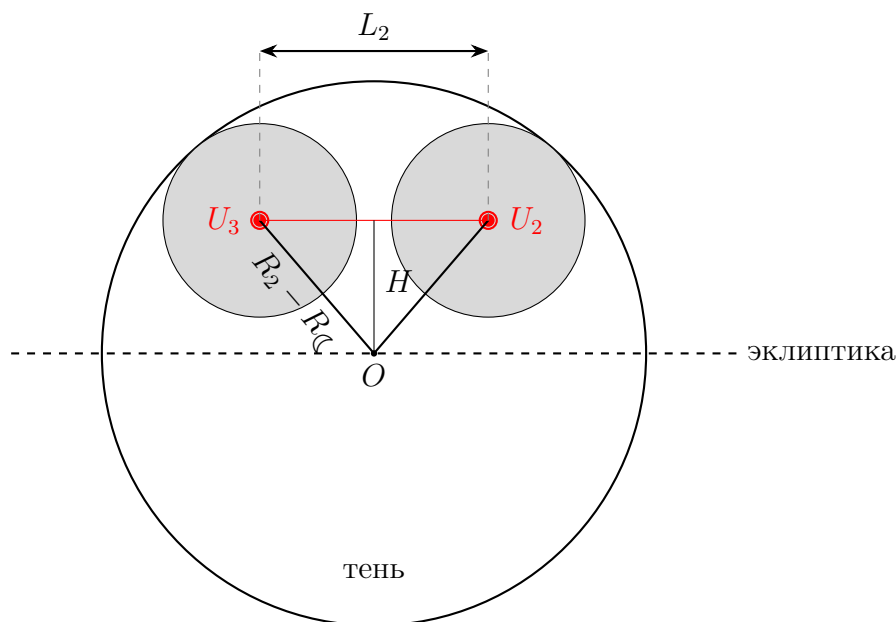


Рис. 3: Схема полной фазы лунного затмения. Точка U_2 – момент начала полной фазы затмения, диск Луны полностью заходит в тень. Точка U_3 – момент окончания затмения.

Следовательно, долгота Солнца $\lambda_{\odot} = 357^\circ$, то есть Солнце не дошло до точки весеннего равноденствия 3 дня. С учетом того, что равноденствие может приходиться на 19–21 марта, то ответ на второй вопрос 16–18 марта.

Перейдем к **третьему вопросу**. На первом этапе решения задачи мы определили, что Луна проходит выше или ниже центра тени, который лежит на эклиптике. Переведем эту высоту в градусную меру:

$$\beta_{\zeta} = \frac{206265H}{a_{\zeta}} = 1336'' \approx 22'.$$

Видимость покрытия будет обусловлена параллактическим эффектом. Если Луна находится выше эклиптики, то покрытие звезды можно увидеть почти на всех широтах, в том числе и в северном полушарии, что противоречит условию задачи. Напротив, если Луна находится ниже эклиптики, то эффект параллакса будет поднимать Луну, если наблюдатель смещается на юг.

Если наблюдатель переместится на самую удаленную точку Земли от эклиптики, то Луна изменит свое положение относительно звезд на величину параллакса Луны:

$$p = \frac{206265R_{\oplus}}{a_{\zeta}} = 57'$$

В этом случае центр Луны окажется на эклиптической широте $-22' + 57' = 35'$, что ни-

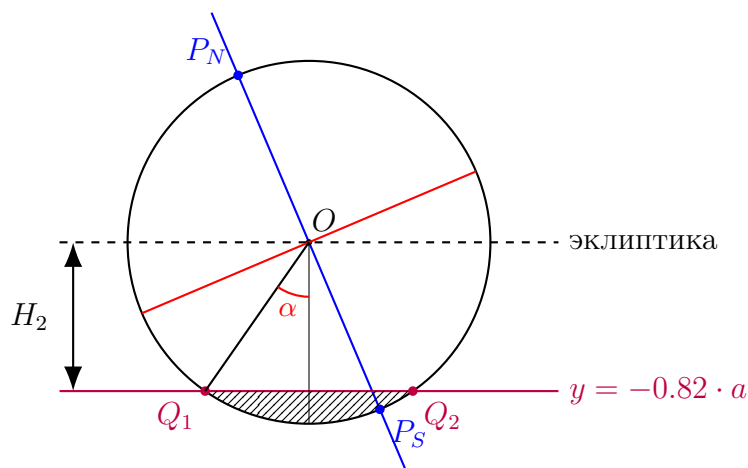


Рис. 4: Вид с Луны на Землю в момент равноденствия. Заштрихованная область — область где возможно наблюдение покрытия.

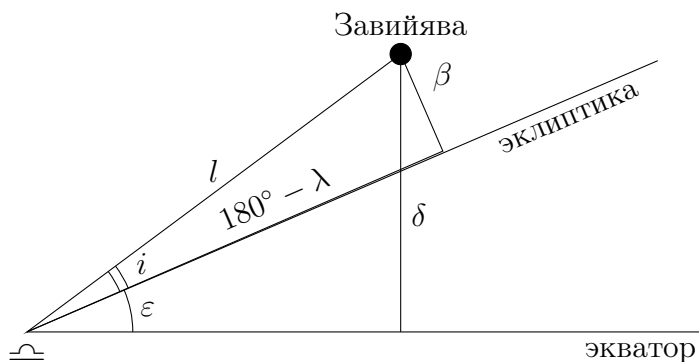
же широты Завийяки на $6'$. С учетом того, что Луна имеет значительный угловой радиус ($\approx 16'$), наблюдатель в самой нижней точке от эклиптики будет наблюдаться покрытие звезды. Также, если подняться выше к плоскости эклиптики (это не обязательно севернее), то покрытие будет наблюдаться до момента, пока суточный параллакс Луны будет больше, чем $57' - 16' + 6' = 47'$.

Определим предельную эклиптическую широту верхнего края Луны, при которой покрытие еще наблюдается: она равна $41'$. Отсюда находим минимальное параллактическое смещение для наблюдателя, который сможет увидеть покрытие: $47'$. Это смещение соответствует линейному расстоянию от эклиптики $H_2 = 5255$ км.

Определим угол α (см. рисунок)

$$\cos \alpha = \frac{H_2}{R_{\oplus}} = \frac{5255}{6371} \rightarrow \alpha = 34.4^\circ$$

Так как самая удаленная от эклиптики точка в день весеннего равноденствия имеет широту -66.5° , то максимальная широта, на которой можно увидеть покрытие Завийявы равна -32.1° .



Завийява располагается чуть менее чем на градус выше эклиптики, а ее эклиптическая долгота немного меньше долготы точки осеннего равноденствия. В этой области эклиптика выше

экватора, следовательно, склонение Завийявы положительное и с Южного полюса она не видна. Приблизительно можно оценить склонение в 1° – 2° , но это значение можно получить и более точно. Поскольку мы рассматриваем очень небольшую площадку на небе, воспользуемся плоским приближением. Расстояние от точки весеннего равноденствия до звезды равно $l = \sqrt{(41')^2 + (3^\circ)^2} \approx 3^\circ$, а наклон l к эклиптике $i = \operatorname{arctg} \frac{41'}{3^\circ} \approx 13^\circ$. Отсюда склонение Завийявы равно

$$\delta = l \sin(\varepsilon + i) = 1^\circ 48',$$

а самая южная широта наблюдения покрытия $88^\circ 12'$ ю. ш.

Таким образом, наблюдать покрытие Завийявы можно на широтах от 32.1 ю. ш. до 88.2 ю. ш.

9.6. Восточный экспресс

В. Б. Игнатьев

Корпорация «Роскосмос» запускает ракету-носитель со спутником с космодрома Восточный ($\lambda = 128^\circ 20'$ в. д., $\varphi = 51^\circ 53'$ с. ш.). На первом этапе ракета-носитель выводит спутник на опорную круговую орбиту высотой 270 км, для которой космодром Восточный является самой северной точкой орбиты.

Через несколько оборотов при пересечении плоскости экватора Земли спутник переходит на промежуточную эллиптическую орбиту того же наклона, апоцентрическое расстояние которой равно радиусу орбиты геостационарных спутников. На этой орбите спутник может совершить несколько оборотов. Оказавшись в апоцентре промежуточной орбиты, спутник еще одним маневром переходит на геостационарную орбиту. Считайте, что все маневры, включая вывод на опорную орбиту, совершаются мгновенно.

Определите оптимальное число витков спутника на опорной и на промежуточной орбитах, необходимое для вывода спутника на геостационарную орбиту с долготой Уфы ($\lambda = 56^\circ$ в. д.) с точностью не хуже 3 градусов. При этом суммарная продолжительность перехода не должна превышать 48 часов от момента запуска.

Решение.

Будем решать задачу в системе отсчета центра Земли.

Этап 1. Определение времен всех маневров.

Определим период обращения спутника на опорной круговой орбите.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{GM_\odot}} = 5372 \text{ секунд}$$

Теперь рассмотрим промежуточную эллиптическую орбиту. Определим афелийное расстояние на этой орбите:

$$a_G = \sqrt[3]{\frac{GM_\odot T_\odot^2}{2\pi}} = 42.23 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Отметим, что в качестве периода обращения Земли для расчетов геоцентрической орбиты нужно подставлять звездные сутки, не 24 часа, а $23^h 56^m 04^s = 86164^s$.

Большая полуось эллиптической орбиты находится как

$$a_2 = \frac{a_1 + a_G}{2}$$

Период обращения аппарата на этой орбите составляет

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a_2^3}{GM_\odot}} = 2\pi \sqrt{\frac{(a_1 + a_G)^3}{8GM_\odot}} \approx 37925^s$$

Этап 2. Расчеты долгот. За некоторое время Δt Земля повернется на угол

$$\alpha = \frac{\Delta t}{86164} \cdot 360^\circ$$

Но при этом спутник сделает нецелое число витков вокруг центра Земли.

Переход между опорной и промежуточной орбитами осуществляется в точке в экваториальной плоскости Земли, а начальная точка по условию является самой северной точкой орбиты. Поэтому на опорной орбите спутник может сделать целое число витков n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и либо $\frac{1}{4}$, либо $\frac{3}{4}$ оборота. За один оборот спутника на этой орбите Земля повернется под ним на угол 22.4° .

На промежуточной эллиптической орбите период спутника равен $T_2 = 37925$ секунд, что соответствует повороту Земли на 158.5° . Для выхода на геостационарную орбиту спутнику на промежуточной орбите необходимо сделать полуцелое число оборотов $k + \frac{1}{2}$. Где $k = 0, 1, 2, \dots$

Этап 3. Последовательность маневров.

Выработаем последовательность маневров для вывода спутника на долготу Уфы. Для решения этой задачи расчеты разумнее производить через углы поворота, а не через время. Но в конце решения надо будет проверить, чтобы итоговое время оказалось менее 48 часов.

Рассмотрим случай, когда на первой орбите спутник сделает $n + \frac{1}{4}$ витков.

Тогда после всех маневров спутник сделает

$$N = n + \frac{1}{4} + k + \frac{1}{2} \text{ витков,}$$

и спутник окажется на долготе λ при старте с долготы λ_0 :

$$\lambda = \lambda_0 - 90^\circ - \left(n + \frac{1}{4}\right) \cdot 22.4^\circ - \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot 158.5^\circ$$

Упростим выражение, оставив только целочисленные переменные n и k :

$$\lambda = \lambda_0 - 90^\circ - 84.85^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

Подставим значения λ и λ_0 :

$$56^\circ = 128.3^\circ - 90^\circ - 84.85^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

Упростим:

$$-102.5^\circ + 360^\circ \cdot M = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k, \quad (1)$$

здесь M – целое число оборотов Земли.

В случае, если мы рассматриваем на первой орбите $n + \frac{3}{4}$ оборота перед переходом на вторую эллиптическую орбиту, то выражение будет иметь вид

$$\lambda = \lambda_0 + 90^\circ - \left(n + \frac{3}{4}\right) \cdot 22.4^\circ - \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot 158.5^\circ - 2.25^\circ$$

$$56^\circ = 128.3^\circ + 90^\circ - 98.3^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

$$66.25^\circ + 360^\circ \cdot M = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k \quad (2)$$

Теперь надо подобрать целые числа n и k , при которых равенство выполняется.

Составим таблицу угла смещения для различных n и k :

$$f(\lambda) = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k$$

и сравним полученные значение с искомыми.

$$\begin{cases} 257.45^\circ = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k & \text{или} \\ 66.25^\circ = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k \end{cases}$$

	0	1	2	3
1	22.4	180.9	339.4	497.9
2	44.8	203.3	361.8	520.3
3	67.2	225.7	384.2	542.7
4	89.6	248.1	406.6	565.1
5	112	270.5	429	587.5
6	134.4	292.9	451.4	609.9
7	156.8	315.3	473.8	632.3
8	179.2	337.7	496.2	654.7
9	201.6	360.1	518.6	677.1
10	224	382.5	541	699.5
11	246.4	404.9	563.4	721.9
12	268.8	427.3	585.8	744.3
13	291.2	449.7	608.2	766.7
14	313.6	472.1	630.6	789.1
15	336	494.5	653	811.5
16	358.4	516.9	675.4	833.9

По вертикальной оси n – целое число витков на первой орбите, по горизонтальной оси k – целое число витков на второй орбите. Для стратегии с $n + \frac{1}{4}$ нас интересуют значения угла поворота 257.45° или $257.45^\circ + 360^\circ$, а для стратегии $n + \frac{3}{4}$ – значение 66.25° .

Из таблицы видим, что первый сценарий реализовать не получится, а второй реализуется при $n = 3$ и $k = 0$. Проверим, сколько времени потребуется для реализации всех маневров.

$$\Delta T = \left(n + \frac{3}{4}\right) \cdot T_1 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot T_2$$

$$\Delta T = \left(3 + \frac{3}{4}\right) \cdot 5370^s + \frac{1}{2} \cdot 37925^s = 39\,100^s \approx 10.9 \text{ часа.}$$

Альтернативные решения.

Найденная пара $n = 3$, $k = 0$ является оптимальной по времени перехода, однако не единственной. Если продолжить таблицу значений $f(\lambda)$ из стратегии $n + \frac{3}{4}$ на большие значения n (т.е. рассматривать варианты, в которых правая часть равенства (2) обходит лишние 360° за счёт дополнительных оборотов Земли), обнаруживаются ещё два попадания в окрестность Уфы — $n = 19$, $k = 0$ и $n = 12$, $k = 1$. В обоих случаях суммарное время составляет около 34.9 часа, то есть формальным условиям варианты удовлетворяют.

Кроме того, условие задачи фиксирует наклонение опорной орбиты ($i = 51.88^\circ$, поскольку космодром Восточный — самая северная её точка), но не задаёт направление обращения спутника. При запуске «против вращения Земли» (по ретроградной орбите) положения восходящего и нисходящего узлов в инерциальной системе меняются местами, и формулы (1) и (2) переходят друг в друга с заменой знака. Перебор показывает, что в коридоре $\pm 3^\circ$ от Уфы и в пределах 48 часов реализуются ещё три ретроградных решения — $n = 11$, $k = 0$, $n = 4$, $k = 1$ (около 22.9 часа), а также $n = 27$, $k = 0$ (около 46.9 часа).

Сводная таблица всех найденных в рамках условий задачи решений приведена ниже. Оптимальным остаётся прямой запуск $n = 3$, $k = 0$ — наименьшее время и наиболее реалистичный по энергозатратам вариант.

№	Запуск	n	k	ΔT , ч	Ошибка от Уфы
1	прямой	3	0	10.9	-1.5°
2	ретроградный	11	0	22.9	-1.8°
3	ретроградный	4	1	22.9	-2.5°
4	прямой	19	0	34.9	-2.1°
5	прямой	12	1	34.9	-2.8°
6	ретроградный	27	0	46.9	-2.4°

Prograde launch — N = 3, K = 0, strategy 3/4 [✓ SUCCESS]

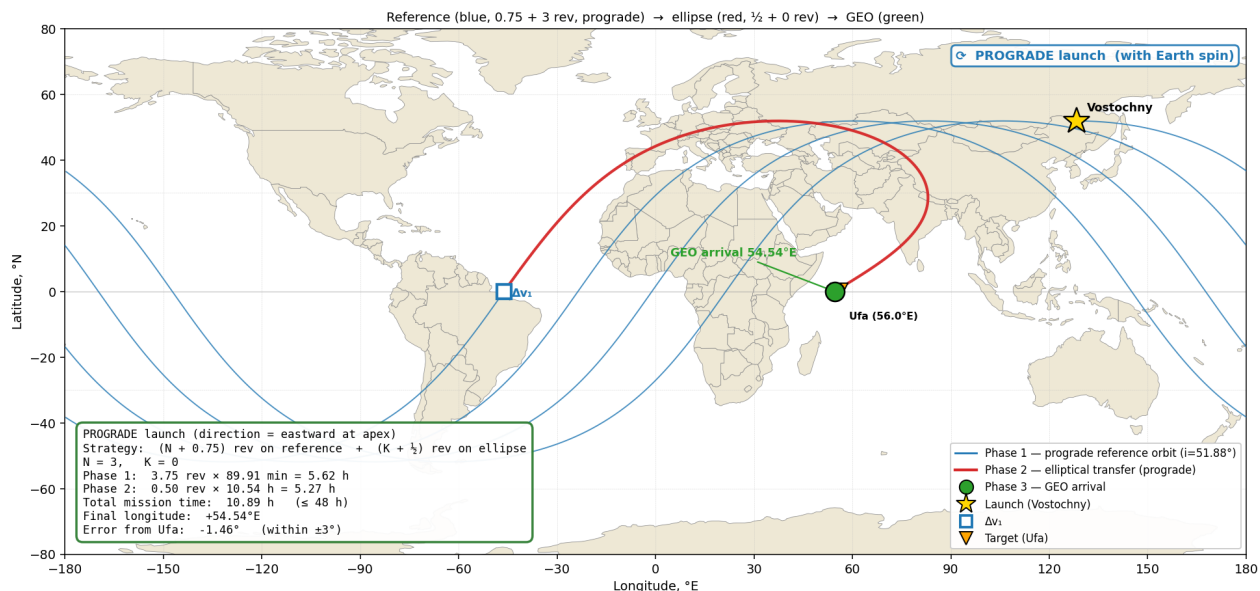


Рис. 5: Решение №1. Прямой запуск, $n = 3$, $k = 0$. Оптимальное по времени решение задачи: $\Delta T \approx 10.9$ ч, конечная долгота 54.5° в. д.

Retrograde launch — N = 11, K = 0, strategy 3/4 [✓ SUCCESS]

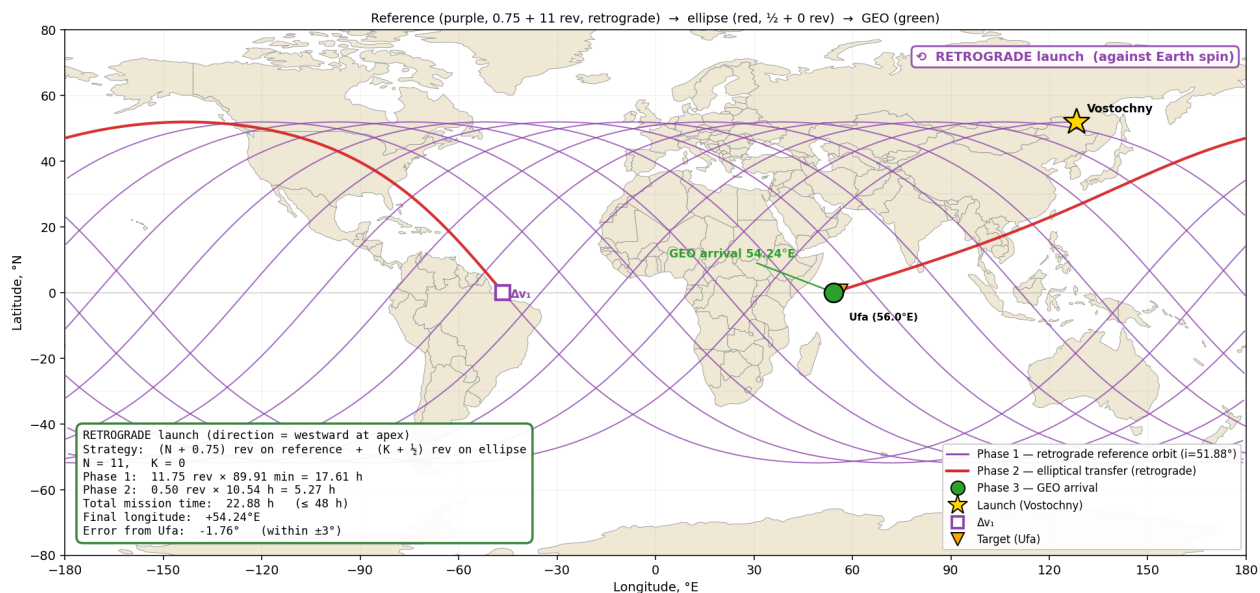


Рис. 6: Решение №2. Ретроградный запуск, $n = 11$, $k = 0$. $\Delta T \approx 22.9$ ч, конечная долгота 54.2° в. д.

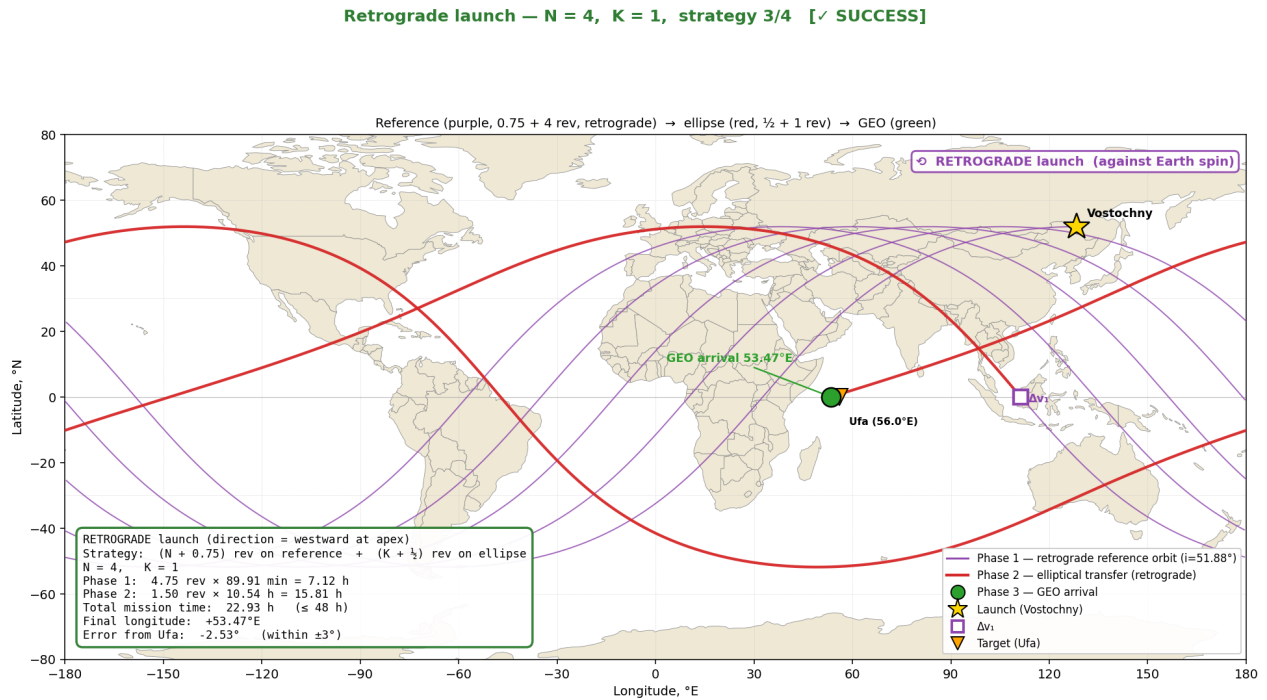


Рис. 7: Решение №3. Ретроградный запуск, $n = 4$, $k = 1$. $\Delta T \approx 22.9$ ч, конечная долгота 53.5° в. д.

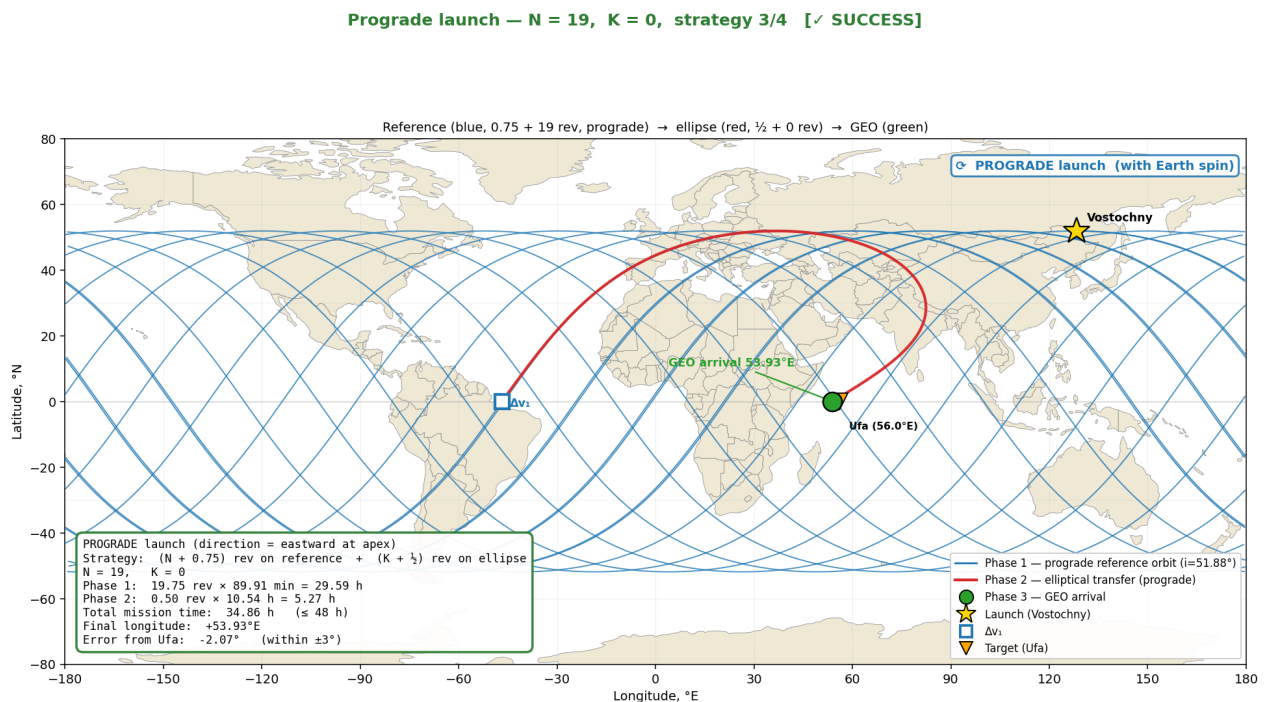


Рис. 8: Решение №4. Прямой запуск, $n = 19$, $k = 0$. $\Delta T \approx 34.9$ ч, конечная долгота 53.9° в. д.

Prograde launch — N = 12, K = 1, strategy 3/4 [✓ SUCCESS]

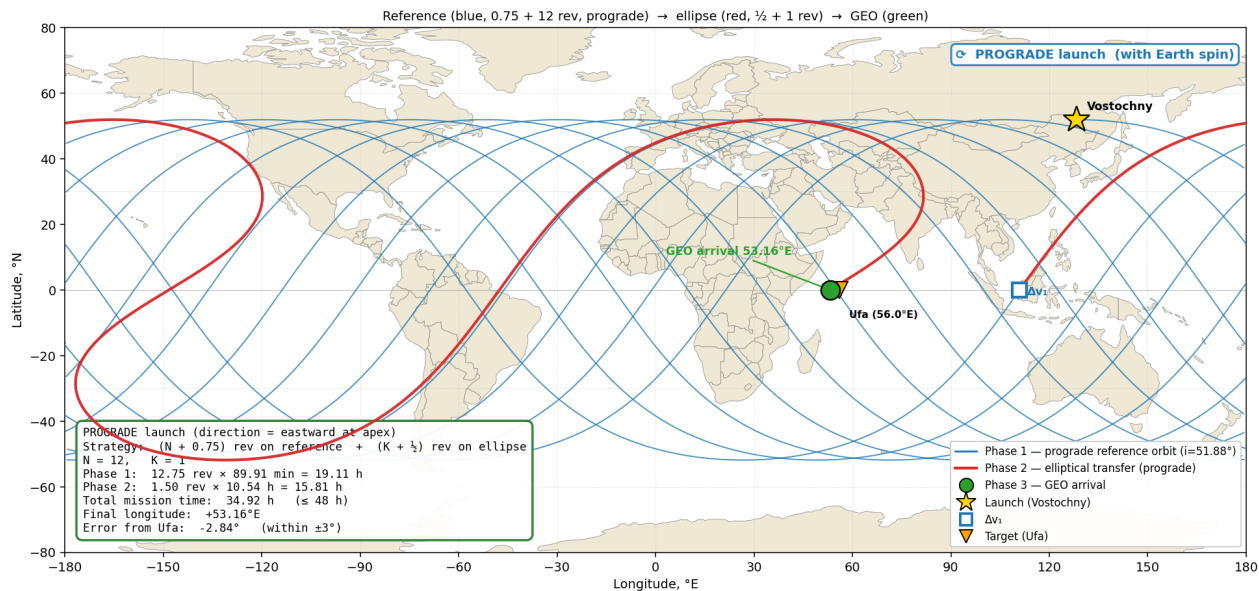


Рис. 9: Решение №5. Прямой запуск, $n = 12$, $k = 1$. $\Delta T \approx 34.9$ ч, конечная долгота 53.2° в. д.

Retrograde launch — N = 27, K = 0, strategy 3/4 [✓ SUCCESS]

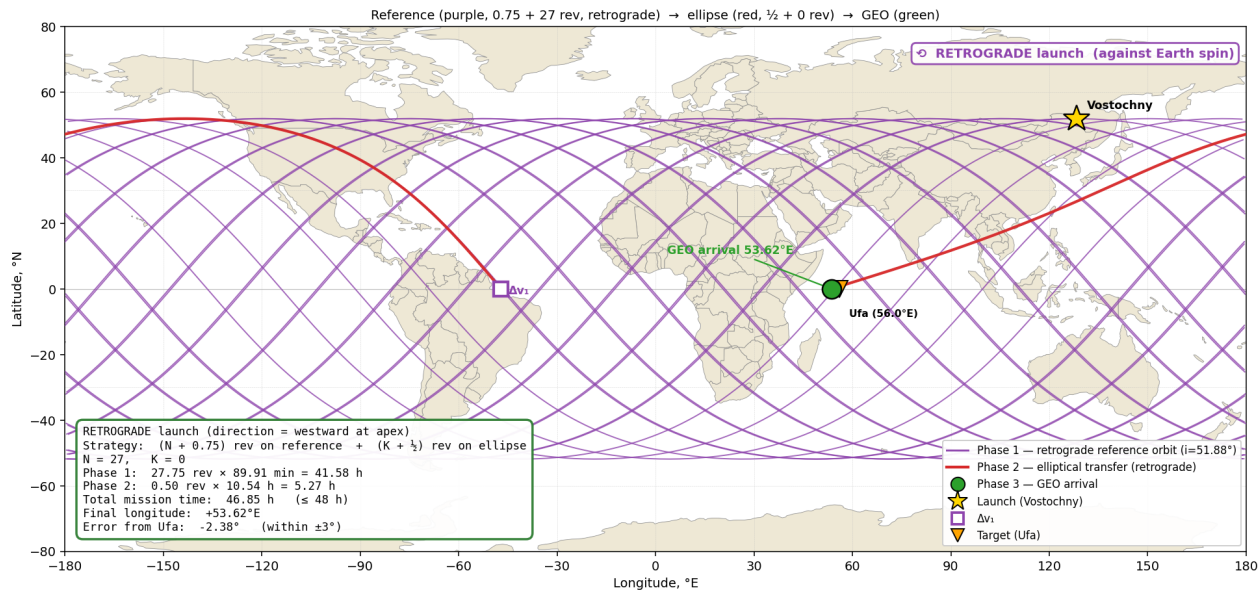


Рис. 10: Решение №6. Ретроградный запуск, $n = 27$, $k = 0$. $\Delta T \approx 46.9$ ч, конечная долгота 53.6° в. д.

Содержание

10.1. Восточный экспресс	2
10.2. Искусственный отбор	9
10.3. Галактические петли	12
10.4. Звездный градусник	16
10.5. Ночью надо спать	18
10.6. Конь G2	20

10.1. Восточный экспресс

В.Б. Игнатьев

Корпорация «Роскосмос» запускает ракету-носитель со спутником с космодрома Восточный ($\lambda = 128^{\circ}20'$ в. д., $\varphi = 51^{\circ}53'$ с. ш.). На первом этапе ракета-носитель выводит спутник на опорную круговую орбиту высотой 270 км, для которой космодром Восточный является самой северной точкой орбиты.

Через несколько оборотов при пересечении плоскости экватора Земли спутник переходит на промежуточную эллиптическую орбиту того же наклона, апоцентрическое расстояние которой равно радиусу орбиты геостационарных спутников. На этой орбите спутник может совершить несколько оборотов. Оказавшись в апоцентре промежуточной орбиты, спутник еще одним маневром переходит на геостационарную орбиту. Считайте, что все маневры, включая вывод на опорную орбиту, совершаются мгновенно.

Определите оптимальное число витков спутника на опорной и на промежуточной орбитах, необходимое для вывода спутника на геостационарную орбиту с долготой Уфы ($\lambda = 56^{\circ}$ в. д.) с точностью не хуже 3 градусов. При этом суммарная продолжительность перехода не должна превышать 48 часов от момента запуска.

Решение.

Будем решать задачу в системе отсчета центра Земли.

Этап 1. Определение времен всех маневров.

Определим период обращения спутника на опорной круговой орбите.

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3}{GM_{\odot}}} = 5372 \text{ секунд}$$

Теперь рассмотрим промежуточную эллиптическую орбиту. Определим афелийное расстояние на этой орбите:

$$a_G = \sqrt[3]{\frac{GM_{\odot} T_{\odot}^2}{2\pi}} = 42.23 \cdot 10^6 \text{ м}$$

Отметим, что в качестве периода обращения Земли для расчетов геоцентрической орбиты нужно подставлять звездные сутки, не 24 часа, а $23^h 56^m 04^s = 86164^s$.

Большая полуось эллиптической орбиты находится как

$$a_2 = \frac{a_1 + a_G}{2}$$

Период обращения аппарата на этой орбите составляет

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{a_2^3}{GM_{\odot}}} = 2\pi \sqrt{\frac{(a_1 + a_G)^3}{8GM_{\odot}}} \approx 37925^s$$

Этап 2. Расчеты долгот. За некоторое время Δt Земля повернется на угол

$$\alpha = \frac{\Delta t}{86164} \cdot 360^\circ$$

Но при этом спутник сделает нецелое число витков вокруг центра Земли.

Переход между опорной и промежуточной орбитами осуществляется в точке в экваториальной плоскости Земли, а начальная точка по условию является самой северной точкой орбиты. Поэтому на опорной орбите спутник может сделать целое число витков n ($n = 0, 1, 2, \dots$) и либо $\frac{1}{4}$, либо $\frac{3}{4}$ оборота. За один оборот спутника на этой орбите Земля повернется под ним на угол 22.4° .

На промежуточной эллиптической орбите период спутника равен $T_2 = 37925$ секунд, что соответствует повороту Земли на 158.5° . Для выхода на геостационарную орбиту спутнику на промежуточной орбите необходимо сделать полуцелое число оборотов $k + \frac{1}{2}$. Где $k = 0, 1, 2, \dots$

Этап 3. Последовательность маневров.

Выработаем последовательность маневров для вывода спутника на долготу Уфы. Для решения этой задачи расчеты разумнее производить через углы поворота, а не через время. Но в конце решения надо будет проверить, чтобы итоговое время оказалось менее 48 часов.

Рассмотрим случай, когда на первой орбите спутник сделает $n + \frac{1}{4}$ витков.

Тогда после всех маневров спутник сделает

$$N = n + \frac{1}{4} + k + \frac{1}{2} \text{ витков,}$$

и спутник окажется на долготе λ при старте с долготы λ_0 :

$$\lambda = \lambda_0 - 90^\circ - (n + \frac{1}{4}) \cdot 22.4^\circ - (k + \frac{1}{2}) \cdot 158.5^\circ$$

Упростим выражение, оставив только целочисленные переменные n и k :

$$\lambda = \lambda_0 - 90^\circ - 84.85^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

Подставим значения λ и λ_0 :

$$56^\circ = 128.3^\circ - 90^\circ - 84.85^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

Упростим:

$$-102.5^\circ + 360^\circ \cdot M = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k, \quad (1)$$

здесь M – целое число оборотов Земли.

В случае, если мы рассматриваем на первой орбите $n + \frac{3}{4}$ оборота перед переходом на вторую эллиптическую орбиту, то выражение будет иметь вид

$$\lambda = \lambda_0 + 90^\circ - (n + \frac{3}{4}) \cdot 22.4^\circ - (k + \frac{1}{2}) \cdot 158.5^\circ - 2.25^\circ$$

$$56^\circ = 128.3^\circ + 90^\circ - 98.3^\circ - 22.4^\circ \cdot n - 158.5^\circ \cdot k$$

$$66.25^\circ + 360^\circ \cdot M = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k \quad (2)$$

Теперь надо подобрать целые числа n и k , при которых равенство выполняется.

Составим таблицу угла смещения для различных n и k :

$$f(\lambda) = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k$$

и сравним полученные значение с искомыми.

$$\begin{cases} 257.45^\circ = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k & \text{или} \\ 66.25^\circ = 22.4^\circ \cdot n + 158.5^\circ \cdot k \end{cases}$$

	0	1	2	3
1	22.4	180.9	339.4	497.9
2	44.8	203.3	361.8	520.3
3	67.2	225.7	384.2	542.7
4	89.6	248.1	406.6	565.1
5	112	270.5	429	587.5
6	134.4	292.9	451.4	609.9
7	156.8	315.3	473.8	632.3
8	179.2	337.7	496.2	654.7
9	201.6	360.1	518.6	677.1
10	224	382.5	541	699.5
11	246.4	404.9	563.4	721.9
12	268.8	427.3	585.8	744.3
13	291.2	449.7	608.2	766.7
14	313.6	472.1	630.6	789.1
15	336	494.5	653	811.5
16	358.4	516.9	675.4	833.9

По вертикальной оси n – целое число витков на первой орбите, по горизонтальной оси k – целое число витков на второй орбите. Для стратегии с $n + \frac{1}{4}$ нас интересуют значения угла поворота 257.45° или $257.45^\circ + 360^\circ$, а для стратегии $n + \frac{3}{4}$ – значение 66.25° .

Из таблицы видим, что первый сценарий реализовать не получится, а второй реализуется при $n = 3$ и $k = 0$. Проверим, сколько времени потребуется для реализации всех маневров.

$$\Delta T = \left(n + \frac{3}{4}\right) \cdot T_1 + \left(k + \frac{1}{2}\right) \cdot T_2$$

$$\Delta T = \left(3 + \frac{3}{4}\right) \cdot 5370^s + \frac{1}{2} \cdot 37925^s = 39\,100^s \approx 10.9 \text{ часа.}$$

Альтернативные решения.

Найденная пара $n = 3$, $k = 0$ является оптимальной по времени перехода, однако не единственной. Если продолжить таблицу значений $f(\lambda)$ из стратегии $n + \frac{3}{4}$ на большие значения n (т.е. рассматривать варианты, в которых правая часть равенства (2) обходит лишние 360° за счёт дополнительных оборотов Земли), обнаруживаются ещё два попадания в окрестность Уфы — $n = 19$, $k = 0$ и $n = 12$, $k = 1$. В обоих случаях суммарное время составляет около 34.9 часа, то есть формальным условиям варианты удовлетворяют.

Кроме того, условие задачи фиксирует наклонение опорной орбиты ($i = 51.88^\circ$, поскольку космодром Восточный — самая северная её точка), но не задаёт направление обращения спутника. При запуске «против вращения Земли» (по ретроградной орбите) положения восходящего и нисходящего узлов в инерциальной системе меняются местами, и формулы (1) и (2) переходят друг в друга с заменой знака. Перебор показывает, что в коридоре $\pm 3^\circ$ от Уфы и в пределах 48 часов реализуются ещё три ретроградных решения — $n = 11$, $k = 0$, $n = 4$, $k = 1$ (около 22.9 часа), а также $n = 27$, $k = 0$ (около 46.9 часа).

Сводная таблица всех найденных в рамках условий задачи решений приведена ниже. Оптимальным остаётся прямой запуск $n = 3$, $k = 0$ — наименьшее время и наиболее реалистичный по энергозатратам вариант.

№	Запуск	n	k	ΔT , ч	Ошибка от Уфы
1	прямой	3	0	10.9	-1.5°
2	ретроградный	11	0	22.9	-1.8°
3	ретроградный	4	1	22.9	-2.5°
4	прямой	19	0	34.9	-2.1°
5	прямой	12	1	34.9	-2.8°
6	ретроградный	27	0	46.9	-2.4°

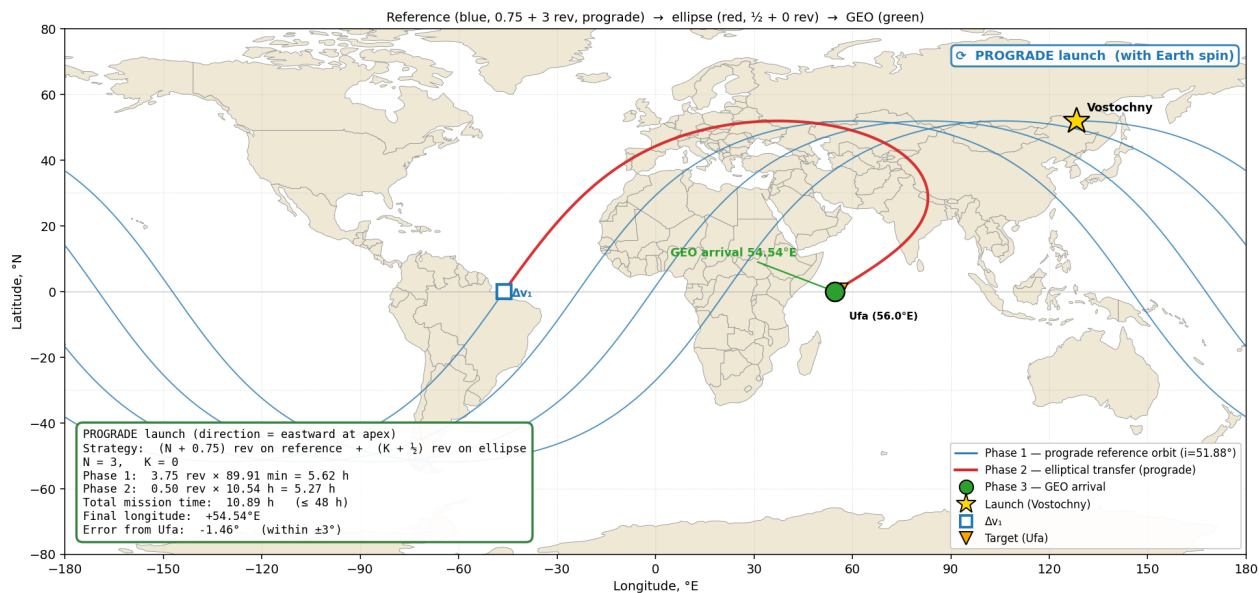
Prograde launch — $N = 3$, $K = 0$, strategy 3/4 [✓ SUCCESS]

Рис. 1: Решение №1. Прямой запуск, $n = 3$, $k = 0$. Оптимальное по времени решение задачи: $\Delta T \approx 10.9$ ч, конечная долгота 54.5° в. д.

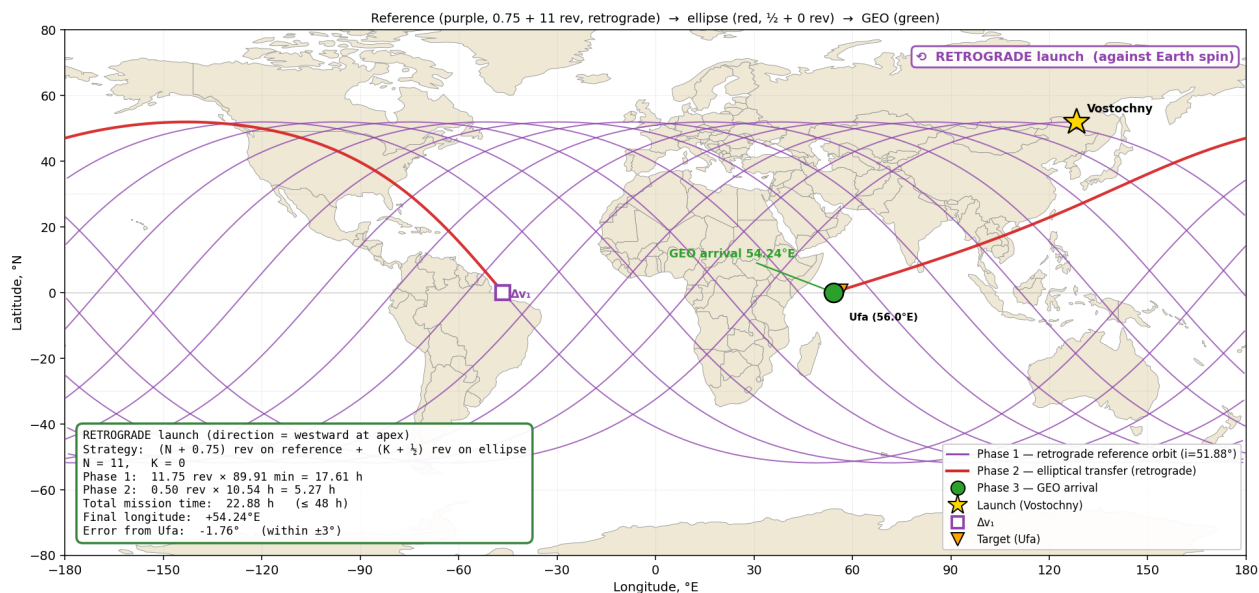
Retrograde launch — $N = 11$, $K = 0$, strategy 3/4 [✓ SUCCESS]

Рис. 2: Решение №2. Ретроградный запуск, $n = 11$, $k = 0$. $\Delta T \approx 22.9$ ч, конечная долгота 54.2° в. д.

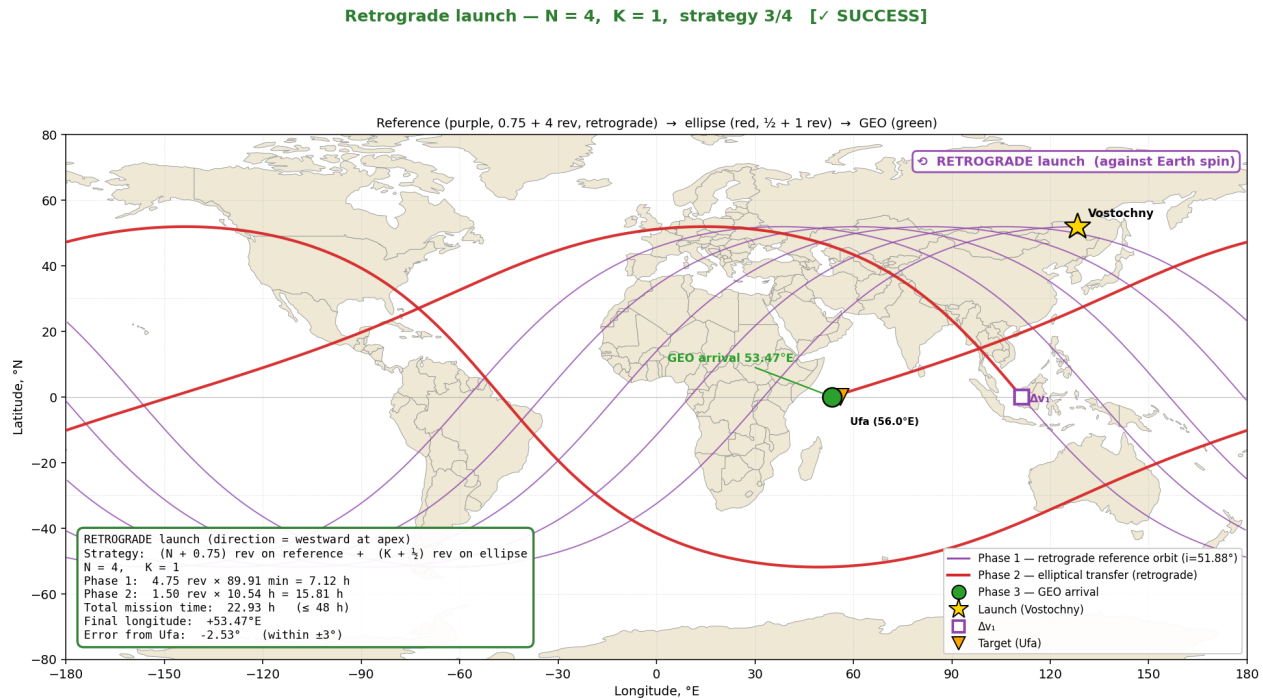


Рис. 3: Решение №3. Ретроградный запуск, $n = 4$, $k = 1$. $\Delta T \approx 22.9$ ч, конечная долгота 53.5° в. д.

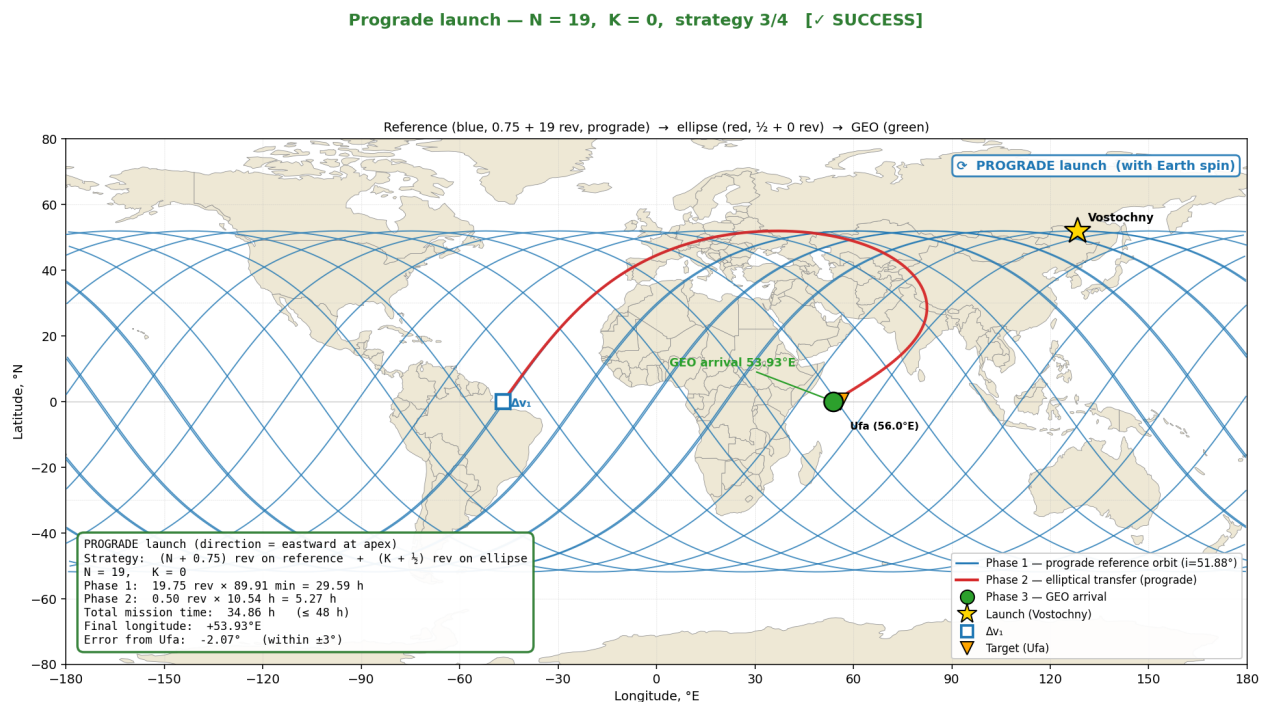


Рис. 4: Решение №4. Прямой запуск, $n = 19$, $k = 0$. $\Delta T \approx 34.9$ ч, конечная долгота 53.9° в. д.

Prograde launch — N = 12, K = 1, strategy 3/4 [✓ SUCCESS]

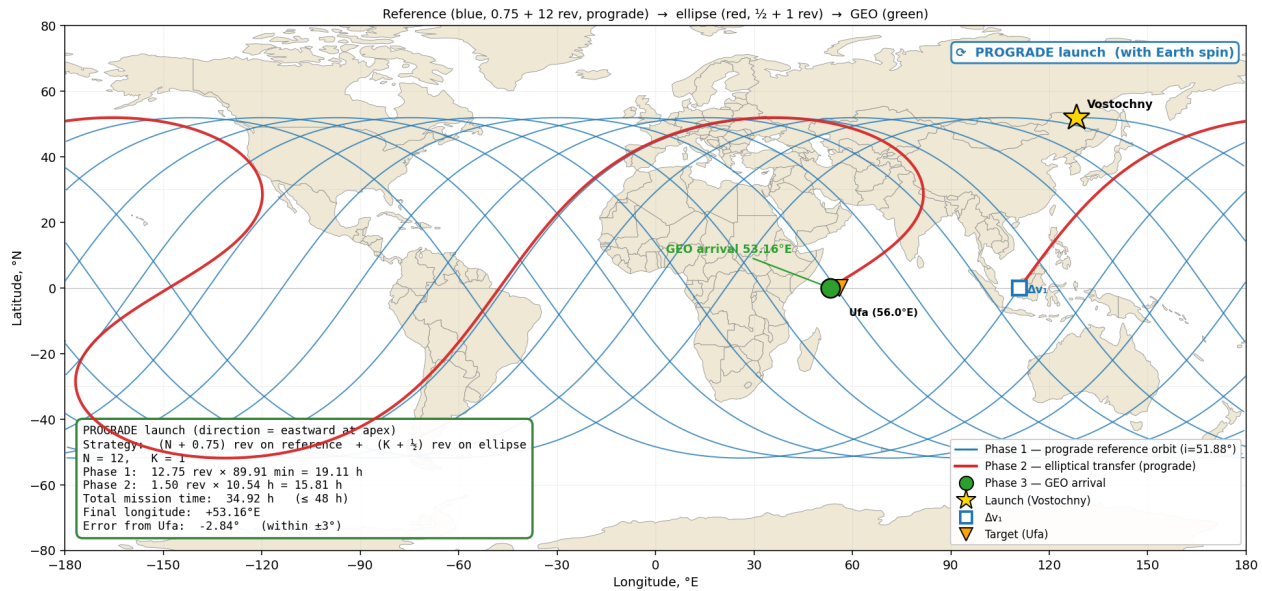


Рис. 5: Решение №5. Прямой запуск, $n = 12$, $k = 1$. $\Delta T \approx 34.9$ ч, конечная долгота 53.2° в. д.

Retrograde launch — N = 27, K = 0, strategy 3/4 [✓ SUCCESS]

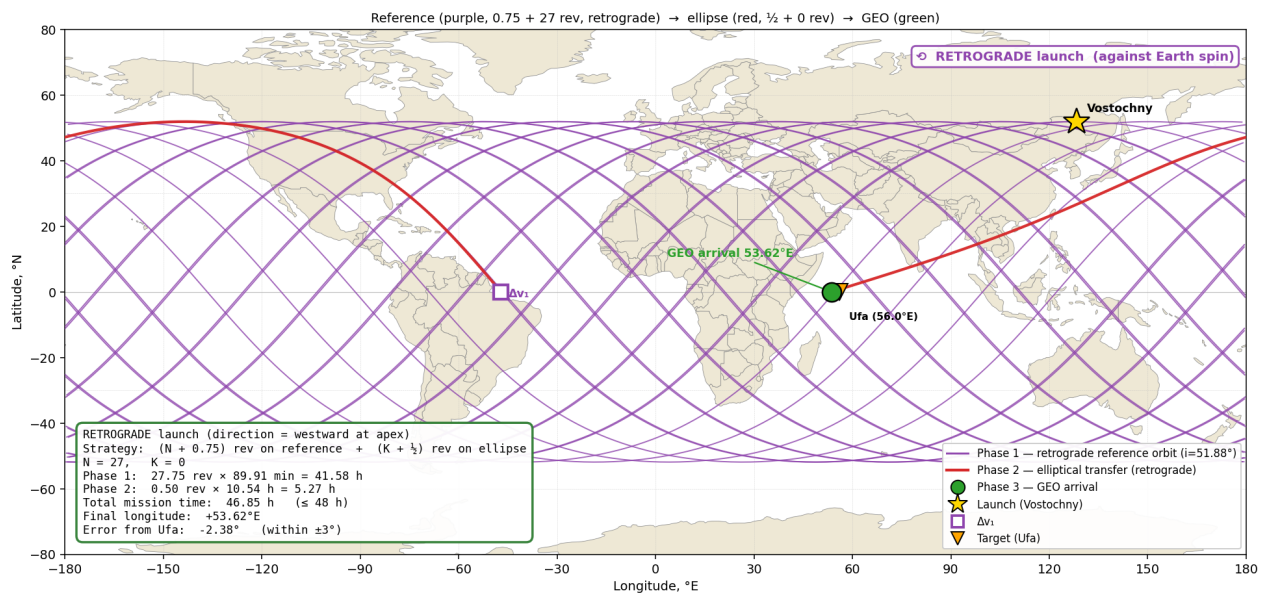


Рис. 6: Решение №6. Ретроградный запуск, $n = 27$, $k = 0$. $\Delta T \approx 46.9$ ч, конечная долгота 53.6° в. д.

10.2. Искусственный отбор

А. Н. Акинъщиков

Транзитный обзор даёт каталог планет с заметным избытком коротких периодов. Нужно оценить, какую часть этого эффекта создаёт геометрическая селекция самого метода.

Пусть все рассматриваемые планеты движутся по круговым орбитам вокруг солнцеподобных звёзд массы $1 M_{\odot}$ и радиуса $1 R_{\odot}$. Радиусы планет гораздо меньше радиусов звёзд, плоскости планетарных орбит ориентированы в пространстве случайно. Считайте, что наблюдатель обязательно обнаружит транзит, если он геометрически возможен.

В некотором транзитном каталоге распределение числа планет по периодам обращения оказалось таким:

Период, дни	1–2	2–4	4–8	8–16	16–32	32–64
Число планет	145	110	82	60	40	22

Для оценки считайте, что всем планетам внутри каждого диапазона периодов можно приписать период, равный среднему геометрическому границ диапазона.

- Найдите, как вероятность наблюдения транзита зависит от периода системы P .
- Восстановите истинную популяцию – оцените число планет в каждом диапазоне периодов и полное число планет в этом каталоге, если бы наблюдения не ограничивались эффектом геометрической селекции.
- Сравните средний период планет в наблюдаемом каталоге и в восстановленной истинной популяции.

Решение. Обозначим через a радиус круговой орбиты, а через i – угол между нормалью к плоскости орбиты и лучом зрения. Тогда $i = 0^\circ$ соответствует орбите, видимой плашмя, а $i = 90^\circ$ – орбите, видимой с ребра. Достаточно рассматривать

$$0 \leq i \leq \frac{\pi}{2},$$

поскольку две противоположные нормали задают одну и ту же плоскость орбиты.

В момент соединения расстояние от центра планеты до центра диска звезды в проекции на небо равно

$$b = a \cos i.$$

Транзит возможен, если это расстояние не превосходит радиуса звезды:

$$a \cos i \leq R_{\odot}.$$

Значит, транзитные ориентации удовлетворяют условию

$$i \geq i_0, \quad \cos i_0 = \frac{R_{\odot}}{a}.$$

Теперь найдём долю систем с такими ориентациями орбит. При случайной ориентации плоскости орбиты направление её нормали равномерно распределено по сфере. На единичной сфере условия

$$i_0 \leq i \leq \frac{\pi}{2}$$

задают сферический пояс. Его высота равна

$$\cos i_0 - \cos \frac{\pi}{2} = \cos i_0.$$

Площадь сферического пояса на единичной сфере равна произведению 2π на его высоту. Вся полусфера возможных различных плоскостей имеет площадь 2π , поэтому доля подходящих ориентаций равна

$$p_{\text{tr}} = \frac{2\pi \cos i_0}{2\pi} = \cos i_0 = \frac{R_{\odot}}{a}.$$

Эквивалентная интегральная запись этого шага:

$$p_{\text{tr}} = \frac{\int_{i_0}^{\pi/2} \sin i \, di}{\int_0^{\pi/2} \sin i \, di} = \frac{R_{\odot}}{a}.$$

Из третьего закона Кеплера для солнцеподобной звезды

$$a = \left(\frac{P}{1 \text{ yr}} \right)^{2/3} \text{ AU}.$$

Следовательно,

$$p_{\text{tr}} = \frac{R_{\odot}}{\text{AU}} \left(\frac{P}{1 \text{ yr}} \right)^{-2/3} \approx 0,00465 \left(\frac{P}{1 \text{ yr}} \right)^{-2/3}.$$

Отсюда сразу видна и зависимость

$$p_{\text{tr}} \propto P^{-2/3},$$

и численная нормировка, необходимая для восстановления истинного числа планет.

В каждом диапазоне берём характерный период, равный среднему геометрическому его границ:

$$P_i = \sqrt{2}, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}, 8\sqrt{2}, 16\sqrt{2}, 32\sqrt{2} \text{ d}.$$

Для этих периодов получаем примерно следующие геометрические вероятности транзита:

$$0,189, 0,119, 0,0748, 0,0472, 0,0297, 0,0187.$$

Если в некотором диапазоне наблюдается N_{obs} планет, то соответствующее истинное их число оценивается как

$$N_{\text{true}} \approx \frac{N_{\text{obs}}}{p_{\text{tr}}}.$$

Отсюда в распределении по диапазонам получаем примерные значения:

$$769, 926, 1096, 1273, 1347, 1176.$$

Суммируя, находим оценку общего числа планет в диапазоне периодов от 1 до 64 суток:

$$N_{\text{true,tot}} \approx 6590.$$

При этом в наблюдаемом каталоге было всего

$$N_{\text{obs,tot}} = 145 + 110 + 82 + 60 + 40 + 22 = 459$$

планет.

Теперь найдём средний период. Для наблюдаемого каталога используем те же характерные периоды P_i :

$$\langle P \rangle_{\text{obs}} \approx \frac{\sum N_{\text{obs},i} P_i}{\sum N_{\text{obs},i}}.$$

Подстановка чисел даёт

$$\langle P \rangle_{\text{obs}} \approx 7,8 \text{ d.}$$

Для истинной популяции периоды нужно усреднять с весами, равными восстановленным числам планет:

$$\langle P \rangle_{\text{true}} \approx \frac{\sum N_{\text{true},i} P_i}{\sum N_{\text{true},i}} \approx 16,4 \text{ d.}$$

Плоский случай

Дополнительно рассмотрим плоский случай, который использовало большинство участников: плоскость орбиты проворачивается относительно картинной плоскости только в одном направлении. При таком ограничении ориентации орбиты транзит возможен тогда, когда луч зрения проходит от плоскости орбиты не дальше, чем на расстояние порядка R_{\odot} . Поэтому геометрическая вероятность транзита пропорциональна

$$p_{\text{tr}} \propto \frac{2 R_{\odot}}{\pi a},$$

где a – радиус орбиты. Из третьего закона Кеплера для солнцеподобной звезды следует:

$$P^2 \propto a^3, \quad a \propto P^{2/3}.$$

Следовательно,

$$p_{\text{tr}} = \frac{2 R_{\odot}}{\pi AU} \left(\frac{P}{1 \text{ yr}} \right)^{-2/3} \approx 0,0093 \frac{1}{\pi} \left(\frac{P}{1 \text{ yr}} \right)^{-2/3}.$$

В этом случае получаем следующие геометрические вероятности транзита:

$$0,120, 0,075, 0,0476, 0,03, 0,0189, 0,0119.$$

Отсюда при распределении по диапазонам получаем количество планет в истинной популяции:

$$1207, 1454, 1721, 2000, 2116, 1847.$$

Суммируя, находим оценку общего числа планет в диапазоне периодов от 1 до 64 суток:

$$N_{\text{true,tot}} \approx 10345.$$

Остальные значения не меняются.

10.3. Галактические петли

И.В. Игнатьев

При наблюдениях за облаком H I в диске галактики (в области, где скорость вращения не зависит от расстояния от центра) было обнаружено красное смещение линии нейтрального водорода в ее спектре на 42 микрона относительно гелиоцентрической системы отсчёта. Исходя из этого, оцените возможные галактические долготы этого облака. Считайте, что скорость вращения в галактике постоянна на расстояниях от центра, больших $R_0 = 4$ кпк, а радиус галактического диска составляет $R = 15$ кпк. Толщиной диска Галактики и отклонением от круговых орбит пренебречь.

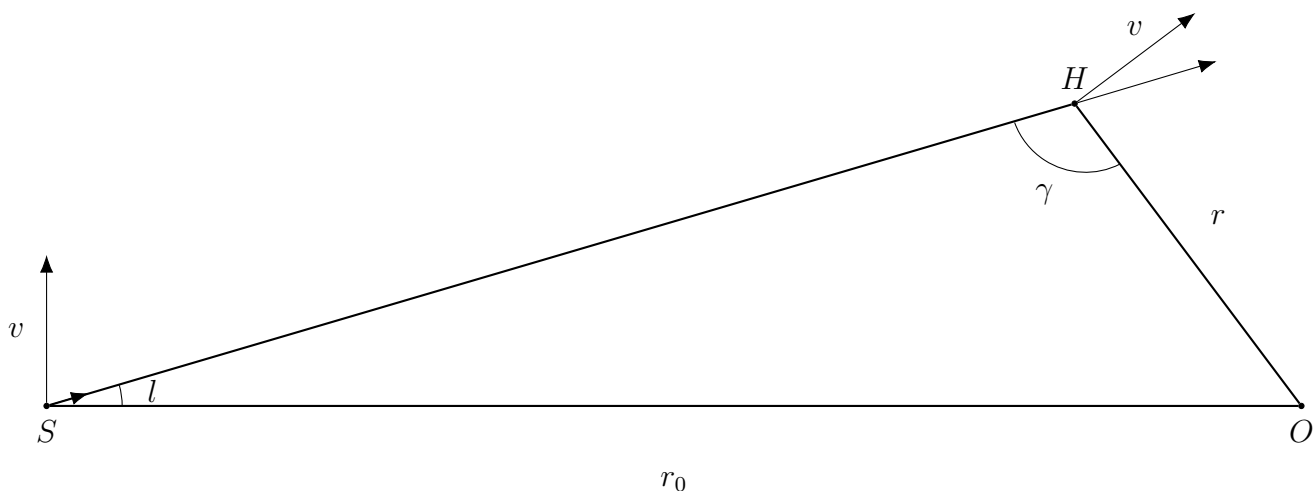
Решение.

Как известно, нейтральный водород излучает на линии $\lambda_0 = 21$ см. Исходя из этого, мы можем получить гелиоцентрическую лучевую скорость облака:

$$\frac{v_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0},$$

$$v_r = 60 \text{ км/с.}$$

Отдельно отметим, что наблюдается красное смещение, а значит, облако удаляется от наблюдателя. Галактическая долгота l отсчитывается от направления от Солнца S на центр Галактики O против часовой стрелки (если смотреть с северного полюса Галактики). Обозначим облако на рисунке буквой H и определим его лучевую скорость. Поскольку и Солнце, и облако находятся дальше 4 кпк от центра Галактики, примем их скорости одинаковыми и равными скорости на плато зависимости скорости от расстояния – v , расстояние от Солнца до центра Галактики обозначим за r_0 , от облака до центра Галактики за r . Вращение Галактики при этом происходит по часовой стрелке (опять же при наблюдении из северного полюса).



Тогда гелиоцентрическая лучевая скорость может быть выражена так:

$$v_r = v \sin \gamma - v \sin l.$$

Выражая из теоремы синусов для треугольник SOH синус угла γ получаем:

$$\sin \gamma = \sin l \frac{r_0}{r},$$

$$v_r = v \sin l \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right).$$

Сразу обозначим $k = v_r / v$. В результате получаем связь между l и r для фиксированного k :

$$k = \sin l \left(\frac{r_0}{r} - 1 \right).$$

В качестве оценки возьмём расстояние от Солнца до центра Галактики $r_0 = 8.3$ кпк, а скорость на плато $v = 230$ км/с. В данной задаче получаем:

$$k = \frac{v_r}{v} = 0.26.$$

Перейдём к нахождению возможных галактических долгот. Рассмотрим отдельно два случая: когда облако нейтрального водорода находится к центру Галактики ближе, чем Солнце и дальше, чем Солнце.

Первый случай. Рассмотрим вариант, когда $r \leq r_0$, то есть облако не дальше от центра Галактики, чем Солнце. В таком случае для фиксированного r существует максимально возможная галактическая долгота (аналог максимальной элонгации). Отдельно отметим, что, так как k положительное, $\sin l$ также должен быть положительным, а, значит, $l < 180^\circ$. Выражая $\sin l$, получим:

$$\sin l = \frac{k}{\frac{r_0}{r} - 1}.$$

При этом есть ограничение на $\sin l$:

$$\sin l \leq \frac{r}{r_0}.$$

В результате получаем:

$$\frac{k}{\frac{r_0}{r} - 1} \leq \frac{r}{r_0} \Rightarrow k \leq 1 - \frac{r}{r_0},$$

$$r \leq (1 - k)r_0.$$

Также из условия наблюдаемое облако нейтрального водорода уже находится на плато скоростей, а значит:

$$r \geq R_0$$

Видим, что галактическая долгота монотонно растёт с ростом r для данного случая. Значит, границы для r будут соответствовать граничным галактическим долготам:

$$\sin l_{min} = \frac{k}{\frac{r_0}{R_0} - 1}, \quad \sin l_{max} = \frac{k}{\frac{r_0}{(1-k)r_0} - 1}$$

$$\sin l_{min} = k \frac{R_0}{r_0 - R_0}, \quad \sin l_{max} = 1 - k$$

Итого, имеем ограничения на галактическую долготу для первого случая:

$$14^\circ \leq l \leq 48^\circ$$

Второй случай. Рассмотрим вариант, когда $r > r_0$, то есть облако дальше от центра Галактики, чем Солнце. Здесь у нас нет дополнительных ограничений на l , поэтому ограничения на галактическую долготу будут определяться из ограничений на r . Заметим, что $r_0 / r < 1$, поэтому в данном случае $\sin l < 0$. Итак, из прошлого пункта:

$$\sin l = \frac{k}{\frac{r_0}{r} - 1}.$$

При увеличении r значение $\sin l$ в данном случае монотонно растёт. При этом снизу есть естественное ограничение $\sin l \geq -1$. Заметим, что такая граница снизу не выходит за рамки рассматриваемого случая. Действительно, при $\sin l = -1$ получаем $r = 11.2$ кпк, что больше чем r_0 , а значит именно $\sin l \geq -1$ является нижней границей. Перейдём к оценке сверху:

$$\sin l = \frac{k}{\frac{r_0}{r} - 1} \leq \frac{k}{\frac{r_0}{R} - 1}.$$

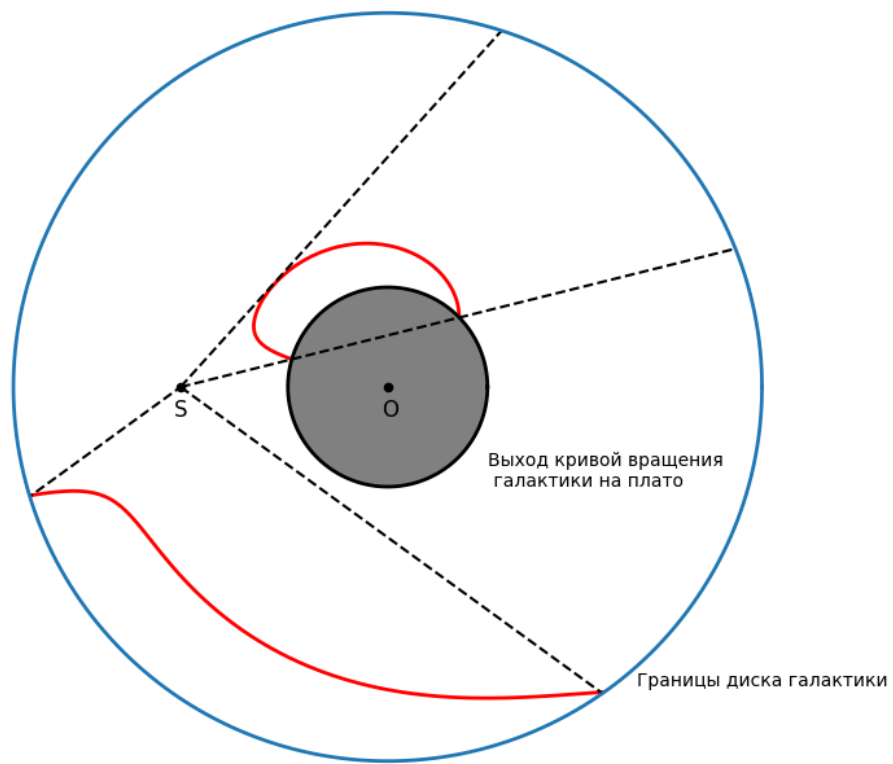
Итого, получаем ограничения на галактическую долготу для второго случая:

$$\sin l_{min} = -1, \quad \sin l_{max} = -k \frac{R}{R - r_0},$$

$$216^\circ \leq l \leq 324^\circ.$$

На рисунке красными линиями обозначены геометрические места точек, где может располагаться облако II для данного k в обоих случаях.

Ответ: $l \in [14^\circ; 48^\circ] \cup [216^\circ; 324^\circ]$.

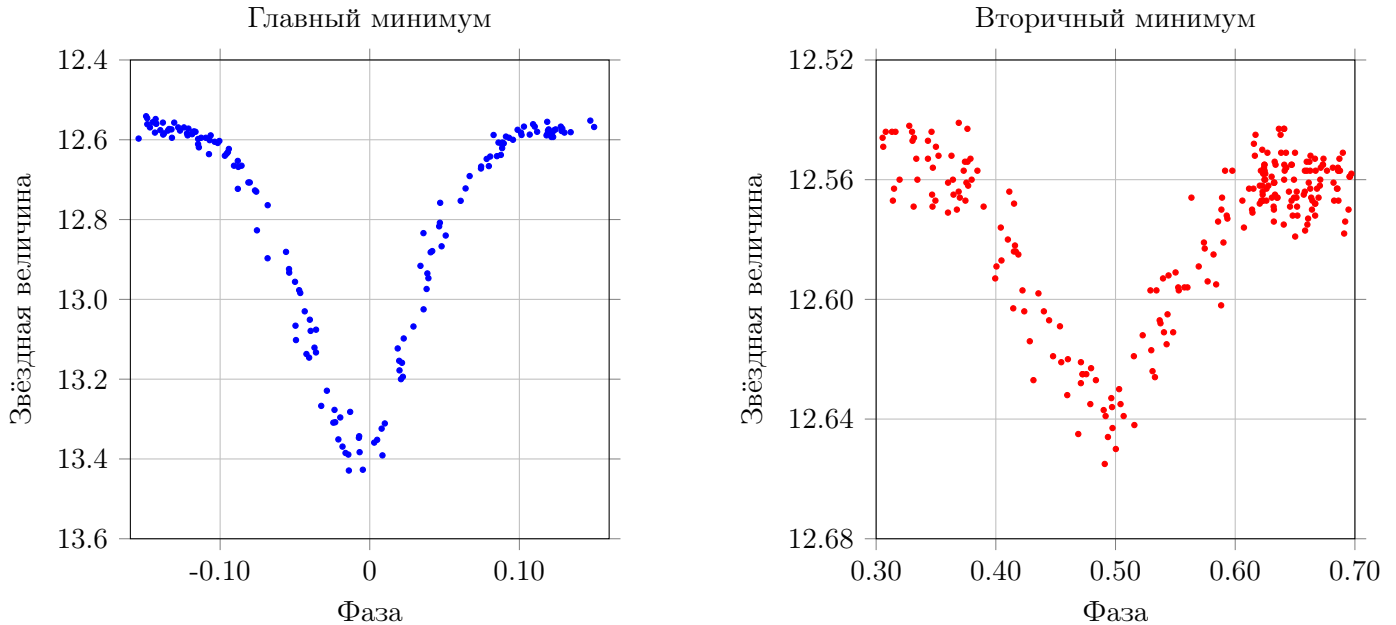


10.4. Звездный градусник

В. Б. Игнатъев, М. В. Кузнецов

Перед вами кривая блеска затменно-переменной звезды с круговыми орбитами. Из спектральных наблюдений известно, что одна из звезд системы полностью аналогична Солнцу. Определите температуру второй звезды.

Потемнением диска к краю и эффектом прогрева пренебречь.



Решение.

Пусть поток от двойной звезды вне затмения равен F_0 , поток в главном минимуме равен F_1 , поток во вторичном минимуме равен F_2 .

В главном минимуме закрывается более горячая звезда. Договоримся, что $T_1 > T_2$. Поскольку по условию орбиты звёзд круговые, площадь перекрытия дисков звезд будет одинакова, обозначим её через S .

Запишем выражение для потока от двойной звезды в минимумах: $F_1 = F_0 - \Delta F_1$, $F_2 = F_0 - \Delta F_2$, где ΔF_1 и ΔF_2 — слагаемые, в которых учитывается вклад излучения от площади S закрываемой звезды с температурами T_1 и T_2 соответственно: $\Delta F_1 \sim \sigma T_1^4 S/r^2$, $\Delta F_2 \sim \sigma T_2^4 S/r^2$ (расстояние r до обеих звёзд считаем одинаковым).

$$\frac{\Delta F_1}{\Delta F_2} = \frac{T_1^4}{T_2^4} = \frac{F_0 - F_1}{F_0 - F_2}.$$

Это выражение можно свести к отношению потоков, и, как следствие, к разнице звездных величин. Разделим и числитель, и знаменатель на F_0

$$\frac{1 - F_1/F_0}{1 - F_2/F_0} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^4$$

Теперь вернемся к графикам, на которых по оси y отложена звездная величина, а не поток. Поэтому нужно провести еще несколько действий. В главном минимуме изменение звездной величины составляет $\Delta m_1 = 0.84^m$, во вторичном минимуме — $\Delta m_2 = 0.09^m$.

Тогда отношение потоков равно

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{-0.4 \cdot 0.84} = 0.46,$$

$$\frac{F_1}{F_0} = 10^{-0.4 \cdot 0.09} = 0.92.$$

Тогда искомое отношение температур

$$\frac{T_1}{T_2} = \sqrt[4]{\frac{1 - 0.46}{1 - 0.92}} \approx 1.6.$$

Нам неизвестно, какой индекс имеет звезда с массой и температурой Солнца. Возможно, это более горячая, а возможно, это более холодная звезда. Рассмотрим оба варианта.

- А.** Звезда типа Солнца – более горячая звезда. Тогда вторая звезда будет иметь температуру 3600 К.
- В.** Звезда типа Солнца – более холодная звезда. Тогда вторая звезда будет иметь температуру 9300 К.

10.5. Ночью надо спать

А. М. Татарников

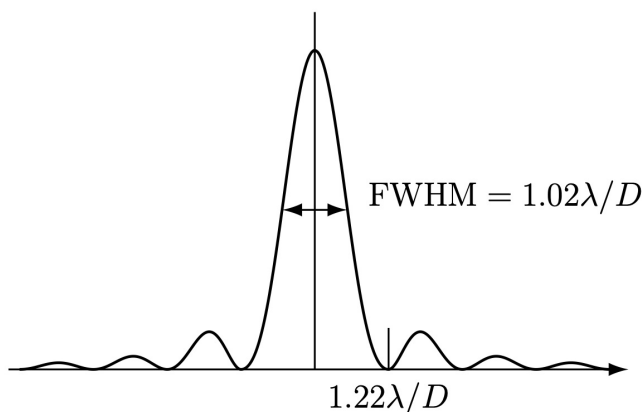
Астроном хотел увидеть звезды на фоне яркого сумеречного неба с помощью своего телескопа диаметром 250 мм и фокусным расстоянием 3 м. При наблюдениях он использовал окуляр, имеющий фокусное расстояние 10 мм и входную полевую диафрагму диаметром 10 мм. Полевая диафрагма установлена в фокальной плоскости объектива и ограничивает поле зрения. Оказалось, что интегральная яркость фона неба, пропускаемого диафрагмой, соответствует яркости звезды 5^m . Определите блеск самой слабой звезды, которую можно увидеть в этот телескоп в этот момент. Наблюдатель перестает видеть звезду, когда поверхностная яркость её изображения становится в 2 раза меньше поверхностной яркости фона неба. Считайте, что: 1) изображение звезды имеет равномерную яркость, 2) угловое разрешение глаза – $1'$, 3) aberrациями и искажениями лучей в атмосфере можно пренебречь.

Решение.

При наблюдениях с окуляром на видимый в телескоп угловой размер звезды влияет несколько факторов. Но в любом случае угловым размером видимого в окуляр диска звезды будет не менее углового разрешения глаза наблюдателя (т.е. $1'$). Увеличение телескопа, плохое качество оптики или атмосферные эффекты могут увеличить видимый размер диска звезды, но не уменьшить его.

Вычислим дифракционное разрешение объектива телескопа. Для этого воспользуемся готовой формулой для визуальных наблюдений (можно использовать общую формулу дифракционного предела, ответ это не изменит)

$$\beta = 140''/D = 0.56'' \quad (3)$$



На рисунке показан профиль яркости дифракционной картины. По критерию Рэлея дифракционное разрешение объектива численно равно радиусу первого темного кольца дифракционной картины от точечного источника. Из рисунка видно, что полуширина профиля (FWHM) примерно равна этой же величине. В условии указано, что изображение звезды имеет равномерную яркость, значит, его можно считать однородным кружком диаметром β .

Разглядывая это изображение с окуляром, астроном будет видеть его в Γ раз большим по угловым размерам (Γ — увеличение телескопа). Вычислим его:

$$\Gamma = F/f = 300, \quad (4)$$

и найдём угловой размер изображения звезды, каким его видит астроном в окуляр:

$$\beta' = \beta \cdot \Gamma \approx 168''. \quad (5)$$

Полученное значение больше углового разрешения глаза. Это значит, что при данном увеличении именно от размера дифракционного изображения звезды зависит возможность ее наблюдения.

Итак, астроном «на пределе» видит звезду на ярком сумеречном фоне, когда от нее приходит в 2 раза меньше света, чем от площадки фона диаметром $\beta = 0.56''$.

Поле зрения телескопа ограничено полевой диафрагмой окуляра диаметром d и составляет

$$\alpha = 206265d/F \approx 688''. \quad (6)$$

Найдем блеск площадки фона неба с угловым диаметром β :

$$m = 2.5 \lg(\alpha/\beta)^2 - 5 \approx 10.4^m. \quad (7)$$

В два раза более слабая звезда будет на 0.75^m слабее. Это соответствует звездной величине $\approx 11.2^m$.

10.6. Конь G2

М. В. Кузнецов, В. Б. Игнатьев

Спектрально-двойная система, удаленная от Солнца на расстояние 150 пк, состоит из звезд спектральных классов K0IV и G2V. Суммарный блеск системы в полосе V составляет 9.09^m , показатель цвета двойной системы $(B - V)_\Sigma = 0.98^m$, а болометрическая поправка для звезды K0IV составляет $BC_{K0IV} = -0.19^m$.

- A. Определите видимую звездную величину и показатель цвета звезды-субгиганта.
- B. Определите разницу показателей цвета для звезд K0V (0.84^m) и K0IV.
- C. Определите болометрическую поправку BC_Σ для всей системы.

Межзвездным поглощением в направлении системы можно пренебречь. Не забудьте воспользоваться справочными данными.

Решение.

Определим абсолютную звездную величину в полосе V для звезды G2V, вспомнив, что к этому классу относится Солнце:

$$M_V = m + 5 - 5 \lg r = -26.78 + 5 - 5 \lg (1/206265) = -21.78 + 5 \lg 206265 = 4.79^m.$$

Тогда видимая звездная величина звезды G2V:

$$V_G = M - 5 + 5 \lg r = 4.79 - 5 + 5 \lg 150 = 10.67^m.$$

Из справочных данных показатель цвета для звезды G2V равен $B - V = 0.65^m$ и, следовательно, видимая величина G2V в полосе B составит $B_G = V_G + (B - V) = 10.67 + 0.65 = 11.32^m$. Найдем видимую звездную величину звезды K0IV из известной общей видимой звездной величины системы:

$$\frac{E_K + E_G}{E_G} = 10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)},$$

$$1 + \frac{E_K}{E_G} = 10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)},$$

$$1 + 10^{-0.4(V_K - V_G)} = 10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)},$$

$$10^{-0.4(V_K - V_G)} = 10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)} - 1,$$

$$V_K = V_G - 2.5 \lg (10^{-0.4(V_\Sigma - V_G)} - 1) = 10.67 - 2.5 \lg (10^{-0.4(9.09 - 10.67)} - 1) = 9.38^m.$$

Определим суммарную звездную величину системы в полосе B:

$$(B - V)_\Sigma = B_\Sigma - V_\Sigma,$$

$$B_\Sigma = V_\Sigma + (B - V)_\Sigma = 9.09 + 0.98^m = 10.07^m.$$

Найдем звездную величину звезды K0IV в полосе B из известных звездных величин всей системы и звезды G2V:

$$\frac{E_K + E_G}{E_G} = 10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)},$$

$$1 + \frac{E_K}{E_G} = 10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)},$$

$$1 + 10^{-0.4(B_K - B_G)} = 10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)},$$

$$10^{-0.4(B_K - B_G)} = 10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)} - 1,$$

$$B_K = B_G - 2.5 \lg(10^{-0.4(B_\Sigma - B_G)} - 1) = 11.32 - 2.5 \lg(10^{-0.4(10.07 - 11.32)} - 1) = 10.49^m.$$

Найдем показатель цвета для звезды K0IV:

$$(B - V)_K = B_K - V_K = 10.49 - 9.38 = 1.11^m$$

Найдем разницу показателей цвета K0IV и K0V:

$$\Delta(B - V) = (B - V)_{IV} - (B - V)_V = 1.11 - 0.84 = 0.27^m$$

Определим болометрическую величину звезды G2V:

$$Bol_G = M - 5 + 5 \lg r = 4.72 - 5 + 5 \lg 150 = 10.60^m,$$

$$BC_G = Bol_G - V_G = 10.60^m - 10.67^m = -0.07^m.$$

Определим болометрическую величину звезды K0IV:

$$Bol_K = V_K + BC_K = 9.38 - 0.19 = 9.19^m.$$

Определим суммарную болометрическую звездную величину системы:

$$\frac{E_K + E_G}{E_G} = 10^{-0.4(Bol_K - Bol_G)},$$

$$Bol_\Sigma - Bol_G = -2.5 \lg \left(\frac{E_K + E_G}{E_G} \right),$$

$$Bol_\Sigma = Bol_G - 2.5 \lg(1 + 10^{-0.4(Bol_K - Bol_G)}) = 10.60 - 2.5 \lg(1 + 10^{-0.4(9.19 - 10.60)}) = 8.93^m.$$

Вычислим болометрическую поправку для двойной системы:

$$BC_\Sigma = Bol_\Sigma - V_\Sigma = 8.93 - 9.09 = -0.16^m.$$

Ответ:

A. $(B - V)_K = 1.11^m.$

B. $\Delta(B - V) = 0.27^m.$

C. $BC_\Sigma = -0.16^m.$

Содержание

11.1. Я вам разрешаю	2
11.2. Потенциальная задача	4
11.3. Двойной форсаж	7
11.4. Радиоактивное эхо	9
11.5. Вырожденная задача	11
11.6. Двуликий Янус	13

11.1. Я вам разрешаю

М.В.Костина

Тесная двойная звезда состоит из одинаковых компонент с массами $15 \mathcal{M}_{\odot}$ каждая, движущихся по круговым орбитам на расстоянии 0.74 а.е. друг от друга. Известно, что обе звезды являются звездами Главной последовательности и обе вращаются вокруг своей оси со скоростью 36 км/с на экваторе. Оцените минимально необходимую спектральную разрешающую силу спектрографа, которая потребуется для получения кривых лучевых скоростей компонент при наблюдении в линии гелия с длиной волны 5876 \AA . Уточним, что спектральная разрешающая сила — это величина $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda}$, равная отношению длины волны наблюдения к минимальной разности длин волн, которые еще можно различить на данном спектрографе.

Решение. За счет орбитального движения звезд линии в их спектрах периодически отклоняются от положения, соответствующего центру масс системы.

Для построения кривых лучевых скоростей компонент системы по отдельности нужно, чтобы по спектру можно было измерять отклонения центров спектральных линий каждой звезды. Это отклонение согласно эффекту Доплера равно:

$$\Delta\lambda = \lambda \frac{v}{c},$$

где v — это лучевая скорость.

Видно, что можно перевести разрешающую силу в скорости:

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = \frac{\lambda}{\lambda \cdot v/c} = \frac{c}{v}.$$

Так как требуется оценить минимальную разрешающую силу, то нужно, чтобы можно было измерить $\Delta\lambda$, соответствующее хотя бы максимально возможным лучевым скоростям звезд.

Относительная орбитальная скорость равна

$$v_{\text{отн}} = \sqrt{\frac{G \cdot 2\mathcal{M}}{r}},$$

где $r = 0.74$ а.е. — радиус относительной орбиты, а $2\mathcal{M} = 30 \mathcal{M}_{\odot}$ — суммарная масса системы.

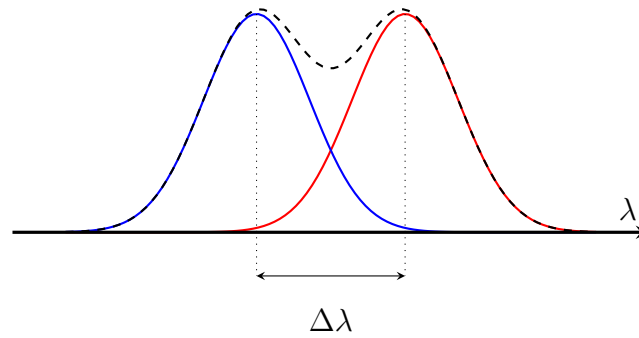
Поставив числовые данные, получаем $v_{\text{отн}} \approx 1.9 \cdot 10^2$ км/с. Отсюда скорость каждой из компонент относительно центра масс равна $v = v_{\text{отн}}/2 = 95$ км/с.

Казалось бы, необходимую разрешающую силу можно оценить так:

$$R = \frac{c}{v} \approx 3000$$

(формально четыре значащих цифры тут не получить, но по устоявшейся традиции спектральную разрешающую силу принято записывать таким образом).

Однако нужно учесть, что за счет вращения звезд и за счет теплового движения газа в их атмосферах линии в их спектрах расширяются и становятся похожи на то, что на рисунке.



При большой ширине близко расположенные линии начинают перекрываться, поэтому чтобы разрешить их потребуется бóльшая разрешающая сила.

Приблизительно можно оценить ширину спектральной линии по формуле эффекта Доплера для соответствующих скоростей.

Оценим скорость теплового движения. Так как требуется разрешение линии гелия, то нужно оценить характерную скорость движения атомов гелия в атмосфере звезд. Температуру звезды Главной последовательности с массой $15 M_{\odot}$ можно оценить как $T = 3 \cdot 10^4$ К. Скорость атомов гелия можно оценить как

$$v_{\text{тепл}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}},$$

где \mathcal{R} — универсальная газовая постоянная, μ — молярная масса гелия.

Подставляя числа, получаем $v_{\text{тепл}} = 11$ км/с.

И вращение, и тепловое движение приводят к расширению спектральной линии одинаковым образом, поэтому можно оценить «эффективную скорость» для оценки ширины линии. Наиболее разумная идея — вычислить среднеквадратичное двух скоростей:

$$v_{\text{эфф}} = \sqrt{v_{\text{тепл}}^2 + v_{\text{вр}}^2} \approx 38 \text{ км/с.}$$

На соответствующую $v \Delta\lambda$ линия будет расширяться в обе стороны от центральной длины волны. Если нужно, чтобы линии разрешались, расстояние между их центрами должно быть больше удвоенной v .

Орбитальная скорость звезд больше, чем удвоенная v примерно на $\Delta v = 20$ км/с, поэтому можно ожидать, что при разрешающей силе, соответствующей Δv , можно будет построить кривые лучевых скоростей каждого компонента. Отсюда

$$R = \frac{c}{\Delta v} \approx 15000.$$

11.2. Потенциальная задача

А.В.Веселова

Эллиптическая галактика обладает сферической симметрией, а ее гравитационный потенциал задается выражением

$$U(r) = -\frac{GM}{r+c},$$

где M — полная масса галактики, $c = 1$ кпк. Известно, что на круговой орбите радиуса 8 кпк скорость равна 180 км/с.

- А. Определите полную массу галактики.
- В. Представим, что с расстояния R на центр галактики с нулевой начальной скоростью радиально падает частица. Чему будет равна ее скорость, когда она достигнет центра галактики? Вычислите эту скорость для случая $R = 10c$.
- С. Пусть звезда движется по близкой к круговой орбите радиуса $r_0 = 8$ кпк; $\delta r(t)$, $\delta\theta(t)$ — отклонения в плоскости орбиты по радиусу и по азимуту. Оцените период колебаний звезды вдоль радиуса галактики.
- Д. Определите, при каких значениях r_0 круговая орбита звезды радиуса r_0 является устойчивой.

Решение.

- А. Определим зависимость круговой скорости от расстояния до центра галактики. Для этого на круговой орбите приравняем гравитационное ускорение и центростремительное и учитывая, что сила связана с производной потенциала по расстоянию:

$$\frac{GM}{(r+c)^2} = \frac{V^2}{r}.$$

Орбита плоская, расстояние от центра галактики равно галактоосевому расстоянию: мы просто можем рассматривать плоскость орбиты как плоскость симметрии потенциала.

Получаем выражение для массы:

$$M = \frac{V^2(r+c)^2}{Gr} = \frac{(1.8 \cdot 10^5 \text{ м/с})^2 (9 \cdot 3.1 \cdot 10^{19} \text{ м})^2}{6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{с}^2/\text{кг} \cdot 8 \cdot 3.1 \cdot 10^{19} \text{ м}} = 1.5 \cdot 10^{41} \text{ кг} = 7.6 \cdot 10^{10} M_{\odot}.$$

- В. Рассмотрим прямолинейное падение с нулевой начальной скоростью с $r(0) = R$, $r(t) \rightarrow 0$. Энергия в расчете на единицу массы составляет

$$E = \frac{\dot{r}^2}{2} + U(r) = U(R) = -\frac{GM}{R+c}.$$

Скорость падения

$$\dot{r} = -\sqrt{2(E - U(r))} = -\sqrt{2GM \left(\frac{1}{r+c} - \frac{1}{R+c} \right)}.$$

В центре галактики скорость составит

$$|\dot{r}(0)| = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{R+c} \right)}.$$

При $R = 10c$:

$$|\dot{r}(0)| = \sqrt{2GM \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{10c+c} \right)} = \sqrt{2GM \cdot \frac{10}{11c}} = 7.7 \cdot 10^2 \text{ км/с}.$$

С. Запишем уравнения движения в плоскости орбиты для начальной круговой орбиты радиуса r_0 :

$$\begin{cases} \frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{dU}{dr}\Big|_{r_0} + \frac{V^2}{r_0}, \\ \frac{d\theta}{dt} = \omega_0. \end{cases}$$

В сферически-симметричном потенциале момент импульса J , равный Vr_0 , сохраняется, используем это для записи соотношения для отклонения по радиусу на близкой к круговой орбите.

$$\frac{d^2(r_0 + \delta r)}{dt^2} = -\frac{dU}{dr}\Big|_{r_0 + \delta r} + \frac{J^2}{(r_0 + \delta r)^3},$$

используем приближение $\frac{dU}{dr}\Big|_{r_0 + \delta r} = \frac{dU}{dr}\Big|_{r_0} + \frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} \cdot \delta r$:

$$\frac{d^2 r_0}{dt^2} + \frac{d^2 \delta r}{dt^2} \approx -\frac{dU}{dr}\Big|_{r_0} - \frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} \cdot \delta r + \frac{J^2}{r_0^3} \cdot \left(1 - 3\frac{\delta r}{r_0}\right).$$

Вычтем первое уравнение системы круговой орбиты из полученного соотношения, останется выражение

$$\frac{d^2 \delta r}{dt^2} \approx -\frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} \cdot \delta r - 3\frac{J^2}{r_0^4} \cdot \delta r \Rightarrow \frac{d^2 \delta r}{dt^2} + \left(\frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} + 3\frac{J^2}{r_0^4}\right) \cdot \delta r = 0.$$

Это уравнение колебаний, коэффициент перед δr — квадрат частоты ω . Вычислим вторую производную:

$$\frac{d^2 U}{dr^2}\Big|_{r_0} = \frac{d^2}{dr^2} \left(-\frac{GM}{r+c}\right) = -\frac{2GM}{(r+c)^3}.$$

Далее, выразим J через производную потенциала:

$$J = Vr_0 = \sqrt{\frac{GM r_0}{(r_0 + c)^2}} \cdot r_0$$

и соберем выражение для квадрата частоты:

$$\omega^2 = -\frac{2GM}{(r_0 + c)^3} + 3\frac{GM}{r_0(r_0 + c)^2} = GM \cdot \frac{r_0 + 3c}{r_0(r_0 + c)^3} = \frac{GM}{(r_0 + c)^3} \cdot \left(1 + \frac{3c}{r_0}\right).$$

Подставим численные значения:

$$\omega^2 = \frac{6.67 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{с}^2/\text{кг} \cdot 1.5 \cdot 10^{41} \text{ кг}}{(9 \cdot 3.1 \cdot 10^{19} \text{ м})^3} \cdot \left(1 + \frac{3 \cdot 1}{8}\right) = 6.3 \cdot 10^{-31}/\text{с}^2,$$

$$\omega = 8 \cdot 10^{-16}/\text{с} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 7.9 \cdot 10^{15} \text{ с} = 2.5 \cdot 10^8 \text{ лет.}$$

Д. Эффективный потенциал в случае вращения имеет вид

$$U_{\text{эфф}}(r) = U(r) + \frac{J^2}{2r^2} = -\frac{GM}{r+c} + \frac{J^2}{2r^2}.$$

На круговой орбите радиуса r_0 силы уравниваются друг друга, из чего следует

$$U'_{\text{eff}}(r_0) = 0 \Rightarrow \frac{GM}{(r_0 + c)^2} = \frac{J^2}{r_0^3} \Rightarrow J^2 = \frac{GM r_0^3}{(r_0 + c)^2}.$$

Определим условие, при котором круговая орбита будет устойчивой: она должна соответствовать «локальной потенциальной яме», при этом $U''_{\text{eff}}(r_0) > 0$.

Вторая производная имеет вид

$$U''_{\text{eff}}(r) = -\frac{2GM}{(r + c)^3} + \frac{3J^2}{r^4}.$$

Для круговой орбиты

$$\begin{aligned} U''_{\text{eff}}(r_0) &= -\frac{2GM}{(r_0 + c)^3} + \frac{3}{r_0^4} \cdot \frac{GM r_0^3}{(r_0 + c)^2} = \\ &= GM \left(-\frac{2}{(r_0 + c)^3} + \frac{3}{r_0(r_0 + c)^2} \right) = \frac{GM}{(r_0 + c)^2} \left(-\frac{2}{r_0 + c} + \frac{3}{r_0} \right). \end{aligned}$$

Для выполнения условия устойчивости нужно выполнение неравенства

$$-\frac{2}{r_0 + c} + \frac{3}{r_0} > 0 \Rightarrow \frac{3}{r_0} > \frac{2}{r_0 + c} \Rightarrow 3(r_0 + c) > 2r_0 \Rightarrow r_0 + 3c > 0.$$

Так как $r_0 > 0$ и $c > 0$, неравенство выполняется всегда.

Таким образом, в выбранном потенциале все круговые орбиты устойчивы.

11.3. Двойной форсаж

М.И. Волобуева

Наблюдатель находится в Северном полушарии Земли на широте φ .

- А.** Найдите склонение звезд, для которых разность максимального и минимального значения астрономического азимута превышает разность максимального и минимального значения зенитного расстояния ровно в 2 раза (включая путь под горизонтом).
- В.** Для каких северных широт такие звезды существуют?

Решение. Заметим, что искомые звезды не могут кульминировать к югу от зенита: в таком случае диапазон изменения азимута будет составлять $\Delta A = 360^\circ$, а зенитное расстояние должно изменяться на $\Delta z = 180^\circ$, то есть звезда должна проходить и через зенит, и через надир. Такое возможно только для экваториальных звезд при наблюдении с земного экватора, но в этом случае не выполняется первая часть условия: звезды движутся вдоль первого вертикала и их азимуты принимают только два значения: 90° и 270° . Таким образом, делаем вывод, что $\delta \geq \varphi$ и верхняя кульминация происходит к северу от зенита.

Итак, суточная параллель звезды целиком лежит в северной полусфере. Проведем два круга высоты, являющимися касательными к суточной параллели. Очевидно, что в точках касания азимут звезды принимает экстремальные значения (минимальное в западной полусфере и максимальное в восточной). Также заметим, что отрезок, проведенный из Северного полюса мира в точку касания, будет перпендикулярен соответствующему кругу высоты. Иными словами, параллактический треугольник, образованный зенитом, Северным полюсом мира и точкой касания, является прямоугольным. Тогда по теореме синусов получаем:

$$\frac{\sin(\Delta A/2)}{\sin(90^\circ - \delta)} = \frac{\sin 90^\circ}{\sin(90^\circ - \varphi)},$$

$$\sin(\Delta A/2) = \frac{\cos \delta}{\cos \varphi}.$$

Очевидно, что минимальное и максимальное значения зенитного расстояния достигаются в кульминациях, при этом $\Delta z = 2 \times (90^\circ - \delta) = 180^\circ - 2\delta$. Отсюда получаем

$$\Delta A = 2\Delta z,$$

$$\arcsin \frac{\cos \delta}{\cos \varphi} = 180^\circ - 2\delta,$$

$$\frac{\cos \delta}{\cos \varphi} = \sin(180^\circ - 2\delta) = \sin 2\delta = 2 \sin \delta \cos \delta,$$

$$\sin \delta = \frac{1}{2 \cos \varphi}. \quad (1)$$

Выражение (1) имеет смысл при $\cos \varphi > 0.5$, поэтому $\varphi < 60^\circ$.

Также отметим, что кульминация к северу от зенита означает, что $\Delta A \leq 180^\circ$, а значит,

$$\Delta z \leq 90^\circ,$$

$$180^\circ - 2\delta \leq 90^\circ,$$

$$\delta \geq 45^\circ,$$

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \frac{1}{2 \cos \varphi} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \cos \varphi &\leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \varphi &\geq 45^\circ.\end{aligned}$$

Теперь можно сформулировать окончательный ответ:

A. $\delta = \arcsin \frac{1}{2 \cos \varphi},$

B. $45^\circ \leq \varphi < 60^\circ.$

Существует также вырожденное решение $\Delta z = \Delta A = 0$, соответствующее Северному полюсу мира и существующее для всех широт $\varphi \in [0^\circ; 90^\circ)$.

11.4. Радиоактивное эхо

А.Н.Акинъщиков

После вспышки сверхновой ее светимость некоторое время поддерживается радиоактивным подогревом выброшенного вещества. Основную роль играет цепочка распадов



Периоды полураспада никеля и кобальта $t_{1/2}^{(\text{Ni})} = 6.1$ суток и $t_{1/2}^{(\text{Co})} = 77$ суток. Считайте, что один распад ${}^{56}\text{Ni}$ передает выбросу в среднем $E_{\text{Ni}} = 1.7$ МэВ, а один распад ${}^{56}\text{Co}$ — $E_{\text{Co}} = 3.7$ МэВ.

А. Найдите момент времени после вспышки, когда мгновенная мощность нагрева от распадов ${}^{56}\text{Co}$ становится равной мощности нагрева от распадов ${}^{56}\text{Ni}$.

В. Через 20 суток после вспышки болометрическая светимость сверхновой равна $L = 1.0 \cdot 10^{36}$ Вт. Считая, что к этому моменту почти вся мощность радиоактивного нагрева выходит в излучение, оцените начальную массу синтезированного при вспышке никеля.

Решение. Обозначим распадные константы:

$$\lambda_{\text{Ni}} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}^{(\text{Ni})}}, \quad \lambda_{\text{Co}} = \frac{\ln 2}{t_{1/2}^{(\text{Co})}}.$$

Если в начальный момент было N_0 ядер никеля и не было кобальта, то

$$N_{\text{Ni}}(t) = N_0 e^{-\lambda_{\text{Ni}} t}.$$

Для дочернего кобальта в цепочке распадов:

$$N_{\text{Co}}(t) = N_0 \frac{\lambda_{\text{Ni}}}{\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}} (e^{-\lambda_{\text{Co}} t} - e^{-\lambda_{\text{Ni}} t}).$$

Мощности нагрева:

$$P_{\text{Ni}} = \lambda_{\text{Ni}} N_{\text{Ni}} E_{\text{Ni}}, \quad P_{\text{Co}} = \lambda_{\text{Co}} N_{\text{Co}} E_{\text{Co}}.$$

Условие равенства мощностей:

$$\lambda_{\text{Ni}} N_{\text{Ni}} E_{\text{Ni}} = \lambda_{\text{Co}} N_{\text{Co}} E_{\text{Co}}.$$

После подстановки и сокращения N_0 и λ_{Ni} :

$$E_{\text{Ni}} = \frac{\lambda_{\text{Co}} E_{\text{Co}}}{\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}} (e^{(\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}) t} - 1).$$

Отсюда

$$e^{(\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}) t} = 1 + \frac{E_{\text{Ni}} (\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}})}{\lambda_{\text{Co}} E_{\text{Co}}}.$$

Подставим числа в сутках ($\ln 2 \approx 0.693$)

$$\lambda_{\text{Ni}} = \frac{0.693}{6.1} \approx 0.114 \text{ суток}^{-1}, \quad \lambda_{\text{Co}} = \frac{0.693}{77} \approx 9.00 \cdot 10^{-3} \text{ суток}^{-1}.$$

Тогда

$$\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}} \approx 0.105 \text{ суток}^{-1},$$

$$1 + \frac{1.7 \cdot 0.105}{(9.0 \times 10^{-3}) \cdot 3.7} \approx 1 + 5.36 = 6.36.$$

Значит,

$$(\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}) t \approx \ln 6.36 \approx 1.85, \quad t \approx \frac{1.85}{0.105} \approx 17.6 \text{ суток.}$$

Таким образом, мощность нагрева от кобальта сравнивается с никелевой примерно через 18 суток.

Теперь оценим массу никеля по светимости через 20 суток. Удобно перейти к секундам:

$$t = 20 \cdot 86400 \text{ с} = 1.728 \times 10^6 \text{ с.}$$

Тогда

$$\lambda_{\text{Ni}} = \frac{\ln 2}{6.1 \cdot 86400} \approx 1.31 \times 10^{-6} \text{ с}^{-1}, \quad \lambda_{\text{Co}} = \frac{\ln 2}{77 \cdot 86400} \approx 1.04 \times 10^{-7} \text{ с}^{-1}.$$

Получаем

$$N_{\text{Ni}}(20 \text{ суток}) = N_0 e^{-\lambda_{\text{Ni}} t} \approx 0.104 N_0,$$

$$N_{\text{Co}}(20 \text{ суток}) = N_0 \frac{\lambda_{\text{Ni}}}{\lambda_{\text{Ni}} - \lambda_{\text{Co}}} (e^{-\lambda_{\text{Co}} t} - e^{-\lambda_{\text{Ni}} t}) \approx 0.821 N_0.$$

Энергия одного распада в джоулях:

$$E_{\text{Ni}} = 1.7 \times 10^6 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \approx 2.7 \times 10^{-13} \text{ Дж},$$

$$E_{\text{Co}} = 3.7 \times 10^6 \cdot 1.6 \times 10^{-19} \approx 5.9 \times 10^{-13} \text{ Дж}.$$

Полная мощность нагрева в момент наблюдения:

$$L = P_{\text{Ni}} + P_{\text{Co}} = \lambda_{\text{Ni}} N_{\text{Ni}} E_{\text{Ni}} + \lambda_{\text{Co}} N_{\text{Co}} E_{\text{Co}}.$$

Подставляя найденные доли:

$$L = N_0 (\lambda_{\text{Ni}} \cdot 0.104 \cdot E_{\text{Ni}} + \lambda_{\text{Co}} \cdot 0.821 \cdot E_{\text{Co}}).$$

Численно

$$\lambda_{\text{Ni}} \cdot 0.104 \cdot E_{\text{Ni}} \approx 3.7 \times 10^{-20} \text{ Вт}$$

и

$$\lambda_{\text{Co}} \cdot 0.821 \cdot E_{\text{Co}} \approx 5.0 \times 10^{-20} \text{ Вт}$$

на одно начальное ядро. Итак,

$$L \approx 8.7 \times 10^{-20} N_0.$$

При $L = 1.0 \cdot 10^{36} \text{ Вт}$

$$N_0 \approx \frac{1.0 \times 10^{36}}{8.7 \times 10^{-20}} \approx 1.15 \times 10^{55}.$$

Обозначив 1 а.е.м. как u (если ее значение неизвестно, можно в качестве «замены» воспользоваться массой протона, с интересующей нас точностью результат от этого не изменится), получаем, что масса никеля

$$\mathfrak{M}_{\text{Ni}} = 56uN_0 \approx 56 \cdot 1.66 \times 10^{-27} \cdot 1.15 \times 10^{55} \approx 1.1 \times 10^{30} \text{ кг} \approx 0.54 \mathfrak{M}_{\odot}.$$

Тем самым начальная масса ^{56}Ni оказывается около $0.5 \mathfrak{M}_{\odot}$.

11.5. Вырожденная задача

П.А. Тараканов

Из-за того, что электронная компонента вещества белых карликов сильно вырождена, уравнение состояния этого вещества является баротропным (давление является только функцией плотности, $p = p(\rho)$).

- А.** Известно, что для маломассивных белых карликов уравнение состояния вещества имеет вид $p = K_1 \cdot \rho^{5/3}$, где $K_1 = \text{const}$. Зная это, найдите зависимость радиуса таких белых карликов от массы, если известно, что карлик с массой $0.2 M_\odot$ имеет радиус $0.02 R_\odot$.
- В.** При росте массы белых карликов уравнение состояния начинает меняться и в пределе превращается в $p = K_2 \cdot \rho^{4/3}$, где $K_2 = \text{const}$. Исходя из этого утверждения, докажите, что в предельном случае масса белых карликов перестает зависеть от радиуса и становится фиксированной (т.е. докажите существование предела Чандрасекара).

Решение. Гипотетически можно записать для белого карлика уравнение гидростатического равновесия, подставить в него имеющееся уравнение состояния вещества, связать распределение плотности вдоль радиуса с распределением массы и получить дифференциальное уравнение второго порядка (вообще говоря, являющееся уравнением Пуассона, а в данном частном случае называемое уравнением Лейна – Эмдена), обезразмерить задачу и найти искомую связь между массой и радиусом белого карлика (в процессе, правда, придется некоторые безразмерные константы найти численно), повторив эту процедуру два раза для двух разных уравнений состояния. Но это хорошая курсовая работа для студента примерно 3 курса, собирающегося стать астрофизиком-теоретиком, а для решения задач на олимпиаде школьников такие методы явно непригодны.

Поэтому пойдем по более простому пути, обратив внимание на два обстоятельства. Во-первых, в первом из двух вопросов дана пара конкретных значений массы и радиуса для маломассивного карлика (что должно навести на мысль о том, что можно найти общий вид зависимости между массой и радиусом для таких карликов, а потом «отмасштабировать» его по одной данной в условии паре значений), во-вторых, количество величин, которые могут войти в эту зависимость, невелико, что позволяет воспользоваться для ее получения методом размерностей. В самом деле, в выражение для связи массы M и радиуса R белого карлика могут входить еще всего лишь две размерных величины — гравитационная постоянная G и коэффициент K (один из двух) из уравнения состояния. Тогда должна существовать некоторая комбинация этих величин в разных степенях, являющаяся безразмерной.

Запишем уравнения состояния для обоих рассматриваемых случаев в виде $p = K\rho^\alpha$ и найдем размерности каждой из четырех величин, используя стандартные обозначения: L для размерности длины, M — массы и T — времени. Тогда

$$\begin{cases} [M] &= M \\ [R] &= L \\ [G] &= L^3 \cdot M^{-1} \cdot T^{-2} \\ [K] &= \frac{M \cdot L}{T^2 \cdot L^2} \cdot \frac{L^{3\alpha}}{M^\alpha} = M^{1-\alpha} L^{3\alpha-1} T^{-2} \end{cases}$$

Из полученных размерностей сразу можно сделать вывод, что гравитационная постоянная и коэффициент K могут встретиться в безразмерной комбинации только в виде отношения G/K — это единственный способ «уничтожить» размерность времени. Поэтому упростим задачу и заменим их на объединенный параметр $Z = G/K$, размерность которого $[Z] = L^{4-3\alpha} M^{\alpha-2}$.

Тогда для получившихся трех величин должна существовать безразмерная комбинация вида $\mathfrak{M}^a R^b Z^c$. Запишем ее размерность

$$[\mathfrak{M}^a R^b Z^c] = M^a L^b L^{(4-3\alpha)c} M^{(\alpha-2)c} = L^0 M^0,$$

откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} a + (\alpha - 2) \cdot c = 0 \\ b + (4 - 3\alpha) \cdot c = 0 \end{cases}$$

У нее бесконечно много решений, но безразмерная комбинация в произвольной степени остается безразмерной, поэтому положим, например, $c = -1$ (поскольку очевидно, что $c = 0$ приводит к тривиальному и бесполезному для нас решению, а в остальном выбирать конкретное значение мы можем так, чтобы было удобнее). Тогда

$$\begin{cases} a = \alpha - 2 \\ b = 4 - 3\alpha \end{cases}$$

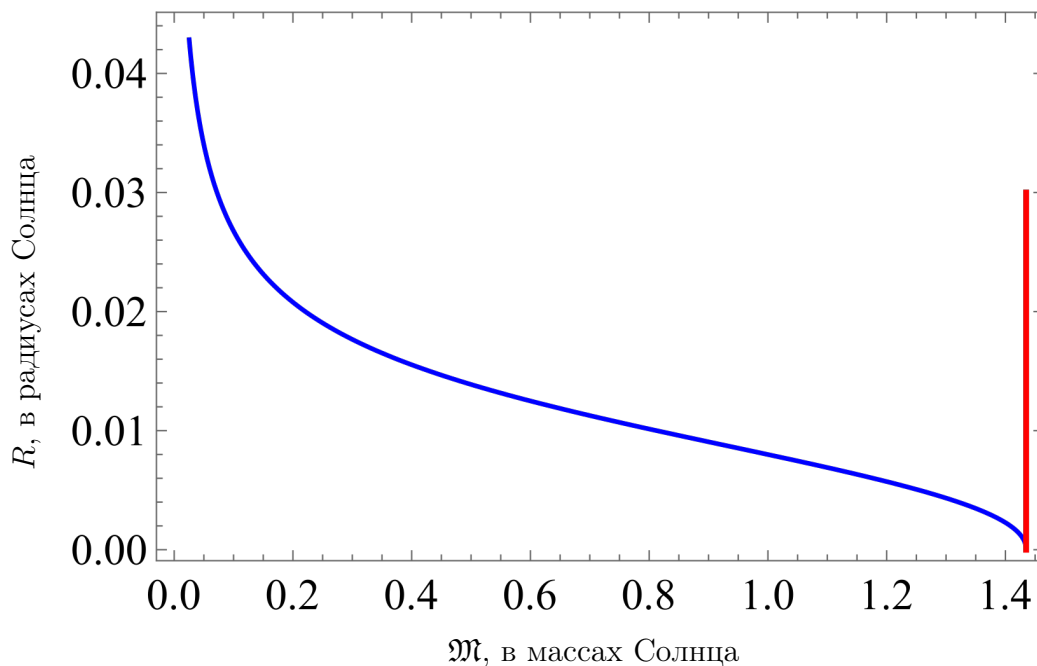
Теперь займемся рассмотрением отдельных случаев. Если нас интересуют маломассивные белые карлики, то $\alpha = 5/3$. Тогда $a = -1/3$ и $b = -1$, откуда получаем, что $R \propto \mathfrak{M}^{-1/3}$ (параметр Z — константа, хоть и размерная). С учетом известной опорной точки записываем зависимость как:

$$\frac{R}{0.02 R_{\odot}} = \left(\frac{\mathfrak{M}}{0.2 \mathfrak{M}_{\odot}} \right)^{-1/3}$$

или, немного упростив ее, в виде

$$R = 1.2 \cdot 10^{-2} \cdot (\mathfrak{M}/\mathfrak{M}_{\odot})^{-1/3} R_{\odot}.$$

Теперь займемся предельным случаем (соответствующем ультрарелятивистскому вырожденному газу). Для него $\alpha = 4/3$, и тогда $a = -2/3$, а вот $b = 0$. Это означает, что из искомого соотношения «выпала» зависимость от массы. В предельном случае радиус стремится к нулю, а масса не меняется, что приводит к зависимости «масса – радиус», изображенной на рисунке ниже.



Значение массы, формально соответствующее пределу при $R \rightarrow 0$, и называется пределом Чандрасекара, $\mathfrak{M} \approx 1.4 \mathfrak{M}_{\odot}$.

11.6. Дзуликий Янус

Н.Е.Кондратьев

Вокруг Сатурна по круговым орбитам, расположенным в одной плоскости, вращаются два спутника — Янус и Эпиметей. Интересной особенностью этих спутников является то, что расстояние между их орбитами составляет всего около 50 км, и раз в 4 года за счет гравитационного взаимодействия между ними они меняются орбитами, так что внутренний спутник становится внешним, а внешний — внутренним.

А. Оцените большие полуоси орбит и периоды обращения спутников вокруг Сатурна.

В. Оцените минимально возможное расстояние между спутниками.

Массы Сатурна, Януса и Эпиметея равны $5.7 \cdot 10^{26}$ кг, $1.9 \cdot 10^{18}$ кг и $5.3 \cdot 10^{17}$ кг соответственно. Можно считать, что во время взаимодействия орбиты обоих спутников остаются круговыми.

Решение. Заметим, что 50 км — это очень мало. Большие полуоси орбит спутников не могут быть меньше радиуса Сатурна, который равен $6 \cdot 10^4$ км, что много больше 50 км. Это значит, что параметры орбит спутников будут отличаться очень слабо. В ответе на первый вопрос следует указать совпадающие большие полуоси и периоды обращения, так как их разницей можно пренебречь по сравнению с точностью вычислений.

Пусть период обращения и большая полуось орбиты одного спутника равны T и a , а второго — $T + \Delta T$ и $a + \Delta a$ соответственно. По условию $\Delta a = 50$ км.

Из III закона Кеплера

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM_c}, \quad \frac{(T + \Delta T)^2}{4\pi^2} = \frac{(a + \Delta a)^3}{GM_c}.$$

Воспользуемся малостью Δa и ΔT и формулой $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, и получим

$$\frac{T^2(1 + 2\frac{\Delta T}{T})}{4\pi^2} = \frac{a^3(1 + 3\frac{\Delta a}{a})}{GM_c},$$

$$2 \cdot \frac{\Delta T}{T} = 3 \cdot \frac{\Delta a}{a}.$$

Здесь и далее в аналогичных ситуациях можно получать подобные соотношения и другим путем. Запишем III закон Кеплера

$$\frac{T^2}{4\pi^2} = \frac{a^3}{GM_c}$$

и сосчитаем дифференциал обеих частей равенства. Получим

$$\frac{2TdT}{4\pi^2} = \frac{3a^2da}{GM_c}.$$

Теперь, разделив это равенство на предыдущее, получаем

$$\frac{2dT}{T} = \frac{3da}{a},$$

что, поскольку $\Delta T \approx dT$ и $\Delta a \approx da$, дает тот же результат.

Каждые 4 года спутники меняются орбитами, то есть каждые 4 года они подходят близко друг к другу. Это значит, что синодический период спутников примерно равен 4 годам.

Свяжем его с их сидерическими периодами. Воспользуемся той же самой формулой для малого x при $n = -1$:

$$\frac{1}{T_{\text{син}}} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T + \Delta T} \approx \frac{1}{T} - \frac{1}{T} \left(1 - \frac{\Delta T}{T}\right) = \frac{\Delta T}{T^2}.$$

Выразим ΔT и T через Δa и a .

$$T_{\text{син}} = T \cdot \frac{T}{\Delta T} = T \cdot \frac{2a}{3\Delta a} = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_c}} \cdot \frac{2a}{3\Delta a},$$

$$a^5 = \frac{9}{4} \cdot GM_c \cdot (\Delta a)^2 \cdot \left(\frac{T_{\text{син}}}{2\pi}\right)^2.$$

Подставляя данные, получим $a \approx 154$ тыс. км. Это соответствует периоду $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 a^3}{GM_c}} = 0.7$ сут.

Теперь ответим на второй вопрос задачи. Снова заметим, что 50 км — это очень мало. Учитывая массу тел, их радиус примерно равен $\sqrt[3]{\frac{3}{4\pi} \frac{M}{\rho}} \approx 60$ км, а диаметр, соответственно, в 2 раза больше. Тела не могут подходить друг к другу на расстояние, хотя бы сравнимое с их размером — иначе колебания параметров их орбит, вызванные гравитационным взаимодействием с другими телами Солнечной системы, приводили бы к столкновениям Януса и Эпиметей друг с другом. Таким образом, $\Delta a \ll r_{\text{min}}$ и мы снова можем считать, что тела движутся по одной орбите. Более того, тела можно считать точечными, то есть пренебречь их размерами и формой.

С другой стороны, сами тела не очень массивные, и существенное изменение больших полуосей их орбит происходит только в то время, когда они близки друг к другу. Будем считать, что за пределами некоторого $r_{\text{max}} \ll a$ Янус и Эпиметей не взаимодействуют друг с другом.

Из сделанных выше предположений получаем, что изменение больших полуосей орбит происходит только за счет изменения модуля скоростей спутников, но не их направления. Так как орбиты следует считать круговыми, то в каждый момент времени скорости остаются направленными перпендикулярно направлению на Сатурн.

Здесь вступает в силу известный факт, что сообщение телу энергии (попытка его ускорить) приводит к уменьшению его скорости, и наоборот. Действительно, из теоремы о вириале $2K = -U$, $E = K + U = K - 2K = -K$. Увеличение полной энергии приводит к уменьшению кинетической энергии, $\Delta E = -\Delta K$. Изменение энергии равно работе гравитационных сил притяжения между двумя телами. Тогда

$$\Delta E = F \cdot \Delta l \cdot \cos(\Delta\varphi) = F \cdot v\Delta t \cdot \cos(\Delta\varphi) = -\Delta \left(\frac{m}{2}v^2\right) = -mv\Delta v,$$

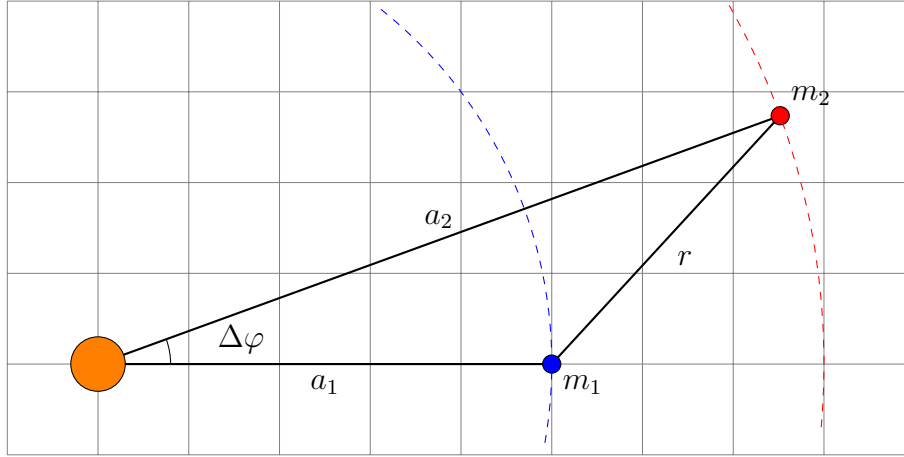
$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = -\frac{F}{m} \cdot \cos(\Delta\varphi).$$

Здесь $\Delta\varphi$ — это угол между скоростью тела и направлением на второе тело. В случае совпадающих орбит он равен углу между направлениями с Сатурна на эти два спутника.

Аналогичный результат можно получить, если рассматривать изменение кинетической энергии с учетом работы гравитационных сил со стороны Сатурна, совершаемую над телами.

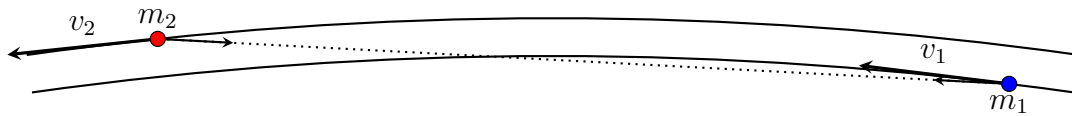
Пусть текущие координаты спутников в полярной системе координат — (a_1, φ_1) и (a_2, φ_2) соответственно. Будем считать, что $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ мало. Тогда расстояние между спутниками равно

$$r = \sqrt{(a_2 \cos \Delta\varphi - a_1)^2 + (a_2 \sin \Delta\varphi)^2} \approx \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (a_2 \Delta\varphi)^2}.$$



При этом $(a_2 - a_1) \leq \Delta a \ll r_{\min}$, из чего следует, что $r \approx a\Delta\varphi$.

Пусть линейная скорость, угловая скорость и масса одного из спутников равны v_1 , ω_1 и m_1 , линейная скорость и масса другого — v_2 , ω_2 и m_2 соответственно. Расстояние между спутниками — r . В начальный момент времени большие полуоси орбит спутников равны $a_{10} = a$ и $a_{20} = a + \Delta a$ соответственно, при этом $\omega_{10} > \omega_{20}$, то есть первый спутник догоняет второй.



Под действием гравитационных сил скорости тел изменяются.

$$\begin{aligned} \frac{dv_1}{dt} &= -\frac{1}{m_1} \cdot \frac{Gm_1m_2}{r^2}, \\ \frac{dv_2}{dt} &= -\frac{1}{m_2} \cdot \left(-\frac{Gm_1m_2}{r^2}\right), \\ \frac{dr}{dt} &= a \frac{d\Delta\varphi}{dt} = a(-\omega_1 + \omega_2). \end{aligned}$$

Здесь мы приняли $\cos \Delta\varphi$ равным 1, так как считаем $\Delta\varphi$ малым.

Свяжем разности линейных и угловых скоростей с разностью больших полуосей орбит. Обозначим $(a_2 - a_1)$ как δa , тогда

$$\begin{aligned} v_1 - v_2 &= \sqrt{\frac{GM_c}{a_1}} - \sqrt{\frac{GM_c}{a_2}} \approx \sqrt{\frac{GM_c}{a} \left(1 - \frac{\Delta a_1}{a}\right)} - \sqrt{\frac{GM_c}{a} \left(1 - \frac{\Delta a_2}{a}\right)}, \\ v_1 - v_2 &\approx \sqrt{\frac{GM_c}{a}} \left(1 - \frac{\Delta a_1}{2a} - 1 + \frac{\Delta a_2}{2a}\right) = v_{10} \cdot \frac{\delta a}{2a}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_1 - \omega_2 &= \sqrt{\frac{GM_c}{a_1^3}} - \sqrt{\frac{GM_c}{a_2^3}} \approx \sqrt{\frac{GM_c}{a^3} \left(1 - \frac{3\Delta a_1}{a}\right)} - \sqrt{\frac{GM_c}{a^3} \left(1 - \frac{3\Delta a_2}{a}\right)}, \\ \omega_1 - \omega_2 &\approx \sqrt{\frac{GM_c}{a^3} \left(1 - \frac{3\Delta a_1}{2a} - 1 + \frac{3\Delta a_2}{2a}\right)} = \omega_{10} \cdot \frac{3\delta a}{2a}.\end{aligned}$$

Тогда получим, что

$$\frac{dr}{dt} = -a\omega_{10} \cdot \frac{3\delta a}{2a} = \frac{3}{2}v_{10} \cdot 2\frac{v_2 - v_1}{v_{10}} = 3(v_2 - v_1).$$

Обозначим $v_2 - v_1$ как δv , тогда

$$\begin{aligned}\frac{d\delta v}{dt} &= \frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}, \\ \frac{dr}{dt} &= 3\delta v.\end{aligned}$$

Перемножим эти два уравнения и получим

$$3\delta v \cdot \frac{d\delta v}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{3(\delta v)^2}{2} \right) = \frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \cdot \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{G(m_1 + m_2)}{r} \right).$$

Получаем закон сохранения:

$$3(\delta v)^2 + \frac{2G(m_1 + m_2)}{r} = \text{const.}$$

Записывая его для двух состояний, при $r \rightarrow \infty$ (без взаимодействия) и при $\delta v = 0$, получим

$$\frac{2G(m_1 + m_2)}{r_{\min}} = 3(\delta v_{\infty})^2.$$

$\delta v_{\infty} = (v_{20} - v_{10})$, то есть

$$|\delta v_{\infty}| = v_{10} \cdot \frac{\Delta a}{2a} = \frac{2\pi a}{T} \cdot \frac{\Delta a}{2a} = \pi \cdot \frac{\Delta a}{T}.$$

Получаем финальный ответ:

$$r_{\min} = \frac{2G(m_1 + m_2)}{3(\delta v_{\infty})^2} = \frac{2G(m_1 + m_2)T^2}{3\pi^2(\Delta a)^2} = 15.8 \text{ тыс. км.}$$

На самом деле спутники не «обмениваются» орбитами: более массивный спутник перемещается на меньшее расстояние, чем менее массивный. Однако после окончания взаимодействия расстояние между орбитами оказывается таким же, какое было и до взаимодействия (см. график далее). Последний обмен орбитами произошел в начале 2026 года, при этом Янус из внутреннего спутника снова стал внешним.

