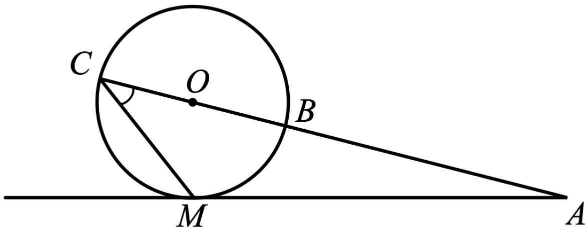
Вариант ЕГКР 07.04.2026

Часть 1

1 Из точки A к окружности с центром O проведены касательная AM и секущая AC, проходящая через центр и пересекающая окружность в точке B, причём $AB < AC$. Найдите величину угла ACM, если $\angle MAC = 34°$. Ответ дайте в градусах.



Решение:

Проведем радиус OM в точку касания M. По свойству касательной, $OM \perp AM$, следовательно, ΔOMA — прямоугольный, $\angle OMA = 90°$. В прямоугольном треугольнике OMA найдем угол $\angle MOA$:

$$\angle MOA = 90° - \angle MAO = 90° - 34° = 56°.$$

Рассмотрим треугольник OMC. Поскольку OM и OC — радиусы одной окружности, то $OM = OC$. Значит, ΔOMC — равнобедренный, и его углы при основании равны: $\angle OCM = \angle OMC$.
Угол $\angle MOA$ является внешним углом для ΔOMC. Внешний угол равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним:

$$\angle MOA = \angle OCM + \angle OMC = 2\angle ACM.$$

$$56° = 2\angle ACM;$$

$$\angle ACM = 28°.$$

Ответ: 28.

2 Даны векторы $\vec{a}(-7;5)$, $\vec{b}(2;-3)$ и $\vec{c}(0;4)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$.

Решение:

Пусть $\vec{d}=\vec{a}+\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{c}$. Найдём координаты вектора $\vec{d}$:

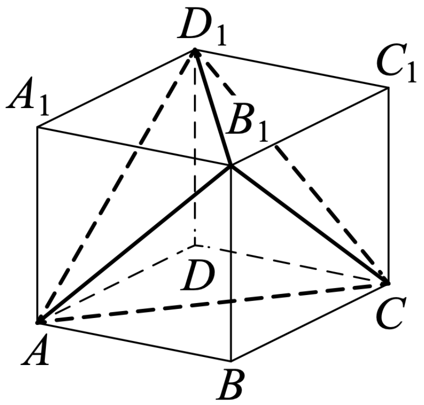
$$\vec{d}=\left(-7+2-\frac{1}{2}\cdot 0; 5+(-3)-\frac{1}{2}\cdot 4\right)=(-5;0).$$

Найдём длину вектора $\vec{d}$:

$$|\vec{d}|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=\sqrt{25}=5.$$

Ответ: 5.

3 Объём прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равен 7,2. Найдите объём треугольной пирамиды AD_1CB_1.



Решение:

Объем прямоугольного параллелепипеда равен $V_{\text{пар}} = 7{,}2$.
Треугольная пирамида AD_1CB_1 образуется путем отсечения от параллелепипеда четырех угловых пирамид (B_1ABC, D_1ADC, $A_1AB_1D_1$ и $C_1CB_1D_1$).

Объем каждой такой угловой пирамиды равен $\dfrac{1}{6}$ от объема параллелепипеда, так как $V = \dfrac{1}{3}Sh$, а площадь основания угловой пирамиды в 2 раза меньше площади основания параллелепипеда.
Следовательно, объем искомой пирамиды равен:

$$V_{AD_1CB_1} = V_{\text{пар}} - 4 \cdot \frac{1}{6}V_{\text{пар}} = V_{\text{пар}} - \frac{2}{3}V_{\text{пар}} = \frac{1}{3}V_{\text{пар}}.$$

Подставим:

$$V_{AD_1CB_1} = \frac{1}{3} \cdot 7{,}2 = 2{,}4.$$

Ответ: 2,4.

4 В игре «Морской бой» на клетчатом поле 10×10 размещают четыре однопалубных корабля (одна клетка), три двухпалубных, два трёхпалубных и один четырёхпалубный. Первый игрок делает «выстрел» по случайной клетке. Какова вероятность того, что он попадёт в двухпалубный корабль?

Решение:

Найдём общее количество клеток на поле:

$$n = 10 \times 10 = 100.$$

Найдём количество клеток, занятых двухпалубными кораблями. По условию дано три двухпалубных корабля, каждый из которых занимает 2 клетки:

$$m = 3 \times 2 = 6.$$

Найдём вероятность попадания в двухпалубный корабль:

$$P = \frac{6}{100} = 0{,}06.$$

Ответ: 0,06.

5 Зал выдачи наличных денежных средств банкоматами банка оснащён двумя типами датчиков безопасности: движения и лучевым. В случае несанкционированного проникновения в зал первый датчик срабатывает с вероятностью 0,94, а второй — с вероятностью 0,93. Какова вероятность того, что сработает только один датчик в случае несанкционированного проникновения в зал выдачи наличных денежных средств банкоматами банка?

Решение:

Пусть событие A – сработал первый датчик, $P(A) = 0{,}94$, а событие B – сработал второй датчик, $P(B) = 0{,}93$.

Найдём вероятности противоположных событий:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0{,}94 = 0{,}06;$$

$$P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}93 = 0{,}07.$$

Событие «сработает только один датчик» означает, что произошло либо (A и «не B»), либо («не A» и B). Так как датчики работают независимо, вероятности перемножаются, а несовместные события складываются:

$$P(\text{только один}) = P(A) \cdot P(\bar{B}) + P(\bar{A}) \cdot P(B).$$

Подставим числовые значения:

$$P = 0{,}94 \cdot 0{,}07 + 0{,}06 \cdot 0{,}93 = 0{,}0658 + 0{,}0558 = 0{,}1216.$$

Ответ: 0,1216.

6 Найдите корень уравнения $\log_2(x+3) = \log_2 x + 1$.

Решение:

$$\log_2(x+3) = \log_2 x + 1;$$
$$\log_2(x+3) = \log_2 x + \log_2 2;$$
$$\log_2(x+3) = \log_2(2x);$$
$$x + 3 = 2x;$$
$$x = 3.$$

Ответ: 3.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{9\cos 60^\circ}{\sin^2 18^\circ + \cos^2 198^\circ}$.

Решение:

По формуле приведения:

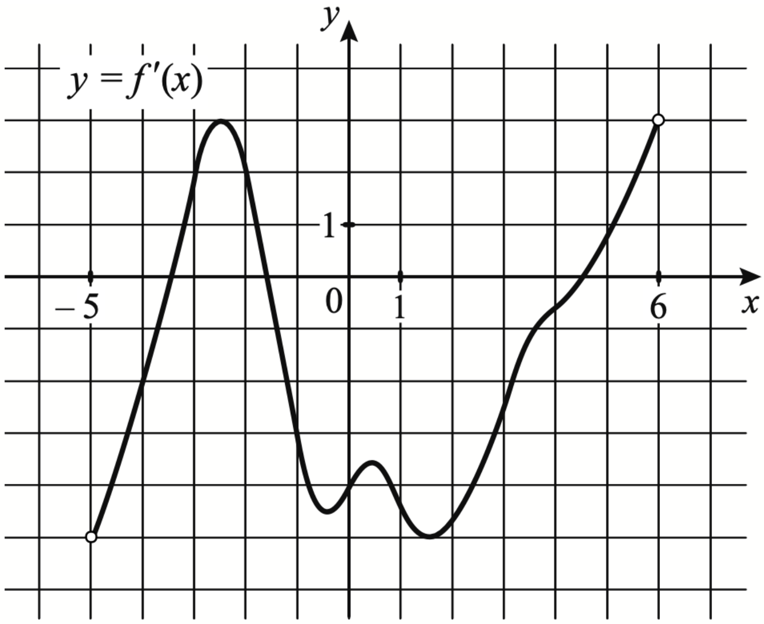
$$\cos^2 198^\circ = \cos^2(180^\circ + 18^\circ) = (-\cos 18^\circ)^2 = \cos^2 18^\circ.$$

Подставим в выражение:

$$\frac{4{,}5}{\sin^2 18^\circ + \cos^2 18^\circ} = \frac{4{,}5}{1} = 4{,}5.$$

Ответ: 4,5.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 6)$. Найдите промежутки возрастания функции $f(x)$. В ответе укажите сумму целых точек, принадлежащих этим промежуткам.



Решение:

Функция возрастает, если её производная положительна. Производная положительна в точках, имеющих абсциссы $-3; -2; 5$. Тогда сумма равна

$$-3 + (-2) + 5 = 0.$$

Ответ: 0.

9 В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону $m = m_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$, где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начального момента, T — период полураспада. В начальный момент времени масса изотопа 164 мг. Период его полураспада составляет 7 минут. Найдите, через сколько минут масса изотопа будет равна 41 мг.

Решение:

Подставим числовые данные из условия:

$$41 = 164 \cdot 2^{-\frac{t}{7}};$$
$$\frac{41}{164} = 2^{-\frac{t}{7}};$$
$$\frac{1}{4} = 2^{-\frac{t}{7}};$$
$$2^{-2} = 2^{-\frac{t}{7}}.$$

Так как основания равны, приравниваем показатели степени:

$$-\frac{t}{7} = -2;$$
$$t = 14.$$

Ответ: 14.

10 Смешали 2 кг 15%-го раствора кислоты и 4 кг 20%-го раствора той же кислоты, а затем добавили несколько кг воды. В результате получился 11%-й раствор кислоты. Сколько кг воды было добавлено?

Решение:

Пусть было добавлено x кг воды. Поскольку масса кислоты в исходных растворах и в получившейся смеси одинакова, составим уравнение:

$$2 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}2 = 0{,}11 \cdot (2 + 4 + x);$$

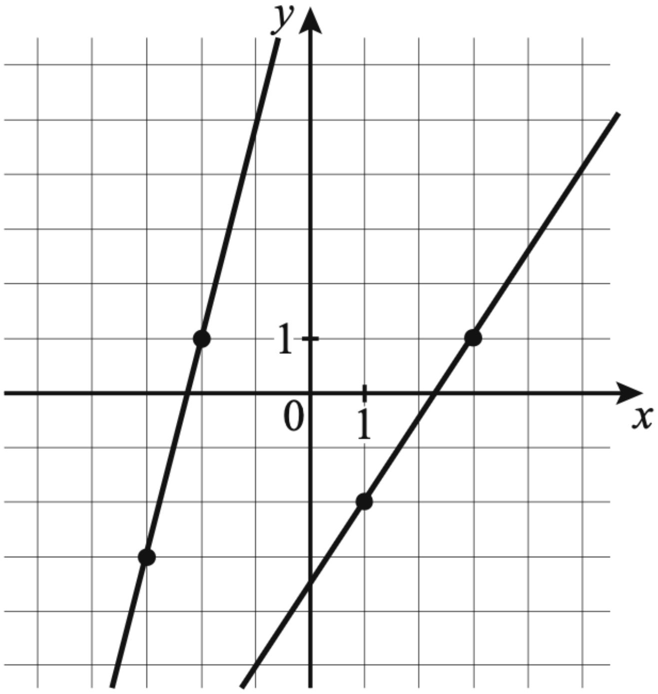
$$0{,}3 + 0{,}8 = 0{,}66 + 0{,}11x;$$

$$0{,}44 = 0{,}11x;$$

$$x = 4.$$

Ответ: 4.

11 На рисунке изображены графики двух линейных функций. Найдите абсциссу точки пересечения графиков.



Решение:

Первая прямая проходит через точки $(-2; 1)$ и $(-3; -3)$. Найдём её уравнение в виде $y = k_1x + b_1$:

$$\begin{cases} 1 = -2k_1 + b_1, \\ -3 = -3k_1 + b_1. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$4 = k_1.$$

Подставим $k_1 = 4$ в первое уравнение:

$$1 = -8 + b_1;$$

$$b_1 = 9.$$

Получим $y = 4x + 9$.
Найдём уравнение второй прямой в виде $y = k_2x + b_2$, подставив точки $(3; 1)$ и $(1; -2)$:

$$\begin{cases} 1 = 3k_2 + b_2, \\ -2 = k_2 + b_2. \end{cases}$$

Вычтем из первого уравнения второе:

$$2k_2 = 3;$$

$$k_2 = \frac{3}{2}.$$

Подставим $k_2 = \dfrac{3}{2}$ во второе уравнение:

$$-2 = \frac{3}{2} + b_2;$$

$$b_2 = -\frac{7}{2}.$$

Получим $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{7}{2}$.

Приравняем функции, чтобы найти точку пересечения:

$$\frac{3}{2}x - \frac{7}{2} = 4x + 9;$$

$$3x - 7 = 8x + 18;$$

$$-5x = 25;$$

$$x = -5.$$

Ответ: -5.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 3^{x^2+18x+82}$ на отрезке $[-10; 10]$.

Решение:

Заметим, что функция $g(t) = 3^t$ является монотонно возрастающей, а значит, не влияет на монотонность исходной функции.
Рассмотрим функцию $h(x) = x^2 + 18x + 82$, которая находится в показателе степени. Это квадратичная функция, графиком которой является парабола с ветвями, направленными вверх, значит, своё наименьшее значение она принимает в вершине

$$x_B = -\frac{18}{2 \cdot 1} = -9.$$

Тогда исходная функция принимает наименьшее значение на отрезке $[-10; 10]$ в точке $x = -9$:

$$y(-9) = 3^{(-9)^2+18\cdot(-9)+82} = 3.$$

Ответ: 3.

Часть 2

13 а) Решите уравнение

$$\sin x - \sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[4\pi; 7\pi]$.

Решение:

а) Применяем формулу приведения, а также представляем $\sin x$ как $\sin\left(2 \cdot \frac{x}{2}\right)$ и используем формулу двойного аргумента:

$$2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\sin\frac{x}{2} = 0;$$

$$\sin\frac{x}{2}\left(2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2}\right) = 0;$$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2} = 0,\\ 2\cos\frac{x}{2} - \sqrt{2} = 0;\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\sin\frac{x}{2} = 0,\\ \cos\frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\frac{x}{2} = \pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\ \frac{x}{2} = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z};\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}x = 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z},\\ x = \pm\frac{\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

б) Отберём корни с помощью двойных неравенств:

$$4\pi \leqslant 2\pi k \leqslant 7\pi \mid : \pi;$$
$$4 \leqslant 2k \leqslant 7 \mid : 2;$$
$$2 \leqslant k \leqslant 3{,}5,\ k \in \mathbb{Z};$$
$$k = 2:\quad x = 4\pi;$$
$$k = 3:\quad x = 6\pi.$$

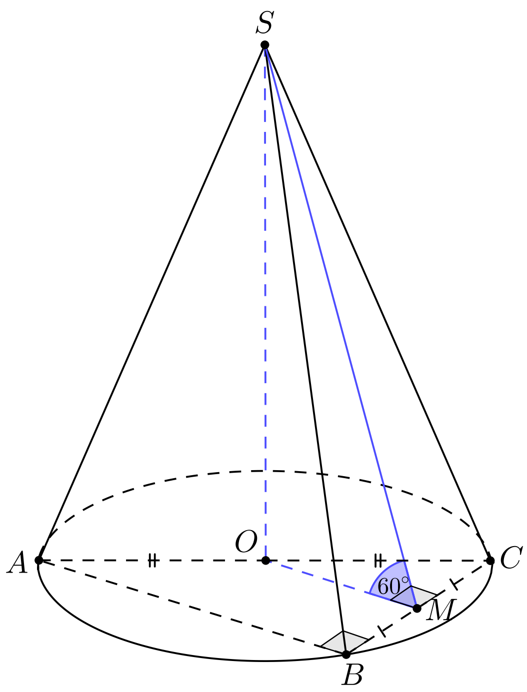
$$4\pi \leqslant \frac{\pi}{2} + 4\pi k \leqslant 7\pi \mid : \pi;$$
$$4 \leqslant \frac{1}{2} + 4k \leqslant 7;$$
$$\frac{7}{2} \leqslant 4k \leqslant \frac{13}{2} \mid : 4;$$
$$\frac{7}{8} \leqslant k \leqslant \frac{13}{8},\ k \in \mathbb{Z};$$
$$k = 1:\quad x = \frac{\pi}{2} + 4\pi = \frac{9\pi}{2}.$$

$$4\pi \leqslant -\frac{\pi}{2} + 4\pi k \leqslant 7\pi \mid : \pi;$$
$$4 \leqslant -\frac{1}{2} + 4k \leqslant 7;$$
$$\frac{9}{2} \leqslant 4k \leqslant \frac{15}{2} \mid : 4;$$
$$\frac{9}{8} \leqslant k \leqslant \frac{15}{8},\ k \in \mathbb{Z};$$
$$1\frac{1}{8} \leqslant k \leqslant 1\frac{7}{8},\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow k \in \varnothing.$$

Ответ: а) $2\pi k,\ \pm\frac{\pi}{2} + 4\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$; б) $4\pi,\ \frac{9\pi}{2},\ 6\pi$.

14 Точки A, B и C лежат на окружности основания конуса с вершиной S. Точка M — середина хорды BC, AC — диаметр.
а) Докажите, что угол между прямой SM и плоскостью ABC равен углу между прямой AB и плоскостью SBC.
б) Найдите высоту конуса, если угол между прямой AB и плоскостью SBC равен $60°$, $AC = 10$, $BC = 6$.

а) **Доказательство:**



1) Пусть O – центр основания конуса.
$\angle ABC = 90°$ как вписанный и опирающийся на диаметр AC.
2) Так как $AO = OC = r$, а $BM = MC$, то OM – средняя линия в $\triangle ABC$, следовательно, $OM \parallel AB$ и $OM \perp BC$.
3) $\angle(SM; (ABC)) = \angle(SM; OM) = \angle SMO$, где OM – проекция SM на плоскость (ABC), тогда $SM \perp BC$ по теореме о трёх перпендикулярах.
4) Так как $AB \parallel OM$, то $\angle(AB; (SBC)) = \angle(OM; (SBC))$. При этом $OM \perp BC$ и $SM \perp BC$, значит, $\angle OMS = \angle(OM; (SBC))$, тогда $\angle(AB; (SBC)) = \angle OMS = \angle(SM; (ABC))$, ч.т.д.

б) **Решение:**

1) В $\triangle ABC$ по теореме Пифагора:

$$AB^2 + BC^2 = AC^2, \quad AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8.$$

2) $OM = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2} \cdot 8 = 4.$

3) Из $\triangle SOM$ получаем, что:

$$SO = OM \cdot \operatorname{tg} \angle SMO = 4 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3}.$$

Ответ: б) $4\sqrt{3}$.

15 Решите неравенство

$$\frac{\log_2 27}{\log_2 \frac{x}{81}} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \frac{\log_5 9}{\log_5 \frac{x}{27}}.$$

Решение:

Применяя формулу перехода к новому основанию, получаем:

$$\log_{\frac{x}{81}} 27 \leqslant \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \log_{\frac{x}{27}} 9.$$

Используя формулу $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$, а также $\log_{a^k} b = \dfrac{1}{k}\log_a b$

и $\log_a \dfrac{b}{c} = \log_a b - \log_a c$, имеем:

$$\frac{1}{\log_{27} \frac{x}{81}} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \frac{1}{\log_9 \frac{x}{27}};$$

$$\frac{3}{\log_3 \frac{x}{81}} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \frac{2}{\log_3 \frac{x}{27}};$$

$$\frac{3}{\log_3 x - 4} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4 - \log_3 x}\right) \cdot \frac{2}{\log_3 x - 3}.$$

Пусть $t = \log_3 x$, тогда неравенство перепишется в виде:

$$\frac{3}{t-4} \leqslant \left(1 - \frac{1}{4-t}\right) \cdot \frac{2}{t-3};$$

$$\frac{3}{t-4} \leqslant \frac{3-t}{4-t} \cdot \frac{2}{t-3};$$

$$\frac{3}{t-4} - \frac{t-3}{t-4} \cdot \frac{2}{t-3} \leqslant 0;$$

$$\begin{cases} t \neq 3; \\ \dfrac{3}{t-4} - \dfrac{2}{t-4} \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t \neq 3; \\ \dfrac{1}{t-4} \leqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} t \neq 3; \\ t < 4; \end{cases} \quad \begin{cases} \log_3 x \neq 3; \\ \log_3 x < 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 27; \\ 0 < x < 81. \end{cases}$$

Ответ: $x \in (0; 27) \cup (27; 81)$.

16 В мае 2027 года садовод планирует взять кредит в банке для строительства на участке летней кухни. Банк предоставляет кредит на следующих условиях:

– каждый январь долг увеличивается на $r\,\%$ по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по апрель необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Садовод рассчитал, что если ежегодно выплачивать по 41 472 рубля, то кредит можно будет полностью погасить за 4 года, а если ежегодно выплачивать по 70 272 рубля, то кредит можно будет погасить за 2 года. Найдите r.

Решение:

В кредит планируется взять S рублей. Каждый год долг увеличивается на $r\,\%$, то есть в $k = 1 + \dfrac{r}{100}$ раз. После этого выплачивается $x = 41\,472$ рублей (если кредит берется на 4 года) или $y = 70\,272$ рублей (если кредит берется на 2 года). В каждом случае долг в итоге будет равен нулю. Получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases}(((Sk - x)k - x)k - x)k - x = 0,\\ (Sk - y)k - y = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}Sk^4 - xk^3 - xk^2 - kx - x = 0,\\ Sk^2 - yk - y = 0;\end{cases}$$

$$\begin{cases}Sk^4 = x(k^3 + k^2 + k + 1),\\ Sk^2 = y(k + 1);\end{cases}$$

$$\begin{cases}Sk^4 = x(k + 1)(k^2 + 1),\\ Sk^2 = y(k + 1).\end{cases}$$

Поделим первое уравнение на второе (это можно сделать, так как во втором уравнении обе части не могут обратиться в ноль):

$$k^2 = \frac{x(k+1)(k^2+1)}{y(k+1)}; \qquad \Big|\cdot y$$

$$yk^2 = xk^2 + x;$$

$$(y - x)k^2 = x;$$

$$k^2 = \frac{x}{y - x}.$$

Подставим известные значения:

$$k^2 = \frac{41\ 472}{70\ 272\ - 41\ 472} = \frac{41\ 472}{28\ 800} = \frac{2 \cdot 12^4}{2 \cdot 120^2} = \frac{36}{25} = 1{,}2^2.$$

Поскольку $k > 0$,

$$k = \frac{6}{5}; \quad 1 + \frac{r}{100} = \frac{6}{5}; \quad \frac{r}{100} = \frac{1}{5}; \quad r = 20.$$

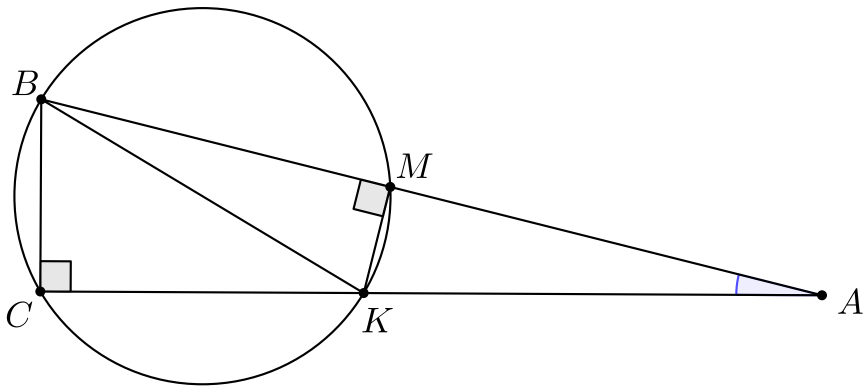
Ответ: 20.

17 Окружность проходит через вершины B и C прямоугольного треугольника ABC и пересекает катет AC в точке K, гипотенузу AB — в точке M.

а) Докажите, что треугольники AKM и ABC подобны.

б) Найдите площадь четырёхугольника $CKMB$, если радиус окружности равен $\sqrt{29}$, катеты AC и BC равны 12 и 4 соответственно.

а) **Доказательство:**



1) Пусть $\angle ABC = \alpha$.

Так как четырёхугольник $BCKM$ вписанный, значит, $\angle ABC + \angle CKM = 180°$.

Тогда $\angle CKM = 180° - \angle ABC = 180° - \alpha$.

2) $\angle CKM + \angle AKM = 180°$ как смежные, $\angle AKM = 180° - \angle CKM = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$.

3) Значит, $\triangle ABC \sim \triangle AKM$ по двум углам ($\angle ABC = \angle AKM$ и $\angle A$ – общий), ч.т.д.

б) **Решение:**

1) В $\triangle ABC$ по теореме Пифагора:

$$AB^2 = BC^2 + AC^2, \quad AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{12^2 + 4^2} = \sqrt{160} = 4\sqrt{10}.$$

2) BK – это диаметр окружности, описанной около четырёхугольника $BCKM$, так как $\angle ACB = 90°$. Тогда $BK = 2r = 2\sqrt{29}$.

3) В $\triangle BKC$ по теореме Пифагора:

$$BK^2 = BC^2 + CK^2, \quad CK = \sqrt{BK^2 - BC^2} = \sqrt{(2\sqrt{29})^2 - 4^2} = 10.$$

Тогда $AK = AC - CK = 12 - 10 = 2$.

4) Из $\triangle AKM \sim \triangle ABC$ получаем, что $\dfrac{S_{AMK}}{S_{ABC}} = \left(\dfrac{AK}{AB}\right)^2 = \left(\dfrac{2}{4\sqrt{10}}\right)^2 = \dfrac{1}{40}$.

5) $S_{ABC} = \dfrac{1}{2}\cdot BC\cdot AC = \dfrac{1}{2}\cdot 4\cdot 12 = 24$, тогда $S_{AMK} = \dfrac{1}{40}S_{ABC} = \dfrac{1}{40}\cdot 24 = \dfrac{6}{10} = 0{,}6$.

6) Следовательно, $S_{BMCK} = S_{ABC} - S_{AMK} = 24 - 0{,}6 = 23{,}4$.

Ответ: б) 23,4.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых точки плоскости Oxy, координаты которых удовлетворяют равенству

$$y^3 + ay^2 + 2ay + 9y = \sqrt{27}x,$$

представляют собой график некоторой функции $y = f(x)$ при всех действительных значениях x.

Решение:
По определению функции каждому значению x должно соответствовать только одно значение y, значит, функция $x = g(y)$ должна быть монотонной, то есть её производная должна иметь постоянный знак.

$$x = \frac{1}{\sqrt{27}}(y^3 + ay^2 + 2ay + 9y).$$

То есть $g(y) = \dfrac{1}{\sqrt{27}}(y^3 + ay^2 + 2ay + 9y)$. Найдём производную функции $g(y)$:

$$g'(y) = \frac{1}{\sqrt{27}}(3y^2 + 2ay + 2a + 9).$$

Так как $g(y)$ – это кубическая парабола с положительным старшим коэффициентом, то $g'(y)$ должна быть неотрицательной, следовательно, должно выполняться следующее неравенство:

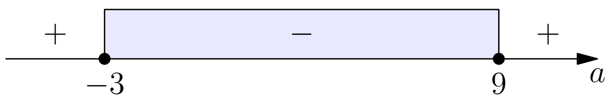
$$\frac{1}{\sqrt{27}}(3y^2 + 2ay + 2a + 9) \geqslant 0;$$

$$3y^2 + 2ay + 2a + 9 \geqslant 0;$$

$$D = 4a^2 - 4 \cdot 3 \cdot (2a + 9) = 4a^2 - 24a - 108.$$

$g'(y)$ – квадратичная функция, график которой парабола с ветвями, направленными вверх. Значит, для того, чтобы она при всех y была неотрицательной, необходимо и достаточно, чтобы её дискриминант был неположителен, то есть:

$$4a^2 - 24a - 108 \leqslant 0, \quad a^2 - 6a - 27 \leqslant 0, \quad (a - 9)(a + 3) \leqslant 0, \quad -3 \leqslant a \leqslant 9.$$



Ответ: $a \in [-3; 9]$.

19 Юра и Полина играют в числа. Полина выбирает несколько различных натуральных чисел от 25 до 75 включительно и находит их произведение (если выбрано только одно число, то произведением считается само это число). Юра к каждому числу, выбранному Полиной, прибавляет единицу и находит произведение полученных чисел.

а) Может ли результат у Юры оказаться в два раза больше, чем у Полины?

б) Может ли результат у Юры оказаться в пять раз больше, чем у Полины?

в) В какое наибольшее целое число раз результат у Юры может быть больше, чем результат у Полины?

Решение:

а) Да, если Полина выберет числа $25,\ 26, \ldots,\ 49$, тогда у Юры будут числа $26,\ 27, \ldots,\ 50$, а результат будет равен 2.

б) Рассмотрим два подряд идущих числа x и $x+1$. Заметим, что $\dfrac{x+1}{x} = 1+\dfrac{1}{x} > 1$, значит, каждое дополнительно взятое число увеличивает отношение.

Таким образом, наибольшее значение отношения будет достигаться, если Полина возьмёт все числа от 25 до 75, тогда у Юры будут числа от 26 до 76. Получаем, что:

$$\frac{26 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 76}{25 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 75} = \frac{76}{25} = 3\frac{1}{25} < 5.$$

Следовательно, отношения, равного 5, быть не может.

в) Приведём пример отношения, равного 3. Пусть Полина взяла числа от 25 до 74, тогда числа Юры будут от 26 до 75, тогда их отношение будет равно:

$$\frac{26 \cdot 27 \cdot \ldots \cdot 75}{25 \cdot 26 \cdot \ldots \cdot 74} = \frac{75}{25} = 3.$$

Ответ: а) да, б) нет, в) 3.

⟹ **Разбор варианта от Профиматики**