

Заключительный этап: практический тур

Условия, решения и схема оценивания. 9 класс

Содержание

9.7. Жил на свете добрый жук.....	2
9.8. Светит мазер, светит ясный... ..	5
9.9. Пролетела.....	9

9.7. Жил на свете добрый жук

Е. Н. Фадеев

В таблице приведены результаты наблюдений визуально-двойной звезды: порядковый номер и дата наблюдения, угловое расстояние между компонентами ρ и позиционный угол менее яркого компонента γ (откладывается от направления на север к востоку). Известно, что параллакс двойной равен $0.133''$, а масса большего компонента равна 1.5 массы Солнца. Система координат соответствует эпохе J2000.0.

1. На листе миллиметровой бумаги постройте видимую орбиту менее яркого компонента относительно более яркого так, как она видна на небе;
2. Определите период обращения (в годах), большую полуось (в астрономических единицах), эксцентриситет и наклон плоскости орбиты к картинной плоскости, а также массу меньшего компонента (в массах Солнца).

№	Дата	$\rho, ''$	$\gamma, ^\circ$	№	Дата	$\rho, ''$	$\gamma, ^\circ$
1	29.09.1902	3.4	55.6	9	29.01.1950	5.8	284.0
2	10.12.1905	2.8	68.3	10	04.10.1957	6.2	292.0
3	18.11.1910	1.8	105.2	11	22.11.1972	6.7	305.4
4	20.10.1913	1.5	148.0	12	18.10.1978	6.8	310.2
5	01.10.1919	2.4	217.1	13	04.11.1992	7.0	321.1
6	26.08.1923	3.1	236.1	14	25.10.2001	7.0	327.9
7	14.01.1929	4.0	251.9	15	11.12.2003	7.0	329.5
8	17.11.1933	4.5	261.8	16	07.11.2024	6.8	345.5

Решение. Нанесем на миллиметровую бумагу точку S_1 — положение более массивной звезды. Поскольку позиционный угол отсчитывается от направления на север, направим полярную ось вверх. Тогда на рисунке восток окажется справа, то есть позиционный угол надо откладывать против часовой стрелки.

Отметив все 16 положений второй звезды, обнаруживаем, что ее траектория представляет окружность (рис. 1). Однако точка S_1 располагается заметно в стороне от центра окружности O . Если бы мы видели движение по круговой орбите, расположенной в картинной плоскости, то S_1 находилась бы в центре окружности. Раз этого не происходит, остается сделать вывод, что действительная орбита эллиптическая, но она наклонена к картинной плоскости так, что проекция большой оси совпадает по величине с малой осью. Проекция фокуса орбиты S_1 оказывается на отрезке, соединяющем точки 4 и 14, то есть этот отрезок — проекция большой оси орбиты.

Нарисуем орбиту и ее проекцию сбоку (рис. 2). При проецировании апоастр орбиты Q переходит в точку 14, периастр P — в точку 4, фокус F в точку S_1 . Поскольку отрезок FS_1 параллелен отрезку $P4$, отсекаемые ими отрезки на орбите и ее проекции будут пропорциональны. Проще всего на чертеже измерить расстояния между точками S_1 и 4 и точками 4 и 14. Обозначим их соответственно как x и y . Тогда

$$\frac{x}{y} = \frac{r_p}{2a} = \frac{a(1-e)}{2a} = \frac{1-e}{2} \Rightarrow e = 1 - 2\frac{x}{y} \approx 0.65.$$

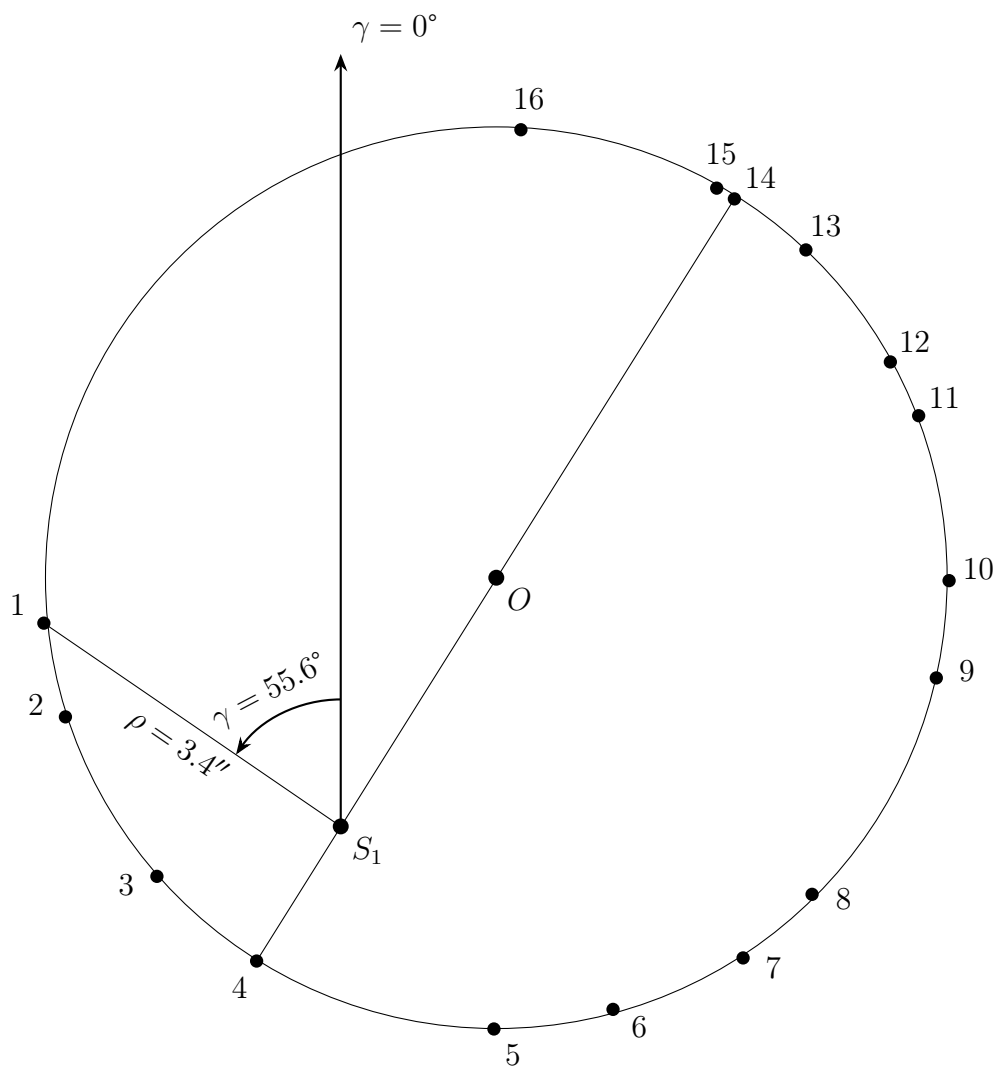


Рис. 1: Видимая орбита двойной звезды.

В точках 4 и 14 вторая звезда проходит периастр и апоастр своей орбиты. Время между этими событиями равно половине орбитального периода звезды. Наблюдения проводились почти точно с интервалом в 88 лет, поэтому искомый период равен $P = 176$ лет.

Из рисунка 2 видно, что наклон плоскости орбиты к картинной плоскости i равен

$$i = \arccos \frac{b}{a} = \arccos \frac{a\sqrt{1-e^2}}{a} = \arccos \sqrt{1-e^2} \approx 40^\circ.$$

Зная параллакс двойной π'' , легко найти расстояние до нее:

$$D = \frac{1}{\pi''} \approx 7.5 \text{ пк.}$$

Тогда величина малой полуоси орбиты в линейной мере

$$b = \frac{\rho_4 + \rho_{14}}{2} D = \frac{1.5'' + 7''}{2} \cdot 7.5 \text{ пк} \approx 32 \text{ а. е.}$$

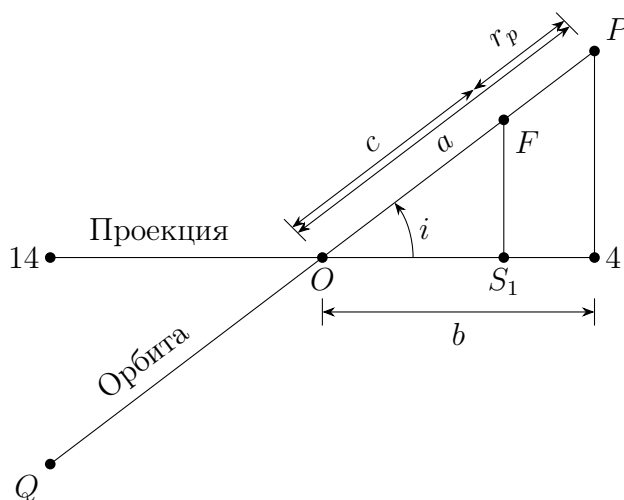


Рис. 2: Проекция орбиты.

Здесь ρ_4 и ρ_{14} — расстояния до соответствующих точек из таблицы в условии. Величина большой полуоси равна

$$a = \frac{b}{\sqrt{1 - e^2}} = \frac{32 \text{ а. е.}}{\sqrt{1 - 0.65^2}} \approx 42 \text{ а. е.}$$

Зная большую полуось и период обращения, можно определить сумму масс компонент с помощью третьего закона Кеплера:

$$\frac{M_1 + M_2}{M_\odot} = \frac{a^3}{1 \text{ а. е.}^3} \cdot \frac{1 \text{ год}^2}{P^2} \approx 2.39.$$

Тогда масса второго компонента равна $M_2 = 2.39M_\odot - 1.5M_\odot = 0.89M_\odot$.

9.8. Светит мазер, светит ясный. . .

В. Б. Игнатъев, М. В. Кузнецов

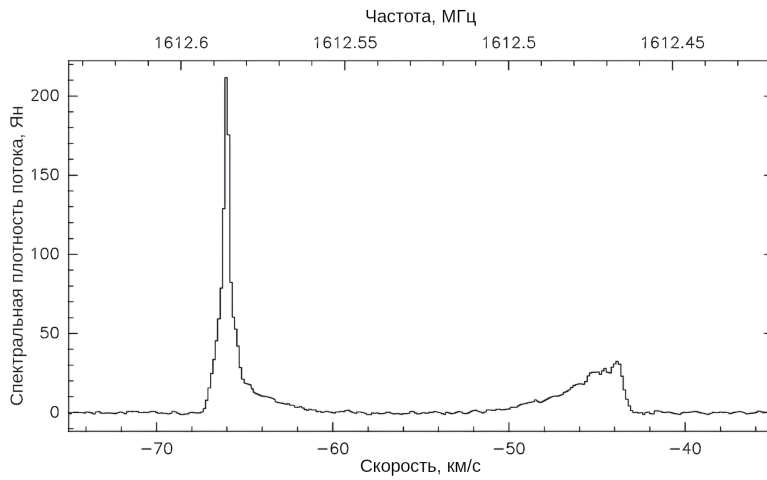
В газопылевых оболочках, окружающих звезды-гиганты на поздних стадиях эволюции, иногда наблюдаются источники мазерного излучения. В этой задаче мы не будем касаться природы мазеров: важно, что каждый отдельный мазер можно считать точечным объектом, а его излучение — монохроматическим. Мазеры концентрируются в тонких сферических оболочках, радиусы которых много больше размеров фотосферы звезды. Источником энергии для мазеров является излучение звезды: переменность звезды приводит к переменной яркости мазеров.

Вам предоставлены графики, полученные при исследовании области $\text{OH}127.8 + 0.0$:

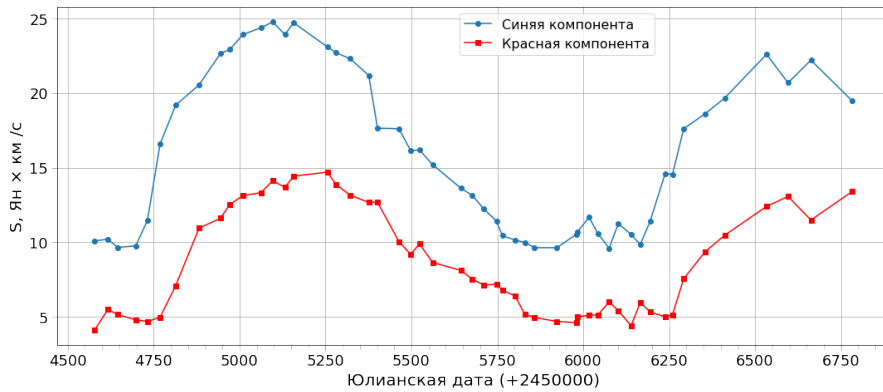
1. Спектр мазерного излучения этой области, содержащей много отдельных мазеров. По горизонтальной оси сверху отложена частота наблюдения, а снизу — соответствующая ей доплеровская скорость. По вертикальной оси отложена спектральная плотность потока в янских ($1 \text{ Ян} = 10^{-26} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ Гц})$). Одна из ярких компонент линии соответствует части оболочки, движущейся от звезды к наблюдателю («синяя компонента»), а другая — в противоположную сторону («красная» компонента).
2. Зависимость относительной интенсивности «синей» и «красной» компонент от времени.
3. Зависимость углового расстояния отдельных мазеров от звезды от их лучевых скоростей.

Определите:

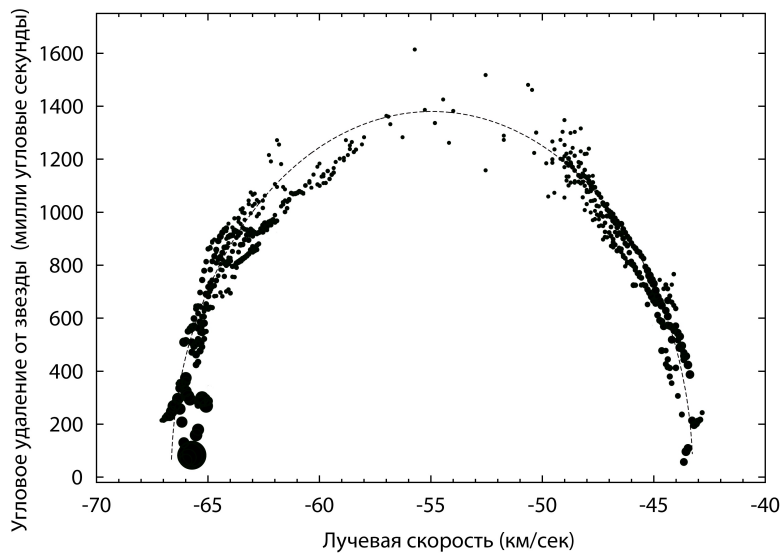
- A) Лабораторную частоту исследуемой мазерной линии с точностью до 10 кГц;
- B) Скорость расширения области мазерного излучения (оболочки) (в километрах в секунду);
- C) Линейный размер области мазерного излучения (в астрономических единицах);
- D) Расстояние до исследуемой области (в парсеках);
- E) Является ли объект внегалактическим, принадлежит нашей Галактике или является объектом Солнечной системы?



(a) Спектр области мазерного излучения.



(b) Кривая блеска мазерного излучения



(c) Зависимость углового расстояния от звезды отдельных мазеров от их лучевых скоростей.

К задаче 2

Решение. Для ответа на первый вопрос необходимо вспомнить формулу для доплеровского смещения спектральных линий. Пусть λ и λ_0 — наблюдаемая и лабораторная длины волн, v — скорость излучателя относительно наблюдателя и c — скорость света. Тогда изменение длины волны света за счет движения источника выражается формулой:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}.$$

Но нам на спектре дана шкала частот, а не длин волн. Частота излучения связана с длиной волны как $\nu = c/\lambda$. Тогда левая часть формулы для эффекта Доплера принимает вид

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu_0}} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu}.$$

Отсюда получаем зависимость ν_0 от ν и v :

$$\nu_0 = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \nu.$$

Определив на спектре пару значений ν и v , получим $\nu_0 = 1612.23$ МГц. Разумеется, измерений следует сделать несколько, а результат усреднить.

Замечание 1. Можно заметить, что на графике равным изменениям скорости соответствуют равные изменения частоты. Это следует из формулы эффекта Доплера:

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_2}{c}} - \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_1}{c}} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{v_2}{c}\right) - \nu_0 \left(1 - \frac{v_1}{c}\right) = -\frac{\Delta v}{c} \nu_0.$$

Таким образом, достаточно аккуратно определить разность частот, соответствующую изменению скорости на фиксированную величину, и с ее помощью вычислить частоту, соответствующую нулевой скорости.

По условию, наблюдаемое излучение формируется в тонкой оболочке, окружающей звезду. Оболочка вместе со звездой движется относительно наблюдателя и вместе с тем удаляется во все стороны от звезды. Тогда разность скоростей приближающейся и удаляющейся от нас компонент спектра равна удвоенной скорости расширения. Измерения можно провести как по спектру, так и по зависимости углового расстояния от лучевой скорости. Искомое значение равно $11 - 11.5$ км/с.

Обратим внимание на зависимость потока излучения для «красной» и «синей» компонент. Изменения повторяют друг друга, но «красная» компонента запаздывает по отношению к «синей» примерно на 60 дней. Почему так происходит? Источником энергии для мазеров является излучение звезды. Звезды-гиганты на поздних стадиях эволюции обычно переменные, и изменения в яркости звезды сказываются на яркости мазеров в окружающей звезду оболочке. Поскольку оболочка сферическая, мощность излучения изменяется у всех мазеров одновременно, а видимая нами задержка возникает из-за конечности скорости света и громадной величины оболочки. Следовательно, диаметр области мазерного излучения равен 60 световых дней или

$$D = 60 \text{ св. дней} = 60 \cdot 86\,400 \text{ с} \cdot 300\,000 \text{ км/с} \approx 1.56 \cdot 10^{12} \text{ км} \approx 10\,400 \text{ а. е.},$$

а ее радиус $R \approx 5200$ а. е.

Из рисунка (с) можем определить, что угловой радиус области мазерного излучения составляет $\rho'' = 1.3'' - 1.4''$. Тогда расстояние до исследуемой области равно

$$r = \frac{R}{\rho''} = \frac{5200 \text{ а. е.}}{1.3''} = 4000 \text{ пк} = 4 \text{ кпк.}$$

Для значения $\rho'' = 1.4''$ мы получили бы $r = 3.7$ кпк.

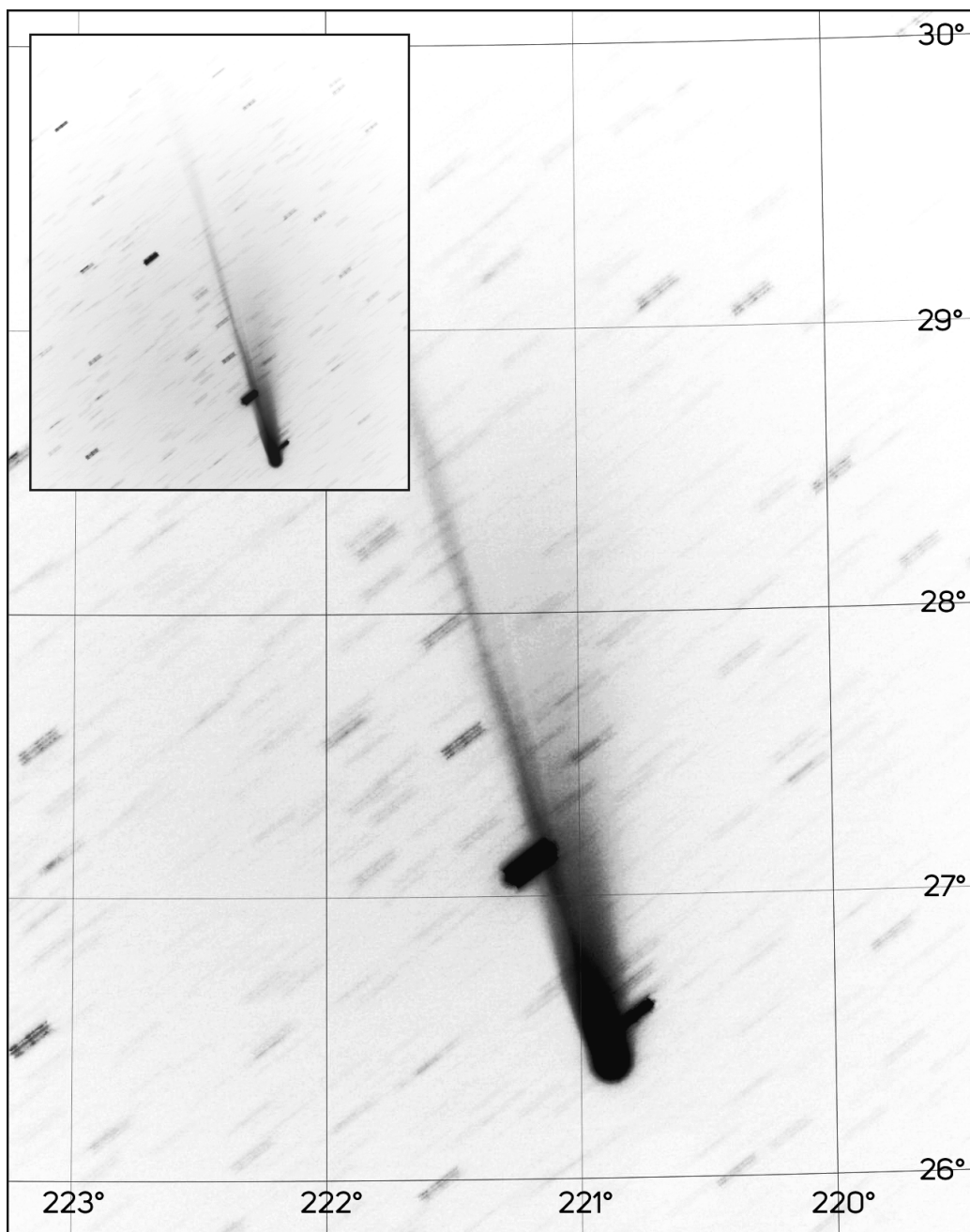
Расстояние до звезды составляет около 4 килопарсек. Это расстояние меньше, чем средний радиус нашей галактики 16 кпк, поэтому мы точно можем сказать, это объект принадлежит нашей Галактике. Разумеется, в Солнечной системе нет звезд-гигантов, поэтому ей этот объект принадлежать не может.

Замечание 2. Ответить на последний вопрос с большой степенью уверенности можно не вычисляя расстояние. Судя по графикам скорость звезды составляет около 55 км/с, что соответствует характерным относительным скоростям в диске нашей Галактики. Скорости галактик составляют обычно сотни и даже тысячи километров в секунду, хотя, конечно, нельзя на сто процентов утверждать, что не найдется близкая галактика, в которой объект движется с подходящей скоростью.

9.9. Пролетела

О. Ю. Голубева

Вам дан снимок кометы C/2025 A6 (Lemmon), которая наблюдалась в созвездии Волопас 22 октября 2025 года. Серия снимков была получена в течение 1 часа через телескоп с полной компенсацией осевого вращения Земли. Далее снимки были сложены по комете, в результате чего комета в поле зрения оказалась неподвижна, а звезды прочертили треки. Определите наиболее точно пространственную скорость кометы во время наблюдений. Оценка погрешностей не требуется. Все измерения отразите на дополнительном листе к задаче. Расстояние между Землей и кометой не менялось и составляло 0.6 а. е. Во время съемки комета находилась в 0.66 а. е. от Солнца вблизи перигелия и двигалась по ретроградной орбите. На снимке по вертикальной оси отложено склонение в градусах, по горизонтальной — прямое восхождение в градусах.



Решение. Видимое смещение кометы на небе является результатом ее собственного движения, а также осевого вращения и орбитального движения Земли. Согласно условию, осевое вращение Земли компенсировано в процессе съемки. Судя по всему, телескоп работал в экваториальном режиме и вращался вокруг полярной оси. В этом случае звезды в кадре должны быть точечными, но мы видим треки. Из условия понятно, почему так: снимки были сложены по комете, комета смещается, значит, треки звезд демонстрируют смещение кометы, и его можно найти.

Методом масштаба найдем видимое угловое смещение кометы по треку любой звезды. Треки звезд на этом изображении не являются суточными треками (суточное вращение исключено в процессе съемки) и не укорачиваются к полюсу, значит, проводить измерения можно в любом месте снимка. Все треки разные по толщине и четкости, значит, результат измерения может зависеть от выбора конкретного трека. Правильнее будет определить смещение минимум на трех разных треках, найти среднее арифметическое и последующие расчеты выполнять с ним. Заметим, что шаг сетки по прямому восхождению и склонению равен 1° . При этом расстояние между кругами склонений меньше, чем между суточными параллелями, и уменьшается по мере удаления от небесного экватора, поскольку координатная сетка стягивается к полюсам. Поэтому следует сравнивать длину трека с шагом сетки по склонению. Если участник сравнивает длину трека с шагом сетки по прямому восхождению, он должен разделить длину шага сетки на $\cos(\delta)$, где δ — склонение в том месте, где измеряется сетка.

При печати размер изображения может варьироваться, поэтому в проверке следует ориентироваться на измерения участников, не требуя точного совпадения с авторскими. Пример измерений треков звезд:

- измерение 1: $\ell_1 = 9$ мм,
- измерение 2: $\ell_2 = 8$ мм,
- измерение 3: $\ell_3 = 8$ мм.

Шаг сетки $L = 47$ мм. Угловое смещение за все время съемки:

$$\theta = \frac{9 \text{ мм} + 8 \text{ мм} + 8 \text{ мм}}{3 \cdot 47 \text{ мм}} \cdot 3600'' \approx 638''.$$

Тогда угловая скорость кометы:

$$\omega = \frac{638''}{60 \text{ мин}} = 10.6''/\text{мин},$$

что достаточно близко к данным MPC (Minor Planet Center) — $10.9''/\text{мин}$.

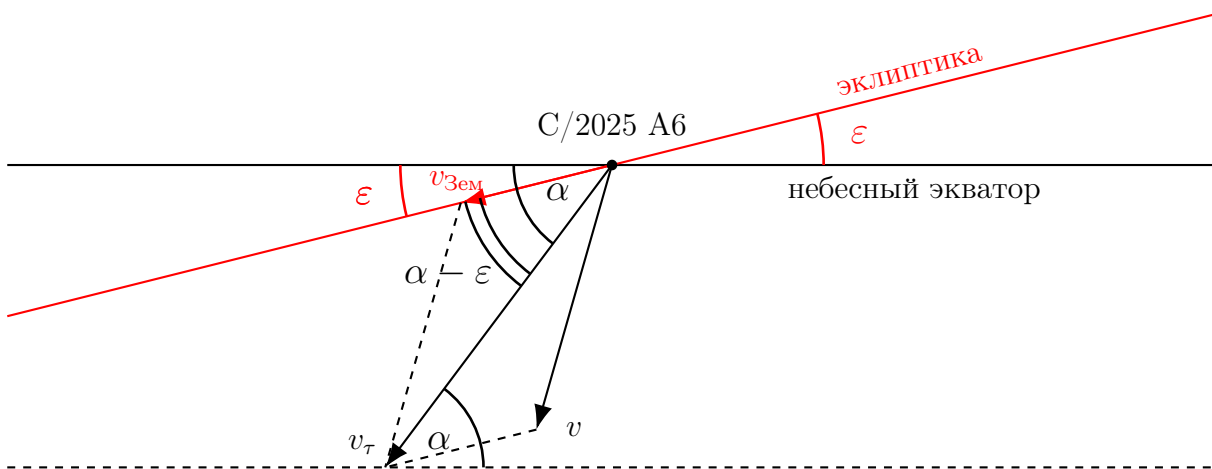
Зная угловую скорость и расстояние, определим тангенциальную скорость кометы:

$$v_\tau = \omega \cdot r = \frac{10.6''/\text{мин} \cdot 0.6 \text{ а. е.} \cdot 15 \cdot 10^7 \text{ км/а. е.}}{206265'' \cdot 60 \text{ с/мин}} = 77.1 \text{ км/с}.$$

Здесь r — расстояние Земля — комета. Поскольку комета не меняла свое расстояние относительно Земли, лучевая скорость $v_r = 0$, и полная скорость равна тангенциальной.

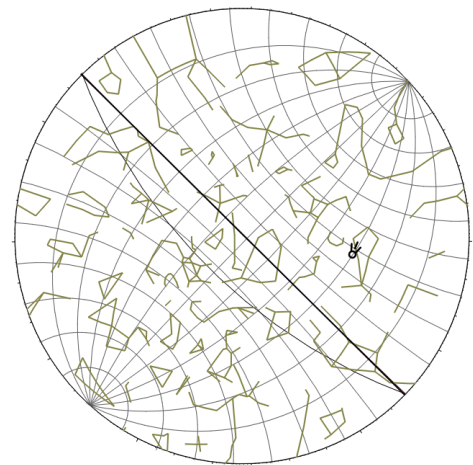
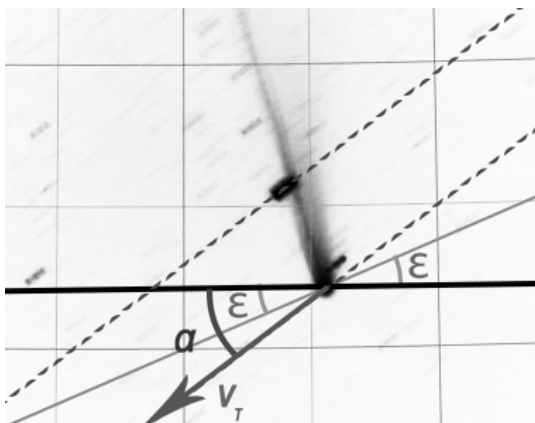
Для объекта Солнечной системы эта скорость слишком высока. Вспомним, что наблюдения проводятся с движущейся Земли, значит, мы получили относительную скорость. Комета движется по ретроградной орбите, что объясняет большую величину скорости: суммируются скорость Земли и проекция скорости кометы на эклиптику.

Представим как в пространстве расположены вектора скорости Земли и кометы. У Земли вектор скорости лежит в плоскости эклиптики, у кометы он направлен в противоположную сторону, т. к. орбита ретроградная, и лежит под некоторым углом к эклиптике. Определим этот угол.



Здесь v_τ — найденная выше относительная тангенциальная скорость. v — искомая пространственная скорость. $v_{Зем}$ — составляющая относительной скорости кометы, возникающая из-за орбитального движения Земли, ε — угол между небесным экватором и эклиптикой.

Если бы комета находилась на прямом восхождении 180° , этот угол составлял бы 23.5° . Фактически это не так. Оценим этот угол. С одной стороны, комета в созвездии Волопас, и это уже дает представление о расположении эклиптики, с другой стороны, можно не знать положение Волопаса на небе, а заметить, что прямое восхождение ($221^\circ = 14^h 44^m$) соответствует области неба между осенним равноденствием и зимним солнцестоянием, и здесь эклиптика расположена под углом меньшим, чем 23.5° , к экватору. Расчёты можно провести с $\varepsilon = 23.5^\circ$, а затем проверить насколько изменение угла влияет на ответ (незначительно).



Пусть α — угол между вектором относительной тангенциальной скорости кометы и небесным

экватором, этот угол можно измерить на снимке: $\alpha = 35^\circ$.

Величину пространственной скорости v получим из треугольника по теореме косинусов (в пределах $\delta = 30^\circ$ используем плоское приближение):

$$v^2 = v_{\text{Зем}}^2 + v_{\tau}^2 - 2 \cdot v_{\text{Зем}} \cdot v_{\tau} \cdot \cos(\alpha - \varepsilon),$$

$$v = \left((30 \text{ км/с})^2 + (77.1 \text{ км/с})^2 - 2 \cdot 30 \text{ км/с} \cdot 77.1 \text{ км/с} \cdot \cos(11.5^\circ) \right)^{\frac{1}{2}} \approx 48.1 \text{ км/с}.$$

В действительности в день съёмки скорость кометы составила 51.8 км/с. И если произвести вычисления, используя орбитальную скорость Земли в этот день (29.8 км/с) и с учётом фактического наклона эклиптики к небесному экватору в этой точке, то ответ получится ближе к действительности.

Содержание

10.7. Орлиный глаз	2
10.8. Древние часы	7
10.9. Светит мазер, светит ясный. . .	12

10.7. Орлиный глаз

Т.В. Мигаль, Е.К. Тюттикова

Посмотрите на негатив фотографии, приведенный ниже, и оцените как можно более точно высоту Солнца над горизонтом в момент съемки. Длина Международной космической станции равна 109 м, ширина – 73 м, высота ее орбиты – 400 км. Считайте, что нижний край фотографии совпадает с альмукантаратом.

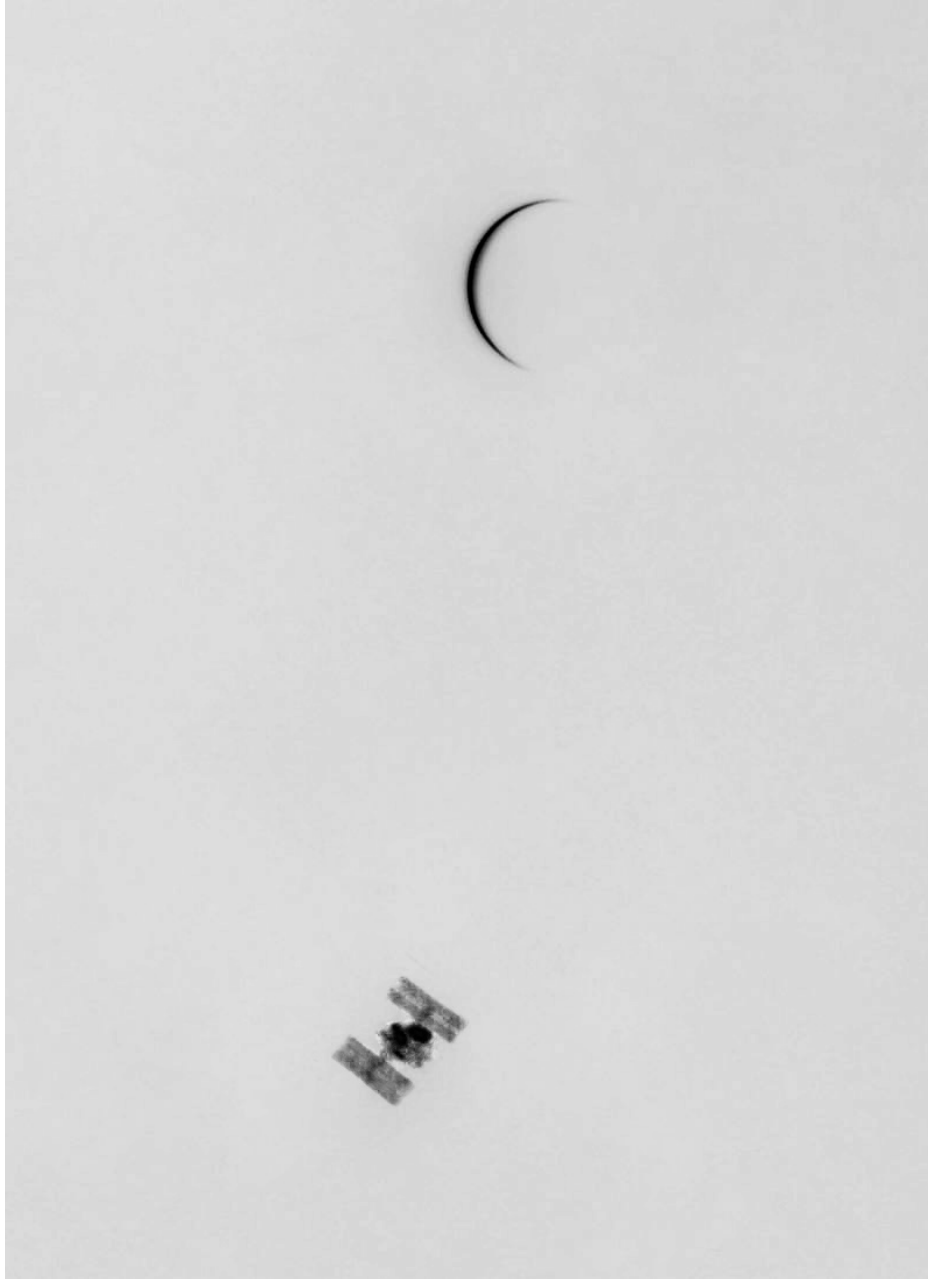


Рис. 1: Фотография к задаче «Орлиный глаз»

Решение.

Сначала отождествим объекты на фото. Внизу кадра находится Международная космическая станция, её можно легко опознать по характерной форме солнечных батарей. В верхней

части кадра находится некоторый объект сферической формы в малой фазе. По фазе объекта можно сразу определить, что это не внешний объект Солнечной Системы, и уж тем более не объект за её пределами. Также можно понять, откуда сделано фото: если мы предположим, что сделано оно было не с поверхности Земли, а на подлете к МКС, и отождествим сферический объект как Луну, то получим характерный размер МКС $15 - 20'$, что соответствует расстоянию до станции в $15 - 20$ км. При таком расстоянии мы бы не получили настолько размытое и некачественное фото станции, а, значит, расстояние до неё существенно больше, а объект на фото не является Луной. В итоге получаем, что фото было снято с поверхности Земли. Проведем оценку его углового размера, сравнивая с возможными угловыми размерами МКС. Для этого сначала поймем, под каким углом к нам видна станция. Заметим, что прямые углы солнечных батарей на фото остались прямыми, а значит, сжатие из-за поворота станции относительно картинной плоскости, если оно и есть, происходит только по ширине или длине. Измерим их соотношение на фото. Получили 9.0 усл. ед. в длину и 6.5 усл. ед. в ширину.

$$\frac{6.5}{9} = 0.72 > \frac{73}{109} = 0.67$$

Получается, что на фото соотношение ширины и длины немного больше, чем в реальности, то есть станция слегка повернута так, что ее кажущаяся длина чуть меньше реальной, а ширина практически не искажена. Значит, именно значением ширины станции мы будем пользоваться при дальнейших расчетах. Также мы будем использовать значение для длины МКС, если бы она располагалась в картинной плоскости. Оно равно $9.0 \cdot 0.72 / 0.67 = 9.7$ усл. ед.

Определим возможные угловые размеры МКС при наблюдении с поверхности Земли:

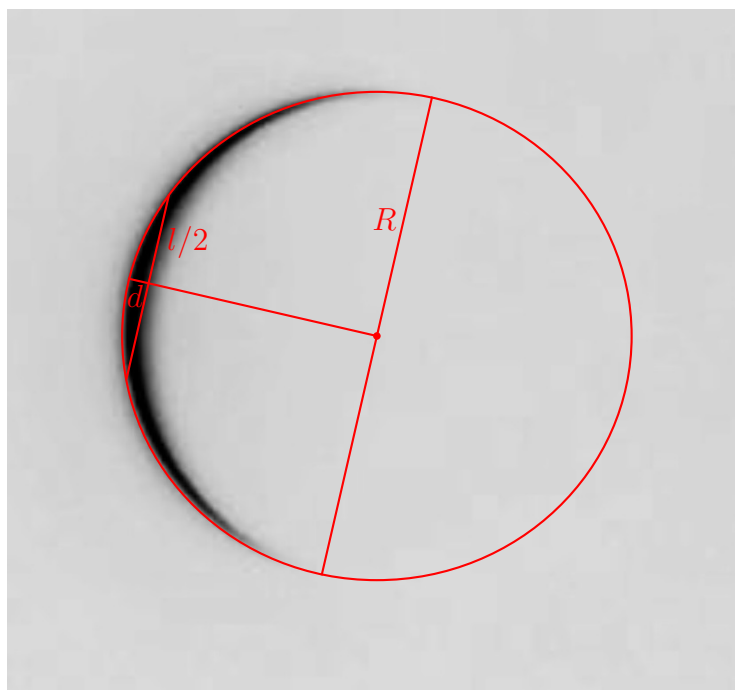
$$\alpha_{max} = \frac{l}{H} = \frac{109}{400 \cdot 10^3} = 56'' - \text{максимальный угловой размер МКС, в зените.}$$

$$\alpha_{min} = \frac{l}{\sqrt{(R_{\oplus} + H)^2 - R_{\oplus}^2}} = \frac{109}{2290} = 10'' - \text{минимальный угловой размер, у горизонта.}$$

При этом диаметр верхнего объекта равен 14.2 усл. ед. Таким образом, его угловой размер составляет от $15''$ (в случае минимального размера МКС) до $80''$ (при максимальном размере МКС). Значит, нам не подходят ни Луна (угловой размер около 0.5° , ни Меркурий (максимальный угловой размер $11''$). Таким образом, остаётся единственный возможный кандидат на объект сверху на фото – Венера.

Теперь мы можем более точно определить угловой масштаб фотографии, для этого определим фазу Венеры. Измерим диаметр планеты и хорду, проведенную по касательной к внутренней части серпа в самом толстом его месте. Получим, что длина хорды равна 0.79 радиуса Венеры. Значит, по теореме Пифагора можно найти фазу:

$$\Phi = \frac{1}{2R} \left(R - \sqrt{R^2 - (0.79R/2)^2} \right) = 0.041$$



Тогда фаза равна 0.041, а фазовый угол – 156.6° . Острые углы при Солнце (γ) и Земле (β) можно найти из системы уравнений:

$$\gamma + \beta = 180^\circ - 156.6^\circ = 23.4^\circ$$

$$\frac{\gamma}{\beta} = \frac{a_{\oplus} - a_{\text{♀}}}{a_{\text{♀}}} = 0.39$$

Отсюда получаем $\beta = 16.8^\circ$ – угловое расстояние от Венеры до Солнца. $\gamma = 6.6^\circ$

Вычислим более точное расстояние до Венеры:

$$r = \sqrt{a_{\oplus}^2 + a_{\text{venus}}^2 - 2a_{\oplus}a_{\text{venus}} \cos \gamma} = 0.30 \text{ a.e.}$$

Угловой размер Венеры:

$$\alpha_{\text{♀}} = \frac{2 \cdot 6050}{0.30 \cdot 1.5 \cdot 10^8} = 55.5''.$$

Получаем масштаб снимка: 1 усл. ед. = $3.9''$. На расстоянии МКС 109 метров видны под углом $3.9 \cdot 9.7 = 37.9''$. А расстояние от наблюдателя до МКС равно $r_1 = 590$ км.

В треугольнике «МКС – наблюдатель – центр Земли» запишем теорему косинусов и выразим угол при наблюдателе:

Ранее мы уже получили угловое расстояние между Венерой и Солнцем, оно равно 16.8° . Расстояние между Венерой и МКС составляет порядка $5'$ и с нашей точностью пренебрежимо мало. Измерим угол в картинной плоскости с центром в Венере между направлениями на зенит и на Солнце. Сделать это можно, проведя вертикальную прямую (в направлении зенита,

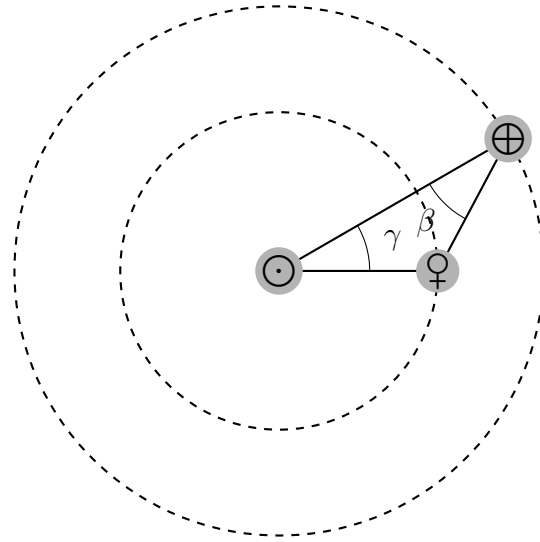


Рис. 2: Взаимное расположение планет и Солнца

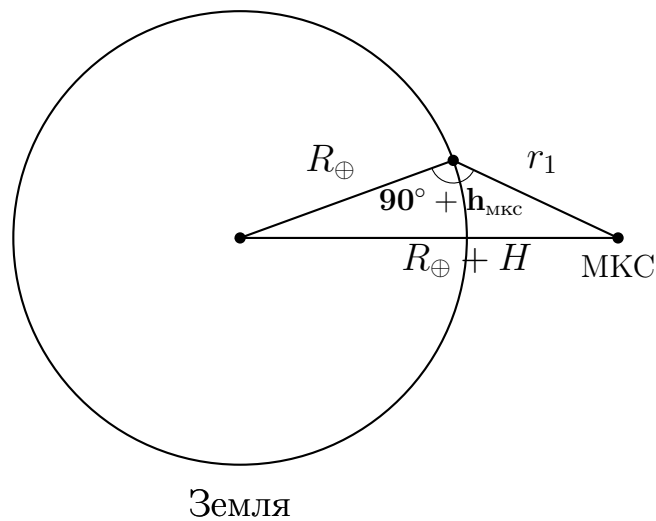


Рис. 3: Расположение MKC относительно точки проведения съемки

так как по условию горизонтальные линии - альмукуантараты) и перпендикуляр к линии, соединяющей концы серпа Венеры (направление на Солнце) и измерив угол между этими линиями. Этот угол получился равным $\theta = 77^\circ$.

Для треугольника «Венера – Солнце – зенит» запишем сферическую теорему косинусов и найдем таким образом высоту Солнца:

$$\cos(90^\circ - h_\odot) = \cos(90^\circ - h_{\text{МКС}}) \cos \beta + \sin(90^\circ - h_{\text{МКС}}) \sin \beta \cos \theta$$

$$h_\odot = \arcsin(\sin h_{\text{МКС}} \cdot \cos \beta + \cos h_{\text{МКС}} \sin \beta \cos \theta) = 42.4^\circ \sim 42^\circ$$

Если же мы считаем, что фото перевернуто и горизонт находится сверху, то теорема косинусов примет следующий вид:

$$\cos(90^\circ - h_\odot) = \cos(90^\circ - h_{\text{МКС}}) \cos \beta + \sin(90^\circ - h_{\text{МКС}}) \sin \beta \cos(180^\circ - \theta)$$

$$h_\odot = \arcsin(\sin h_{\text{МКС}} \cdot \cos \beta + \cos h_{\text{МКС}} \sin \beta \cos(180^\circ - \theta)) = 35.2^\circ \sim 35^\circ$$

Итоговый ответ: высота Солнца составляет 42° или 35° в зависимости от ориентации картинка.

10.8. Древние часы

А. В. Соколов

При раскопках древней обсерватории была обнаружена шкала настенных солнечных часов. Ни гномона, ни информации о месте размещения часов не сохранилось. Используя данную шкалу, определите широту места размещения часов и угол поворота вертикальной стены, на которой они были размещены, относительно направления на юг.

На шкале точка В – это точка, к которой монтируется гномон, направленный на полюс мира; точка А – проекция вершины гномона на плоскость стены. точка D – вершина гномона. Нижний край изображения расположен параллельно горизонту. Также добавлена схематическая вставка, поясняющая устройство гномона.

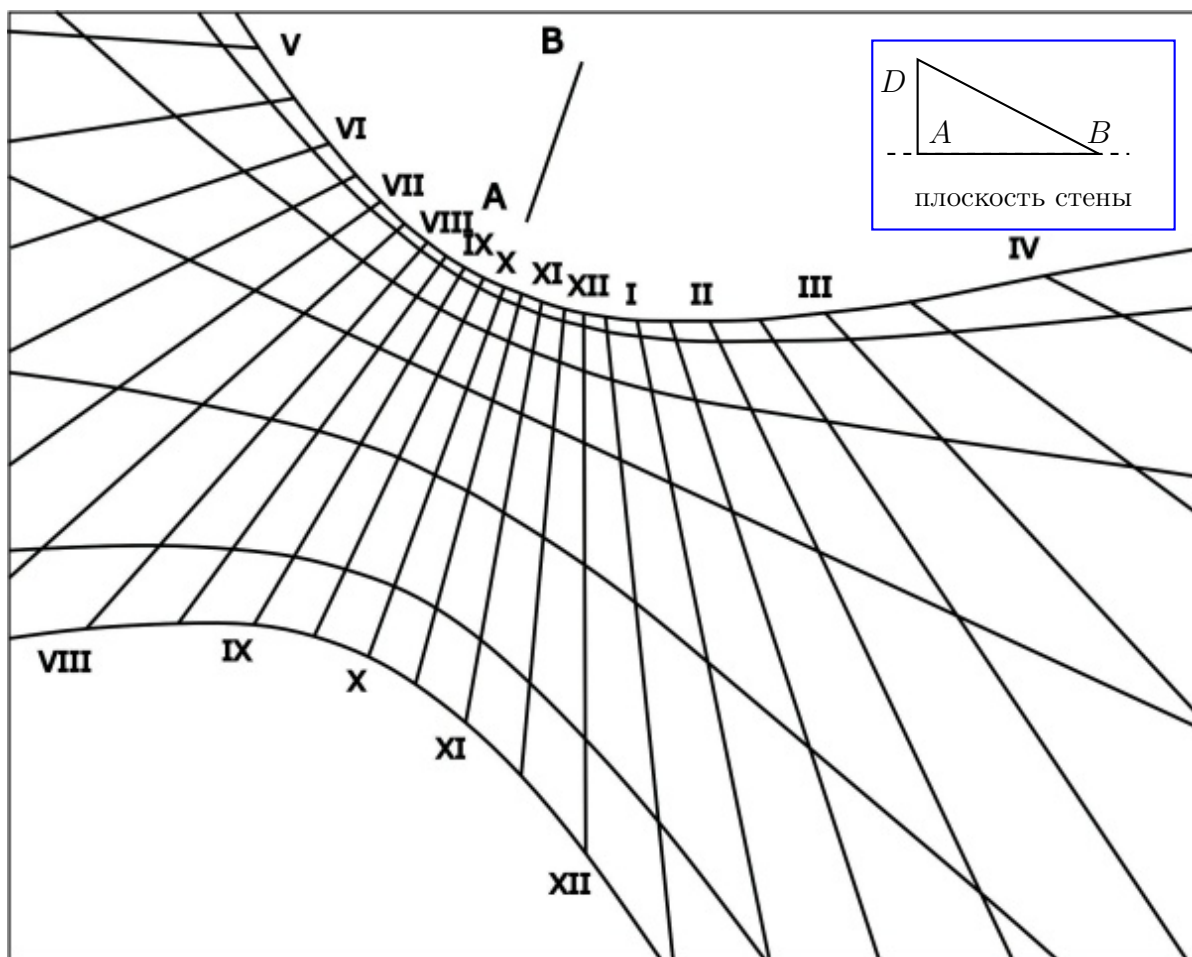


Рис. 4: Шкала настенных часов. Вставка, поясняющая, как устроен гномон, сделана не в масштабе.

Решение.

Прежде чем что-то снимать с изображения, проанализируем, что нам представлено.

На чертеже обозначена точка А – проекция вершины гномона на плоскость стены. Размечена часовая сетка, и линия XII – XII является вертикальной, потому что азимут Солнца в момент верхней кульминации одинаковый во все дни года. В остальное время, например, в 11 часов, азимут Солнца в разные дни года будет разным.

Определимся с полушарием. Суточное движение Солнца происходит с востока на запад в обоих полушариях. И если полушарие северное, то часовые отметки должны быть расположены на стене слева направо. А в южном полушарии – наоборот. Видим, что перед нами часы для северного полушария.

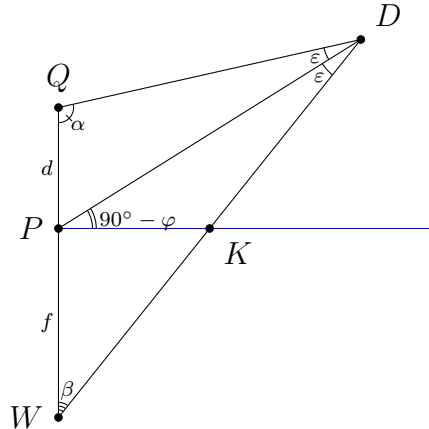
Две кривые, размеченные римскими цифрами, – это точки, где заканчивается тень гномона. В отличие от горизонтальных солнечных часов, тень на вертикальных часах тем длиннее, чем выше Солнце. Ближняя к гномону граница тени соответствует дню зимнего солнцестояния в северном полушарии, дальняя граница (видна частично с отметками от VIII до XII) соответствует дню летнего солнцестояния. Прямая линия посередине между ними – это траектория, по которой двигается конец тени в дни равноденствий.

Если бы стена стояла строго по линии восток – запад, а гномон был направлен строго на юг, то картинка была симметричной относительно вертикальной оси рисунка.

Для поиска широты нам нужно рассмотреть плоскость небесного меридиана, которая содержит в себе линию XII-XII.

Первый этап. Определение широты.

Проанализируем размер тени по полуденной линии (XII-XII) в дни равноденствий и солнцестояний. Рассмотрим следующий рисунок, на котором покажем, как образуются тени в дни равноденствий и солнцестояний. Линия QPW – вертикальная поверхность стены. Точка D – вершина гномона, P – тень в дни равноденствий, Q и W – тени в дни зимнего и летнего солнцестояний. Угол ε – угол наклона плоскости эклиптики к небесному экватору.



Измерим отрезки $PQ = d = 16$ мм и $PW = f = 50$ мм по рисунку, данному в условии. Далее запишем теорему синусов для треугольника PQD:

$$\frac{d}{\sin(23.5^\circ)} = \frac{DP}{\sin(\alpha)}$$

Также запишем теорему синусов для треугольников PWD:

$$\frac{f}{\sin(23.5^\circ)} = \frac{DP}{\sin(\beta)}$$

Для треугольника QDW применим теорему о сумме углов:

$$\alpha + \beta = 180^\circ - 2\varepsilon = 180^\circ - 2 \cdot 23.5^\circ = 133^\circ.$$

Теперь запишем отношение выражений, полученных из теоремы синусов:

$$\frac{\frac{d}{\sin(23.5^\circ)}}{\frac{f}{\sin(23.5^\circ)}} = \frac{\frac{\rho}{\sin(\alpha)}}{\frac{\rho}{\sin(\beta)}}.$$

Таким образом получаем:

$$\frac{d}{f} = \frac{\sin(\beta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(133^\circ - \alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(133^\circ)\cos(\alpha) - \cos(133^\circ)\sin(\alpha)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(133^\circ)}{\operatorname{tg}(\alpha)} - \cos(133^\circ),$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{\sin(133^\circ)}{d/f + \cos(133^\circ)} \approx -2.02.$$

В итоге получаем значения $\alpha = 116^\circ$ и $\beta = 133^\circ - \alpha = 17^\circ$.

Теперь рассмотрим треугольник PKW. Его внешний угол $\angle PKD$ можно найти как сумму углов $\angle KPW = 90^\circ$ и $\angle PWK = \beta$. Получаем $\angle PKD = 90^\circ + \beta = 107^\circ$. Используя теорему о сумме углов для треугольника PKS, получим:

$$\varphi = 90^\circ - (180^\circ - \angle PKD - \varepsilon) = 107^\circ + 23.5^\circ - 90^\circ = 40.5^\circ \text{ с.ш.}$$

.

Теперь перейдем ко **второму вопросу задачи**. Определим угол поворота стены от линии «восток – запад». Обозначим этот угол за α .

Мы можем решать стереометрическую задачу и подумать над какой-то плоскостью, в которой искомый угол можно представить максимально удобно. В качестве такой плоскости возьмем плоскость параллельную горизонту и проведем ее через точку А.

Проекция этой плоскости на рисунок – горизонтальная линия, проходящая через точку А и точку пересечения линии равноденствий и линии VI – VI. Обозначим эту точку V, сюда указывает тень гномона в момент восхода Солнца в дни равноденствий.

Теперь выполним построение в этой плоскости. Отрезок VD соответствует направлению запад-восток. Точка B' – проекция точки В на луч VA. Отрезок BD направлен вдоль оси мира в сторону юга. Значит его проекция $B'D$ лежит в плоскости горизонта и направлено на точку юга. Следовательно $B'D \perp VD$.

Для треугольника ADV

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AD}{AV}$$

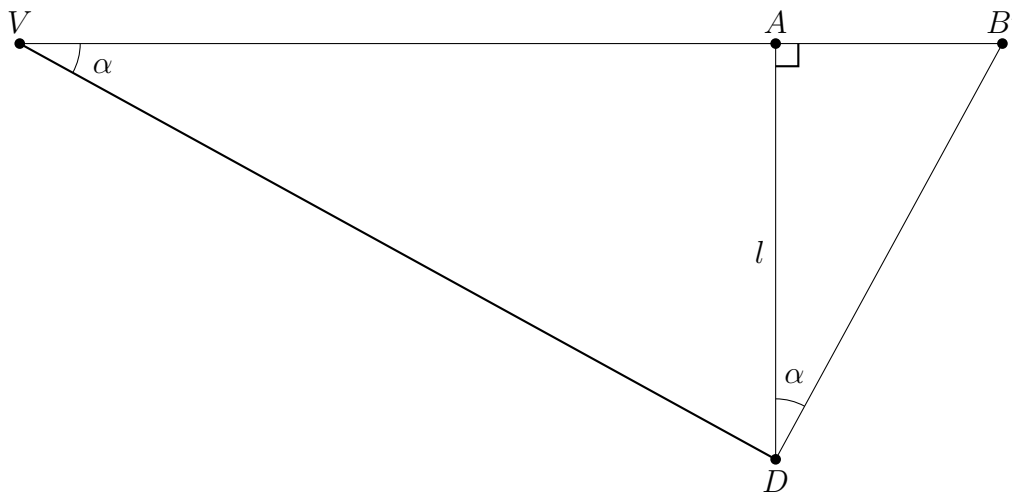


Рис. 5: Поясняющая схема ко второму вопросу задачи. Рисунок в плоскости параллельной горизонту и проходящей через точку А.

Для треугольника $AB'D$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{AB'}{AD}.$$

Избавимся от AD :

$$\operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{AB'}{AV}.$$

Снимем данные со шкалы: $AV = 52$ мм, $AB' = 8$ мм. Тогда угол $\alpha \approx 21^\circ$.

То есть нормаль к плоскости стены повернута на -21° относительно направления на юг по азимуту, или 21° на восток.

Альтернативные решения.

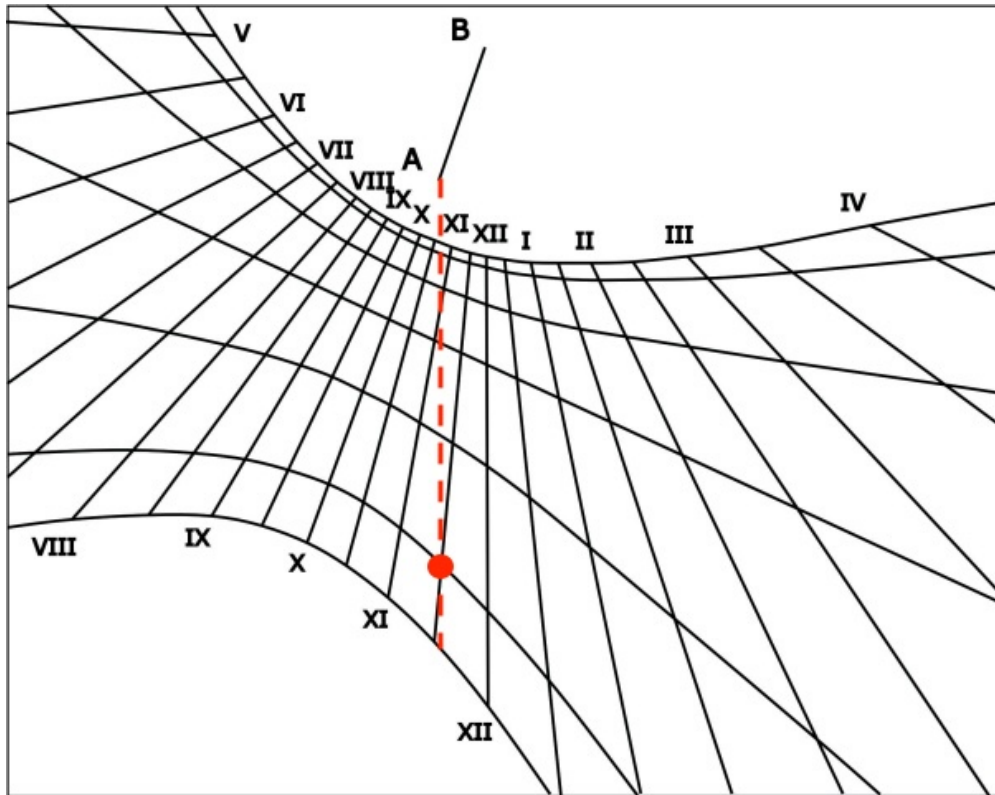
Можно было действовать и по-другому. Заметим, что прямая, соответствующая времени 10 часов, идёт точно в точку А. Значит, любой объект, образующий точки на этой прямой и её продолжении, имеет часовой угол -30° . Рассмотрим гипотетическое Солнце, в предположении, что его склонение могло бы быть и меньше, чем $-\varepsilon$. Тогда тень от вершины гномона придёт в точку А, когда такое Солнце окажется на горизонте. При этом, так как точка А лежит на прямой 10 часов, часовой угол Солнца в этот момент будет равен -30° . Также из вида картинки мы понимаем, что гномон смотрит в восточную область. Понятно, что азимут такого Солнца в момент, когда тень от вершины гномона будет в точке А, и есть азимут, на который показывает гномон. Осталось найти азимут такого Солнца. Используем формулы для часового угла/азимута восхода/захода:

$$\cos t = -\tan \varphi \tan \delta.$$

Подставляя известные нам φ и t , получаем $\delta = -45.4^\circ$. В итоге получаем азимут восхода Солнца, эквивалентный азимуту, на который показывает гномон:

$$\cos A = -\frac{\sin \delta}{\cos \varphi} \Rightarrow A \approx -20.5^\circ$$

Рассмотрим ещё один способ.



Опустим из точки A перпендикуляр вниз. Все точки на этой прямой – это позиции конца тени гномона в моменты, когда Солнце имеет один и тот же азимут. Возьмём любую точку на этой прямой и определим её часовой угол и склонение. Для простоты можно взять точку, отмеченную на рисунке. Для неё $\delta = 20^\circ$, $t = -7.5^\circ$. Теперь осталось написать сферические теоремы для параллактического треугольника. Начнём с того, что найдём зенитное расстояние Солнца в этот момент:

$$\cos z = \sin \delta \sin \varphi + \cos \delta \cos \varphi \cos t.$$

Отсюда получаем $z = 21.5^\circ$. Теперь через теорему синусов:

$$\frac{\sin 180 - A}{\sin 90 - \delta} = \frac{\sin t}{\sin z}.$$

В итоге получаем угол, на который сдвинута стена относительно линии «восток – запад»:

$$A \approx -19.6^\circ.$$

Популярная ошибка. Участники считают, что угол между лучом BA и отвесной линией являются углом поворота стены. Это принципиально не верно.

10.9. Светит мазер, светит ясный. . .

В. Б. Игнатьев, М. В. Кузнецов

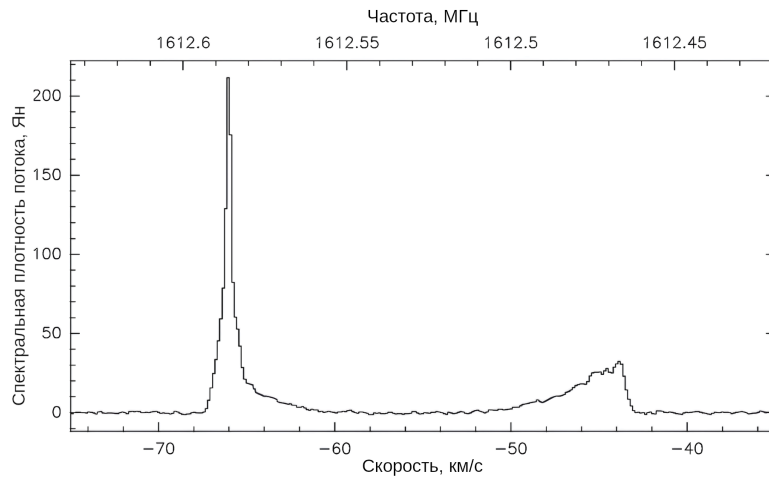
В газопылевых оболочках, окружающих звезды-гиганты на поздних стадиях эволюции, иногда наблюдаются источники мазерного излучения. В этой задаче мы не будем касаться природы мазеров: важно, что каждый отдельный мазер можно считать точечным объектом, а его излучение — монохроматическим. Мазеры концентрируются в тонких сферических оболочках, радиусы которых много больше размеров фотосферы звезды. Источником энергии для мазеров является излучение звезды: переменность звезды приводит к переменной яркости мазеров.

Вам предоставлены графики, полученные при исследовании области $\text{OH}127.8 + 0.0$:

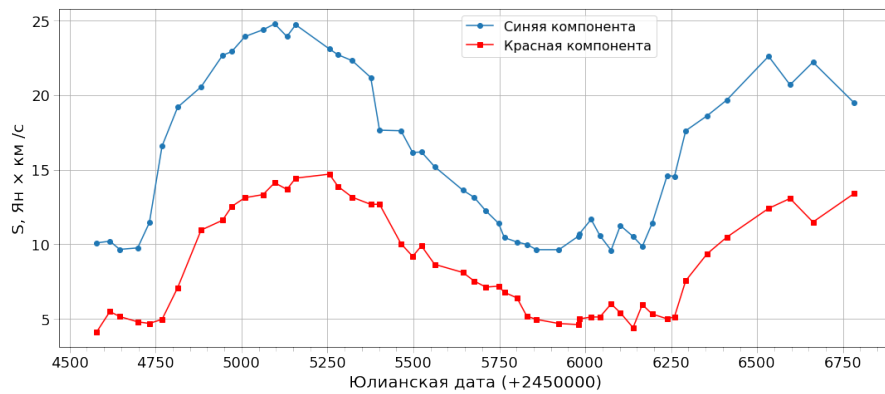
- А.** Спектр мазерного излучения этой области, содержащей много отдельных мазеров. По горизонтальной оси сверху отложена частота наблюдения, а снизу — соответствующая ей доплеровская скорость. По вертикальной оси отложена спектральная плотность потока в янских ($1 \text{ Ян} = 10^{-26} \text{ Вт}/(\text{м}^2 \text{ Гц})$). Одна из ярких компонент линии соответствует части оболочки, движущейся от звезды к наблюдателю («синяя компонента»), а другая — в противоположную сторону («красная» компонента).
- В.** Зависимость относительной интенсивности «синей» и «красной» компонент от времени.
- С.** Зависимость углового расстояния отдельных мазеров от звезды от их лучевых скоростей.

Определите:

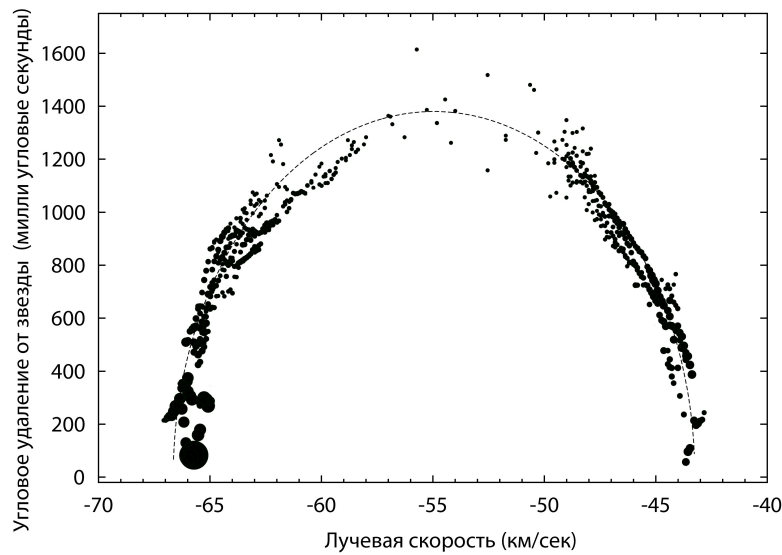
- А)** Лабораторную частоту исследуемой мазерной линии с точностью до 10 кГц;
- В)** Линейный размер области мазерного излучения (в астрономических единицах);
- С)** Расстояние до исследуемой области (в парсеках);
- Д)** Является ли объект внегалактическим, принадлежит нашей Галактике или является объектом Солнечной системы?



(a) Спектр области мазерного излучения.



(b) Кривая блеска мазерного излучения



(c) Зависимость углового расстояния от звезды отдельных мазеров от их лучевых скоростей.

К задаче 2

Решение. Для ответа на первый вопрос необходимо вспомнить формулу доплеровского смещения спектральных линий. Пусть λ и λ_0 – наблюдаемая и лабораторная длины волн, v – радиальная скорость излучателя относительно наблюдателя, c – скорость света. Тогда изменение длины волны света из-за движения источника выражается формулой:

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{v}{c}.$$

Но нам на спектре дана шкала частот, а не длин волн. Частота излучения связана с длиной волны как $\nu = c/\lambda$. Тогда левая часть формулы для эффекта Доплера принимает вид

$$\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{\frac{c}{\nu} - \frac{c}{\nu_0}}{\frac{c}{\nu_0}} = \frac{\nu_0 - \nu}{\nu}.$$

Отсюда получаем зависимость ν_0 от ν и v :

$$\nu_0 = \left(1 + \frac{v}{c}\right) \nu.$$

Определив на спектре пару значений ν и v , получим $\nu_0 = 1612.23$ МГц. Разумеется, измерений следует сделать несколько, а результат усреднить.

Альтернативный вариант. Можно заметить, что на графике равным изменениям скорости соответствуют равные изменения частоты. Это следует из формулы эффекта Доплера:

$$\Delta\nu = \nu_2 - \nu_1 = \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_2}{c}} - \frac{\nu_0}{1 + \frac{v_1}{c}} \approx \nu_0 \left(1 - \frac{v_2}{c}\right) - \nu_0 \left(1 - \frac{v_1}{c}\right) = -\frac{\Delta v}{c} \nu_0.$$

Таким образом, достаточно аккуратно определить разность частот, соответствующую изменению скорости на фиксированную величину, и с ее помощью вычислить частоту, соответствующую нулевой скорости. Разумеется, результат при этом получается такой же: $\nu_0 = 1612.23$ МГц.

Обратим внимание на зависимость потока излучения для «красной» и «синей» компонент. Изменения повторяют друг друга, но «красная» компонента запаздывает по отношению к «синей» примерно на 60 дней. Почему так происходит? Источником энергии для мазеров является излучение звезды. Звезды-гиганты на поздних стадиях эволюции обычно переменные, и изменения в яркости звезды сказываются на яркости мазеров в окружающей звезду оболочке. Поскольку оболочка сферическая, мощность излучения изменяется у всех мазеров одновременно, а видимая нами задержка возникает из-за конечности скорости света и громадной величины оболочки. Следовательно, диаметр области мазерного излучения равен 60 световых дней или

$$D = 60 \text{ св. дней} = 60 \cdot 86\,400 \text{ с} \cdot 300\,000 \text{ км/с} \approx 1.56 \cdot 10^{12} \text{ км} \approx 10\,400 \text{ а. е.},$$

а ее радиус $R \approx 5200$ а. е.

Из рисунка (с) можем определить, что угловой радиус области мазерного излучения составляет $\rho'' = 1.3'' - 1.4''$. Тогда расстояние до исследуемой области равно

$$r = \frac{R}{\rho''} = \frac{5200 \text{ а. е.}}{1.3''} = 4000 \text{ пк} = 4 \text{ кпк}.$$

Для значения $\rho'' = 1.4''$ мы получили бы $r = 3.7$ кпк.

Расстояние до звезды составляет около 4 килопарсек. Это расстояние меньше, чем средний радиус нашей галактики 16 кпк, поэтому мы точно можем сказать, это объект принадлежит нашей Галактике. Разумеется, в Солнечной системе нет звезд-гигантов, поэтому ей этот объект принадлежать не может.

Замечание 1. Ответить на последний вопрос с большой степенью уверенности можно, не вычисляя расстояние. Судя по графикам, скорость звезды составляет около 55 км/с, что соответствует характерным относительным скоростям в диске нашей Галактики. Скорости галактик составляют обычно сотни и даже тысячи километров в секунду, хотя, конечно, нельзя на сто процентов утверждать, что не найдется близкая галактика, в которой объект движется с подходящей скоростью.

Разумно также заметить, что для внегалактических источников, «подсвечиваемых» излучением звезды, угловой размер $\sim 2''$ слишком велик.

Замечание 2. По условию, наблюдаемое излучение формируется в тонкой оболочке, окружающей звезду. Оболочка вместе со звездой движется относительно наблюдателя и вместе с тем удаляется во все стороны от звезды. Тогда разность скоростей приближающейся и удаляющейся от нас компонент спектра равна удвоенной скорости расширения. Измерения можно провести как по спектру, так и по зависимости углового расстояния от лучевой скорости. Искомое значение равно 11 – 11.5 км/с.

Типичная ошибка заключается в попытке оценить размер области излучения по характерной скорости расширения оболочки и периоду «колебаний» яркости звезды ($P \approx 1500$ сут. между двумя максимумами интенсивности). В таком случае радиус области (некорректно) оценивается как $vP \approx 10$ а. е., откуда расстояние до мазера ~ 6 пк.

Лишь немногие участники, получив такую величину расстояния, сочли необходимым заметить, что в ближайших по галактическим меркам окрестностях Солнечной системы подобные звёзды-гиганты на поздних стадиях эволюции, к счастью, отсутствуют.

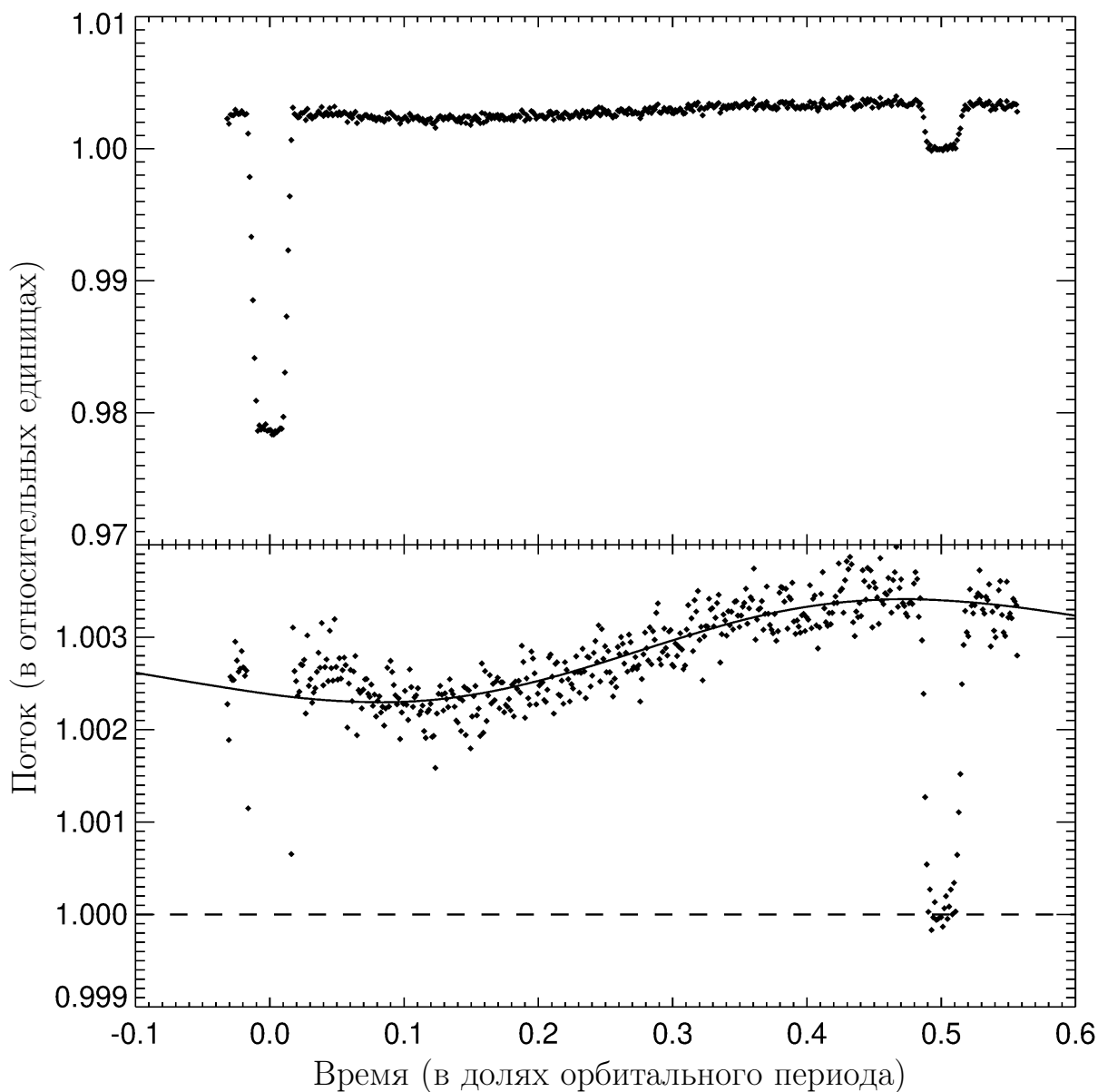
Содержание

11.7. Планета всходит и заходит	2
11.8. Геометрически точно	5
11.9. Гонки за светом	9

11.7. Планета всходит и заходит

А.А.Федотов

При наблюдениях звезды у нее транзитным методом была обнаружена планета. Определите радиус планеты и эффективные температуры ее дневной и ночной сторон, воспользовавшись кривой блеска, полученной при наблюдении на длине волны 8 мкм (для удобства кривая блеска приведена для двух разных масштабов по оси ординат). Известно, что радиус звезды равен $5.6 \cdot 10^5$ км, а ее эффективная температура $4.5 \cdot 10^3$ К.



Решение. Найдем потоки, обусловленные излучением отдельно звезды и отдельно планеты при наблюдении ее дневной и ночной сторон. Сразу заметим, что излучение звезды можно считать изотропным (разнообразные эффекты, возникающие у затменно-двойных из-за наличия второго компонента, тут существенными не будут — планета имеет сравнительно малую массу), а вот у планеты, вращение которой, по-видимому, синхронизировано с обращением вокруг звезды, температуры разных сторон существенно отличаются.

Поток, обусловленный только излучением звезды, можно определить в момент вторичного минимума («затмения» планеты звездой), когда планета заходит за звезду.

Ему соответствует менее глубокий провал на графике, так как температура планеты в любом случае заметно меньше температуры звезды, а площади, с которых в каждом из минимумов не приходит излучение, равны. Тогда, зная поток звезды, мы сможем определить потоки, приходящие с ночной и с дневной сторон планеты. Однако получить по этим данным температуры нельзя, поскольку нам неизвестен радиус планеты.

Определить радиус поможет глубина транзита (более глубокого минимума, когда планета проходит по диску звезды), Отношение его глубины за вычетом потока ночной стороны планеты к общему потоку звезды будет равно отношению площадей диска звезды и планеты или квадратов их радиусов. Важно не забыть, что пренебрегать собственным излучением планеты в этом случае нельзя (если мы не хотим получить для ее ночной стороны температуру, равную нулю).

Рассмотрим кривую блеска. Видно, что авторы статьи, из которой взяты данные, о нас позаботились: поток собственно звезды любезно принят за 1.000. Поток во время транзита составляет 0.979, а поток от ночной стороны планеты, который можно оценить по значениям на кривой блеска непосредственно рядом с транзитным участком, составляет около 0.002 потока звезды (последнее значение можно определить точнее, но поскольку мы не можем точнее найти глубину минимума в транзите, тут эта точность окажется бесполезной). Таким образом, во время транзита поток от той части диска звезды, которая закрыта планетой, составлял бы $1.000 - 0.979 + 0.002 = 0.023$, поэтому мы знаем отношение квадратов радиусов планеты $R_{\text{п}}$ и звезды $R_{\text{з}}$:

$$\left(\frac{R_{\text{п}}}{R_{\text{з}}}\right)^2 = 0.023.$$

Тем самым $R_{\text{п}}/R_{\text{з}} \approx 0.15$, и радиус планеты оказывается равным $8.4 \cdot 10^4$ км.

Теперь обратимся к нижнему графику и посмотрим на ту его часть, где видны и звезда, и планета. Учитывая, что единичный поток обеспечивается звездой, находим, что поток дневной стороны планеты равен 0.0034, а ночной — 0.0023. Поскольку наблюдения проводятся на одной конкретной длине волны и в спектральной полосе постоянной ширины, то поток пропорционален чернотельной интенсивности $B_{\lambda}(T)$ для соответствующей температуры на длине волны $\lambda = 8$ мкм, умноженной на площадь источника. Поэтому температуры для дневной и ночной сторон планеты (в дальнейшем «дп» и «нп») должны удовлетворять соотношениям

$$\frac{0.023 \cdot B_{\lambda}(T_{\text{дп}})}{B_{\lambda}(T_{\text{з}})} = 0.0034 \Rightarrow \frac{B_{\lambda}(T_{\text{дп}})}{B_{\lambda}(T_{\text{з}})} = 0.15 \quad (1)$$

и

$$\frac{0.023 \cdot B_{\lambda}(T_{\text{нп}})}{B_{\lambda}(T_{\text{з}})} = 0.0023 \Rightarrow \frac{B_{\lambda}(T_{\text{нп}})}{B_{\lambda}(T_{\text{з}})} = 0.10. \quad (2)$$

Вспомнив, как выглядит функция Планка

$$B_{\lambda}(T) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)^{-1},$$

понимаем, что коэффициенты перед экспонентой в любом случае сократятся.

Введем для удобства величину $\chi = \frac{hc}{\lambda kT}$. Несложно вычислить, что для звезды $\chi_{\text{з}} = 0.4$, и тогда соотношения (1) и (2) можно записать в виде

$$\chi_{\text{дп}} = \ln \left(\frac{\exp(\chi_{\text{з}}) - 1}{0.15} + 1 \right) = 1.45 \quad (3)$$

и

$$\chi_{\text{ни}} = \ln \left(\frac{\exp(\chi_3) - 1}{0.10} + 1 \right) = 1.78. \quad (4)$$

Поскольку $\chi \propto 1/T$, то отсюда следует, что

$$T_{\text{ни}} = \frac{0.4 \cdot 4.5 \cdot 10^3 \text{ K}}{1.45} = 1.2 \cdot 10^3 \text{ K}$$

и

$$T_{\text{ни}} = \frac{0.4 \cdot 4.5 \cdot 10^3 \text{ K}}{1.78} = 1.0 \cdot 10^3 \text{ K},$$

что близко к результатам, полученным в статье Knudson et al., Nature, v. 447, pp. 183–186, из которой и были взяты данные, положенные в основу этой задачи.

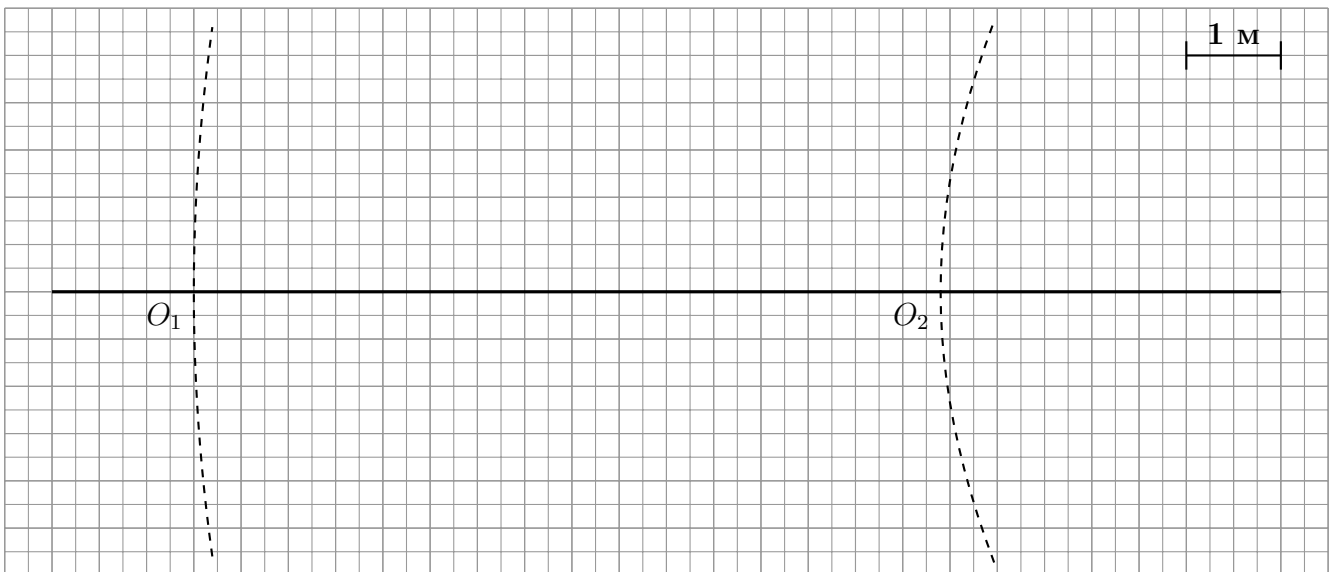
Осталось объяснить одну странность, на которую, возможно, обратили внимание решавшие задачу. На нижнем из двух графиков выполнено сглаживание кривой блеска на участках, когда поток регистрируется и от звезды, и от планеты. Наличие синусоидальной зависимости понятно: это следствие того, что планету мы видим с разных сторон и ее поток меняется в зависимости от ее ориентации. Однако минимумы и максимумы этой синусоиды несколько смещены по отношению к положению минимумов на кривой блеска, из чего можно сделать дополнительный важный вывод: распределение температуры на поверхности планеты смещено относительно прямой «звезда – планета», самое горячее место на планете находится не в подзвездной точке, а смещено от нее. Более тщательная обработка исходных данных показала, что смещение составляет около 30° .

11.8. Геометрически точно

В.В.Григорьев

Вам дана заготовка схемы (с указанным масштабом) зеркального телескопа, состоящего из первичного параболического собирающего зеркала диаметром $D_1 = 260$ см с относительным отверстием $1 : 3.85$ и вторичного рассеивающего гиперболического зеркала с фокусным расстоянием $F_2 = -275$ см. В точках O_1 и O_2 соответственно эти зеркала пересекают главную оптическую ось. Диаметр поля зрения телескопа составляет $19'25''$.

- Определите тип оптической системы (название) и ее эффективное фокусное расстояние F .
- Изобразите оба зеркала строго в соответствии с их геометрическими характеристиками, укажите эти характеристики на чертеже, поглощающую часть обозначьте штриховкой или закрасьте, считая, что толщина зеркал не превышает 25 см.
- Изобразите ход хотя бы одного луча **внутри трубы телескопа** от звезды, находящейся в центре поля зрения, до фокальной плоскости.
- Какое минимальное число одиночных кадров потребуется для получения изображения спиральной галактики с угловыми размерами $6' \times 1'$, если в фокальной плоскости установлена идеальная ПЗС-матрица разрешением 2048×2048 с пикселями размером 5×5 мкм?
- Назовите телескоп или укажите его местоположение, если известно, что он находится на территории бывшего СССР.



Решение. Система телескопа с параболическим объективом и гиперболическим вторичным зеркалом является системой Кассегрена. В классической схеме Кассегрена фокусы первичного и вторичного зеркал совпадают, но их допускается разнести, например, для изменения выноса фокуса. В больших телескопах порой изменение положения вторичного зеркала используется для фокусировки телескопов. Заметим, что фокусное расстояние зеркала и фокусное расстояние гиперболы как математической кривой — разные понятия, и их не следует путать.

Относительное отверстие объектива позволяет рассчитать его фокусное расстояние $F_1 = 2.6 \cdot 3.85 = 10$ м. Благодаря имеющемуся масштабу можно обозначить часть

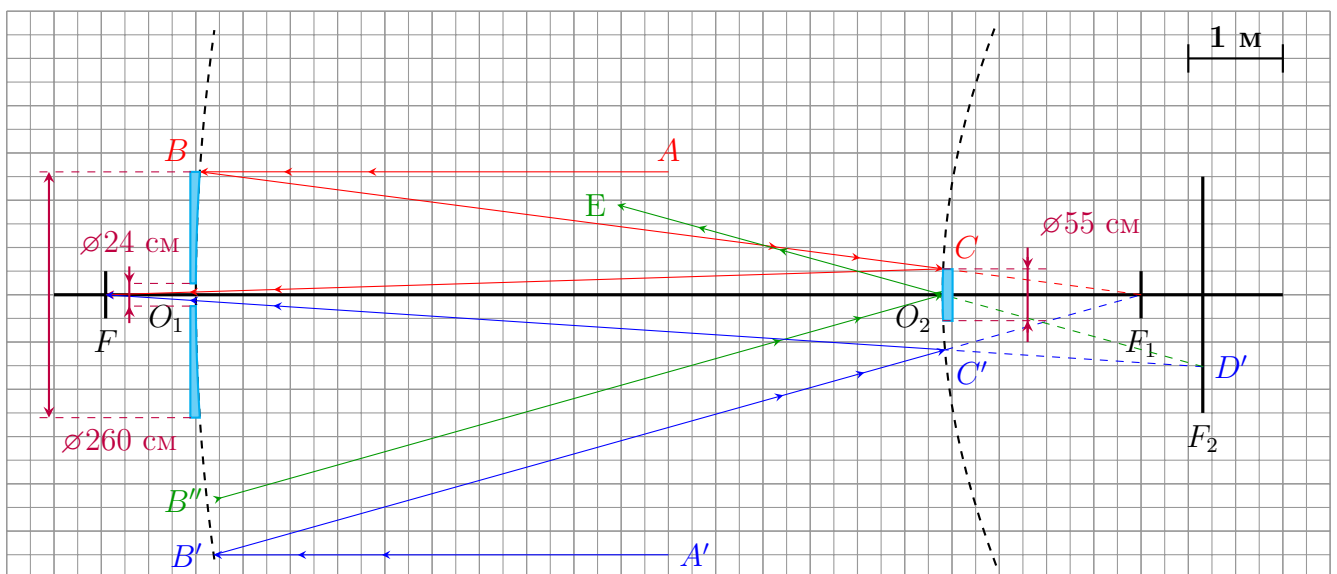
параболы, реально являющуюся зеркалом, однако стоит помнить, что в системе Кассегрена фокус выносится за главное зеркало, так что в нем необходимо будет сделать отверстие. Также отметим, что расстояние между центрами зеркал вдоль оптической оси $|O_1O_2| = 7.9$ метра, которое получается из масштаба схемы при помощи линейки.

Далее найдем положение фокальной плоскости телескопа (эффективного фокуса). Это можно сделать двумя разными способами. Будем считать, ввиду малого поля зрения можно рассматривать гиперболическое зеркало с заданным фокусным расстоянием как параксиальное рассеивающее зеркало (фактически, заменив его сферическим). Так как из условия напрямую следует, что фокусы заданных поверхностей не совпадают, то оптическое свойство гиперболы неприменимо.

Вариант 1. Получение эффективного фокуса геометрически

Обратим внимание, что параболическая поверхность нам дана довольно большого диаметра (больше размеров объектива), значит, можно использовать этот факт для более точных построений. На рисунке ниже путь такого луча будет обозначен **синим** цветом. **Красный** же луч является лучом, попадающим в край главного зеркала, то есть идущим в пределах трубы телескопа, но он также подходит для подобного построения.

Отметим фокус F_1 первичного зеркала на чертеже и построим луч $A'B'$, параллельный главной оптической оси: после отражения он пересечет ее в фокусе. Однако, дальше гиперболического зеркала луч не пойдет (попав в точку C'), отразившись в обратную сторону, поэтому участок до фокуса обозначен пунктиром. Куда именно пойдет отраженный луч от точки C' ? Для ответа на этот вопрос необходимо изобразить фокальную плоскость гиперболического зеркала (линия F_2), а также построить луч $B''O_2$ (зеленый), параллельный $B'C'$, проходящий в центр вторичного зеркала. Продолжение «назад» отраженного луча O_2E пересечет фокальную плоскость в точке D' . Значит, из этой же точки будет исходить продолжение «назад» луча, порожденного лучом $B'C'$, то есть $D'C'F$ — прямая линия.



Вариант 2. Получение эффективного фокуса аналитически

Параболическое зеркало дает действительное изображение в своей фокальной плоскости. Расстояние между главным зеркалом и получаемым изображением составит

1001 см \approx 10 м — величину фокусного расстояния. Однако, лучи света дойдут лишь до гиперболического зеркала, преодолев расстояние $O_1O_2 = 790$ см.

Для гиперболического зеркала, фактически, получится исходный мнимый объект, являющийся действительным изображением от параболического зеркала, находящийся в точке F_1 . Тогда можно записать формулу тонкой линзы (она работает и для зеркал):

$$\frac{1}{F_2} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{f_2} \quad \Rightarrow \quad f_2 = \frac{F_2 d_2}{d_2 - F_2} = \frac{(-275) \cdot (-210)}{(-210) - (-275)} \approx -890 \text{ см,}$$

где F_2 — фокусное расстояние гиперболического зеркала (зеркало рассеивающее, поэтому фокусное расстояние отрицательное), $d_2 = |O_2F_1| = 790 - 1000 = -210$ см — расстояние от вторичного зеркала до объекта (объект мнимый, поэтому расстояние отрицательное), $f_2 = |O_2F|$ — расстояние от вторичного зеркала до действительного изображения (здесь расстояние отрицательное, так как изображение получилось с той же стороны, из которой шли лучи).

Конец вариантов

Оба варианта дают вынос фокуса $|O_1F| \approx 1$ м. Получаем, что пучок параллельных лучей, попавший в объектив, преодолел расстояние $790 \text{ см} + 890 \text{ см} = 1680 \text{ см}$ прежде чем сойтись в одной точке. Является ли эта величина эффективным фокусным расстоянием всей системы? Нет, все прозаичнее.

Эффективное фокусное расстояние оптической системы — это фокусное расстояние одной линзы того же диаметра, что и первичное зеркало (в данном случае, хотя обычно учитывается наличие диафрагмы), которая давала бы сходящийся пучок света под тем же углом. Становится понятно, что достаточно рассмотреть подобные треугольники: длина катета $|O_2C| = D_2/2$ (радиус гиперболического зеркала) также относится к радиусу объектива как расстояние $|FO_2|$ к искомому эффективному фокусному расстоянию F . При этом катет $|O_2C|$ пропорционален $|O_1B| = D_1/2$ через отношение $|O_2F_1|$ и F_1 :

$$\frac{|O_1B|}{|O_2C|} = \frac{|O_1F_1|}{|O_2F_1|} \quad \Rightarrow \quad \frac{D_2}{2} = |O_2C| = \frac{D_1}{2} \cdot \frac{|O_2F_1|}{|O_1F_1|} = 130 \cdot \frac{210}{1000} = 27.3 \text{ см,}$$

$$\frac{|O_2C|}{D_1/2} = \frac{|O_2F|}{F} \quad \Rightarrow \quad F = \frac{D_1 \cdot |O_2F|}{2 \cdot |O_2C|} = \frac{D_1 \cdot |O_2F| \cdot |O_1F_1|}{2 \cdot |O_1B| \cdot |O_2F_1|} = \frac{|O_2F| \cdot |O_1F_1|}{|O_2F_1|} = \frac{890 \cdot 1000}{210} \approx 42.5 \text{ м.}$$

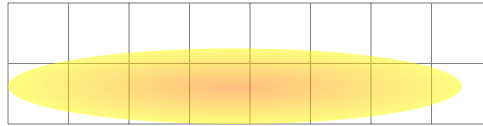
Те же вычисления можно проделать и для синего луча с тем же результатом. Итак, мы получили, что эффективное фокусное расстояние телескопа $F = 42.5$ м, попутно получив размер вторичного зеркала: его диаметр составляет $D_2 = 27.3 \cdot 2 \approx 55$ см. На самом деле размер должен быть немного больше, если учитывать диаметр поля зрения (добавка составляет около 5 см), однако точный расчет не требуется.

Угловое поле зрения в $19'25''$ позволяет определить диаметр изображения l в фокальной плоскости за главным зеркалом:

$$l = 42.5 \text{ м} \cdot \frac{19' \times 60'' + 25''}{206265''/\text{рад}} = 24 \text{ см}$$

Так как речь про параксиальные лучи (практически параллельные главной оптической оси), то и вырез в главном зеркале должен быть не меньшего диаметра (добавка получается также около 5 см, что также не требовалось). На схеме выше сами зеркала изображены голубым цветом, отражающие поверхности обращены друг к другу, геометрические размеры указаны фиолетовым цветом. Луч от звезды в центре поля зрения, идущий внутри трубы изображен красным цветом.

Согласно условию, в фокальной плоскости установлена матрица с линейным размером 2048×5 мкм ≈ 10 мм, а получаемое изображение участка неба диаметром $19'25''$ имеет линейный размер $l = 24$ см, что дает участок неба $0'.8 \times 0'.8$, проецируемый на матрицу. Значит, спиральная галактика (видимая под небольшим углом как эллипс) размерами $6' \times 1'$ имеет максимальный линейный диаметр 7.4 см. Отсюда следует, что нам потребуется 15 полных кадров (или 16 с учетом перекрытия; см. рисунок снизу), так как имеющаяся ПЗС-матрица сильно меньше выходного пучка света.



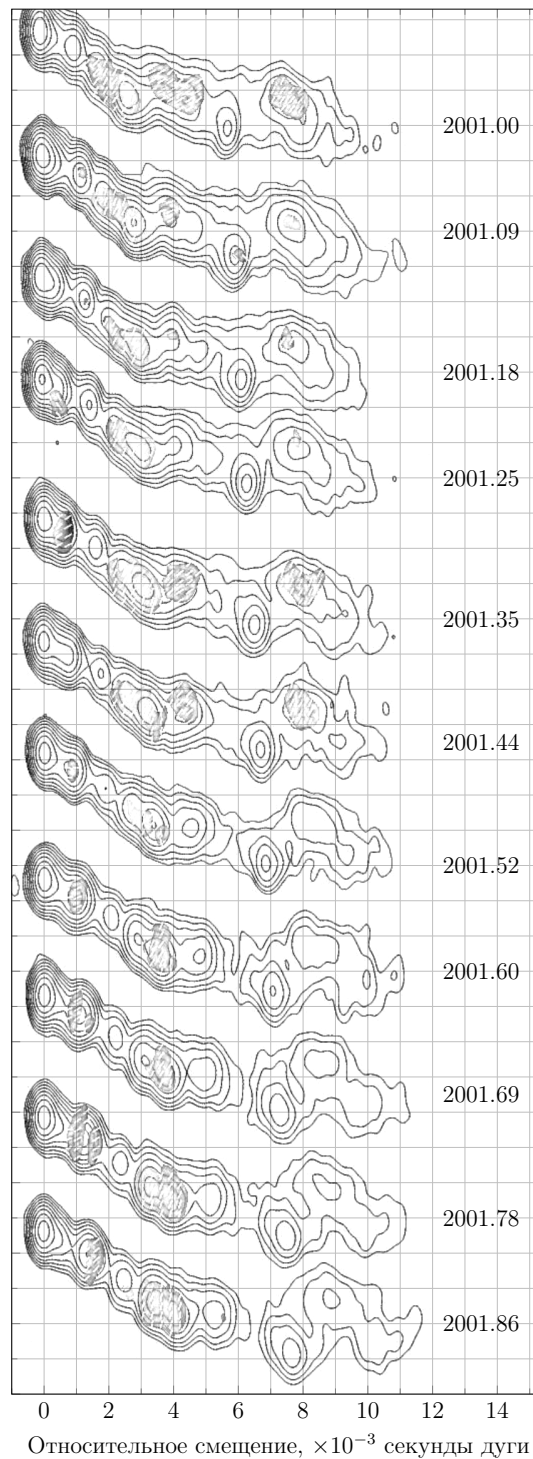
В данной задаче рассмотрен Зеркальный телескоп им. акад. Г.А.Шайна (ЗТШ) — второй по величине телескоп России, находящийся в Крымской астрофизической обсерватории и носящий имя ее первого директора. Его «близнец» (но с главным зеркалом, выполненным из ситалла, а не из пирекса) находится в обсерватории Бюракан (Армения) и носит имя ее основателя и первого директора академика В.А. Амбарцумяна.

11.9. Гонки за светом

М.В.Костина, П.А.Тараканов

Вам даны радиокарты наблюдений на частоте 22 ГГц джета, вылетающего из активного ядра галактики (АЯГ). Справа от каждой карты подписана дата наблюдения (в годах и долях года). Масштаб по осям абсцисс и ординат одинаков и указан на оси абсцисс, само ядро находится на отметке 0 по оси абсцисс.

Известно, что угол между направлением вылета джета из АЯГ и направлением на Солнце равен 15° . Наблюдаемое красное смещение галактики равно $z = 0.033$. Найдите величину, на которую скорость движения джета отличается от скорости света, выразив ее в долях скорости света.



Решение. Найдем расстояние до галактики. Поскольку $z = 0.033 \ll 1$, то расстояние выражается как $r = \frac{c \cdot z}{H}$, где c — скорость света, H — постоянная Хаббла. Получаем

$$r = \frac{c \cdot z}{H} = \frac{3 \cdot 10^5 \text{ км/с} \cdot 0.033}{7 \cdot 10^1 \text{ км/с/Мпк}} = 1.4 \cdot 10^2 \text{ Мпк.}$$

Теперь определим скорость движения джета в картинной плоскости. Для этого надо выбрать один (а лучше — несколько) «узел» джета: область повышенной яркости, движение которой можно проследить по картам. Определенности ради займемся узлом, который на первой карте находится на отметке по оси абсцисс 5.6. Его положение прослеживается на всех картах, на последней он оказывается на отметке 7.6. Измерив линейкой его расстояние от положения ядра, получаем, что за 0.86 года он переместился на расстояние $2.1 \cdot 10^{-3}$ секунды дуги, то есть движется с угловой скоростью около $2.4 \cdot 10^{-3}$ угловой секунды в год.

Более точно соответствующее измерение можно выполнить, если заметить, что смещение карты по вертикали пропорционально разности времен получения каждой очередной карты по сравнению с первой. Тогда можно провести прямые, соединяющие положения одного и того же узла джета (пример для двух узлов приведен на следующей странице) и по наклону прямой получить компоненту скорости перемещения узла вдоль оси абсцисс. При этом для разных узлов наклоны будут получаться немного разными — скорости движения узлов несколько различаются.

Поскольку на расстоянии 1 пк угловая скорость $1''/\text{год}$ соответствует линейной скорости $1 \text{ а.е./год} = 4.74 \text{ км/с}$, наблюдаемая скорость движения джета u оказывается равной

$$u = 1.4 \cdot 10^8 \cdot 2.4 \cdot 10^{-3} \cdot 4.74 \text{ км/с} = 1.6 \cdot 10^6 \text{ км/с} = 5.3 c,$$

где c — скорость света. И, поскольку мы таким образом наблюдаем проекцию скорости джета на картинную плоскость, то можно подумать, что полная скорость джета должна оказаться еще больше. Результат на первый взгляд кажется нелепым, однако ничего ненормального в нем нет, определенная таким образом скорость вполне может превышать скорость света.

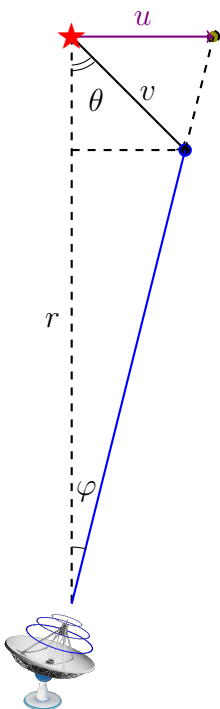
Построим модель наблюдаемого нами явления. Пусть активное ядро галактики находится на расстоянии r от наблюдателя, узел джета движется под углом θ к направлению к наблюдателю с пространственной скоростью v . В некоторый момент времени t наблюдатель наблюдает узел на угловом расстоянии $\varphi = \varphi(t)$ от ядра. Тогда угловая скорость, с которой узел перемещается по небесной сфере, может быть вычислена как $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$, причем полученная нами скорость $u = r \cdot \omega$.

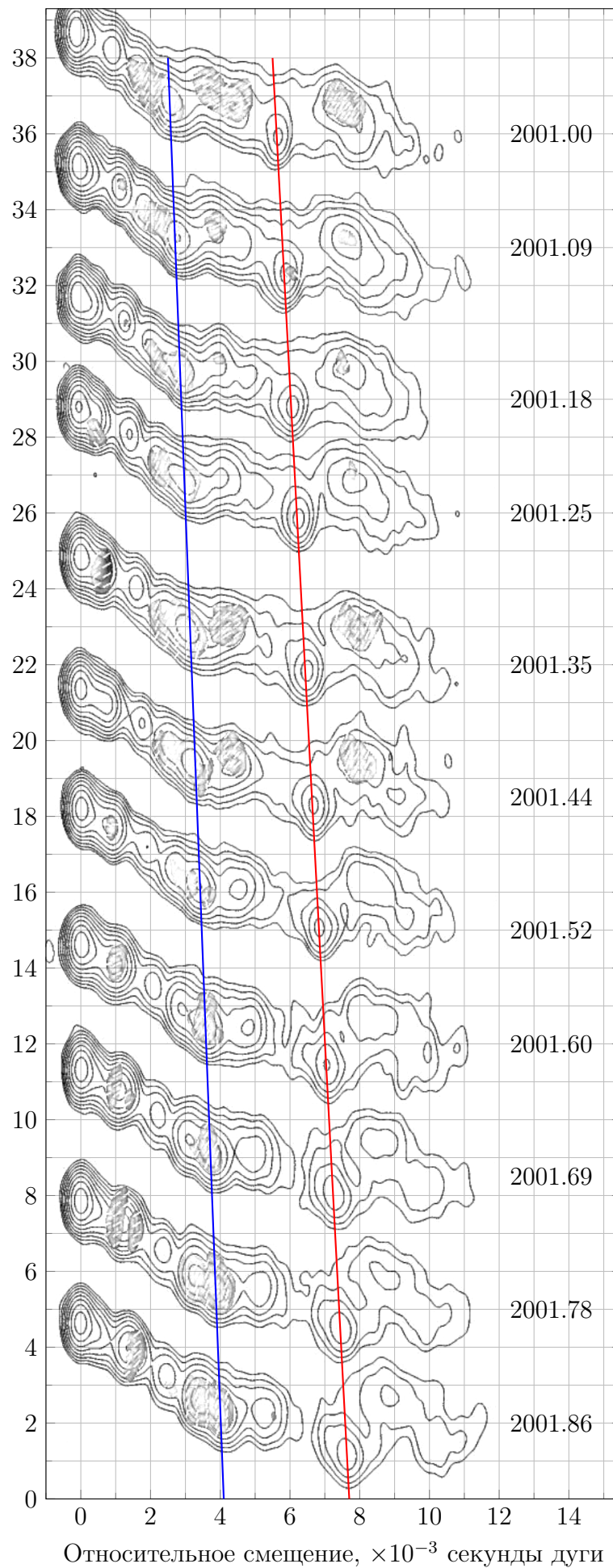
Пусть узел стартует из ядра в момент времени $\tilde{t} = 0$. К некоторому \tilde{t} он пройдет расстояние $l = v\tilde{t}$. Однако информация об этом попадает к наблюдателю не бесконечно быстро, а со скоростью света, поэтому доберется до наблюдателя в момент времени t , равный (с учетом того, что $\varphi \ll 1$)

$$t \approx \tilde{t} + \frac{r - l \cdot \cos \theta}{c} = \tilde{t} + \frac{r - v\tilde{t} \cdot \cos \theta}{c}.$$

Угол φ при этом будет меняться со временем как

$$\varphi \approx \text{tg } \varphi = \frac{l \cdot \sin \theta}{r} = \frac{v\tilde{t} \cdot \sin \theta}{r}.$$





Вычислим

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \cdot \frac{d\tilde{t}}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tilde{t}} \cdot \left(\frac{dt}{d\tilde{t}}\right)^{-1} = \frac{v \sin \theta}{r} \cdot \frac{1}{1 - v/c \cdot \cos \theta}.$$

Отсюда наблюдаемая скорость u равна

$$u = \frac{v \sin \theta}{1 - \frac{v}{c} \cdot \cos \theta}. \quad (5)$$

Отметим, что несмотря на формально возникающие «сверхсветовые» скорости, никакие формулы из специальной теории относительности тут не требуются. Они возникают при необходимости перехода из одной инерциальной системы отсчета в другую, движущуюся с достаточно большой скоростью по отношению к первой, а в данном случае ничего подобного не имеется: все рассмотрение происходит в одной системе отсчета. Единственным исключением из этого утверждения (впрочем, даже в этом случае не требующим учета эффектов СТО) может быть вопрос о возможной абберационной поправке к углу θ , однако несложно заметить, что она меньше точности, с которой этот угол задан в условии.

Поэтому вернемся к вычислениям. Поскольку мы знаем из условия, что $\theta = 15^\circ$, нам осталось выразить v . Будем измерять все скорости в скоростях света, тогда $c = 1$, $u \approx 5.3$. Выражая v из (5) и вычисляя требуемую в условии величину $1 - v$, получаем

$$1 - v = 1 - \frac{u}{\sin \theta + u \cos \theta} \approx 1.4 \cdot 10^{-2}.$$

Осталось добавить, что «прототипом» объекта и источником радиокарт послужила галактика Маркарян 1506, известная также как 3С 120, параметры которой были немного изменены.