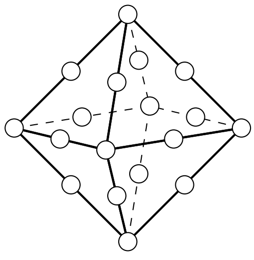
LXXXIX Московская математическая олимпиада

15 марта 2026 года • 11 класс, 1 день



Задача 1. Можно ли расставить в вершинах и в серединах рёбер правильного октаэдра по одному натуральному числу от 1 до 18 так, чтобы все числа были различны, а в каждой вершине стояло число, равное сумме четырёх чисел, стоящих в серединах исходящих из этой вершины рёбер?

Задача 2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. На сторонах AC и AB взяли точки K и L соответственно так, что прямая IK перпендикулярна CI, а KL параллельна BI. Докажите, что треугольник LKI — равнобедренный.

Задача 3. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала они пишут по единице, каждый на своей доске. Далее они по очереди (начинает Петя) заменяют каждый своё число, умножая его либо на 2, либо на 3, причём после каждого хода числа, записанные на досках, должны быть различными. Пусть a — количество натуральных делителей числа Пети после его 100-го хода, а b — количество натуральных делителей числа Васи после его 100-го хода. По итогам игры Петя получает $|a-b|$ фантиков. При каком наибольшем натуральном n Петя может действовать так, чтобы гарантированно получить не менее n фантиков вне зависимости от действий Васи?

Задача 4. В гостинице $a > 1$ этажей, на каждом этаже b одноместных номеров. На математический конгресс приехало ab математиков. Оказалось, что каждому математику на каждом этаже нравится ровно один номер. Докажите, что число способов поселить всех математиков в гостиницу так, чтобы каждому нравился его номер, чётно.

Задача 5. Надя загадала многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. За один ход Максим может назвать любой многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, а в ответ Надя должна сообщить Максиму следующие два факта:
- достигается ли максимальное значение $P+Q$, и если да, то чему оно равно;
- достигается ли минимальное значение $P+Q$, и если да, то чему оно равно.

Максим хочет последовательно сделать несколько таких ходов, а затем назвать такое число t, что $|P(2026)-t| < 10^{-100}$. Докажите, что Максим может действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого. (Максим сам решает, когда ему перестать задавать вопросы.)

Задача 6. В основании выпуклой четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, а никакие две стороны не равны. Известно, что вписанные сферы тетраэдров $SABC$ и $SACD$ касаются. Докажите, что вписанные сферы тетраэдров $SABD$ и $SBCD$ касаются.

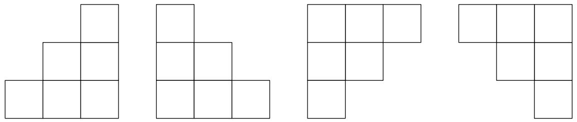
XXIII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 12 апреля. Подробности — на странице olympiads.mccme.ru/ustn/

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIX Московской математической олимпиады —
на сайте mmo.mccme.ru

LXXXIX Московская математическая олимпиада

28 марта 2026 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано по одному действительному числу так, что суммы чисел во всех группах клеток, образующих «лесенку» (см. рисунок), одинаковы. Может ли среди записанных чисел быть по крайней мере 89 различных?



Задача 2. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$a + \operatorname{arctg} b > c + \operatorname{arctg} d, \quad b + \operatorname{arctg} a > d + \operatorname{arctg} c.$$

Докажите, что $a + b > c + d$.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H. Три окружности с центрами в точках D, E, F, проходящие через H, пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в шести различных точках. Докажите, что эти шесть точек можно разбить на две тройки так, чтобы для двух треугольников, образованных этими тройками точек, нашлась окружность, касающаяся всех шести прямых, содержащих стороны этих треугольников.

Задача 4. В классе, состоящем из не менее 5 учеников (девочек и мальчиков), провели контрольную работу. Известно, что во время работы каждая пара школьников пообщалась и ровно один из учеников в этой паре помог другому. В результате оказалось, что для каждого ученика среди тех, кому он помог, поровну девочек и мальчиков. Сколько учеников могло быть в классе?

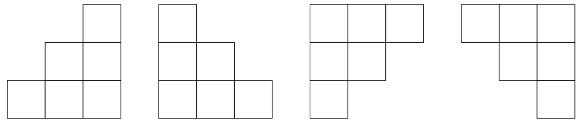
Задача 5. Назовём натуральное $N > 1$ *хорошим*, если найдутся такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_N$, что наибольшие общие делители всевозможных пар из них образуют $N(N-1)/2$ последовательных натуральных чисел. Существует ли хорошее натуральное число, большее 10^{100}?

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIX Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`

LXXXIX Московская математическая олимпиада

28 марта 2026 года ⧫ 11 класс, второй день

Задача 1. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано по одному действительному числу так, что суммы чисел во всех группах клеток, образующих «лесенку» (см. рисунок), одинаковы. Может ли среди записанных чисел быть по крайней мере 89 различных?



Задача 2. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

$$a + \operatorname{arctg} b > c + \operatorname{arctg} d, \quad b + \operatorname{arctg} a > d + \operatorname{arctg} c.$$

Докажите, что $a + b > c + d$.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H. Три окружности с центрами в точках D, E, F, проходящие через H, пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в шести различных точках. Докажите, что эти шесть точек можно разбить на две тройки так, чтобы для двух треугольников, образованных этими тройками точек, нашлась окружность, касающаяся всех шести прямых, содержащих стороны этих треугольников.

Задача 4. В классе, состоящем из не менее 5 учеников (девочек и мальчиков), провели контрольную работу. Известно, что во время работы каждая пара школьников пообщалась и ровно один из учеников в этой паре помог другому. В результате оказалось, что для каждого ученика среди тех, кому он помог, поровну девочек и мальчиков. Сколько учеников могло быть в классе?

Задача 5. Назовём натуральное $N > 1$ *хорошим*, если найдутся такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_N$, что наибольшие общие делители всевозможных пар из них образуют $N(N-1)/2$ последовательных натуральных чисел. Существует ли хорошее натуральное число, большее 10^{100}?

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIX Московской математической олимпиады
на сайте `mccme.ru/mmo/`

ММО-2026, 11 класс, первый день

Задача 1. Можно ли расставить в вершинах и в серединах рёбер правильного октаэдра по одному натуральному числу от 1 до 18 так, чтобы все числа были различны, а в каждой вершине стояло число, равное сумме четырёх чисел, стоящих в серединах исходящих из этой вершины рёбер? (*М. Евдокимов*)

Решение. Предположим, что требуемая расстановка существует. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ. Рассмотрим сумму чисел в двух противоположных вершинах октаэдра. С одной стороны, эта сумма равна сумме чисел, стоящих в серединах восьми рёбер, исходящих из этих двух вершин, а поскольку все эти числа различны, она не меньше, чем $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. С другой стороны, сумма двух различных чисел, не превосходящих 18, не больше, чем $17+18=35$. Противоречие.

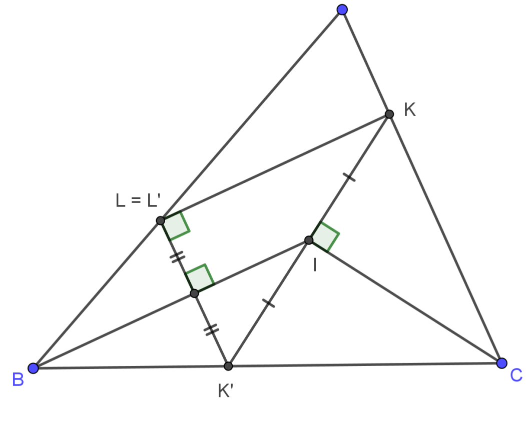
Второй способ. Поскольку у октаэдра 12 рёбер, а все расставленные числа различны, в середине хотя бы одного из рёбер стоит число, не меньшее 12. Но тогда в каждой из вершин, соединённых этим ребром, должно стоять число, не меньшее $12+1+2+3=18$, что невозможно.

Третий способ. Заметим, что в шести вершинах октаэдра могут стоять только числа 13, 14, 15, 16, 17, 18. Действительно, если бы какое-то из них стояло в середине ребра, то в вершине, являющейся концом этого ребра, стояло бы число, не меньшее $13+1+2+3=19$. Сумма чисел от 13 до 18 нечётна, так как среди них ровно три нечётных. Но из условия следует, что сумма чисел, стоящих в вершинах октаэдра, должна быть равной удвоенной сумме чисел, стоящих в серединах рёбер, и поэтому чётной. Противоречие.

Ответ: нет, нельзя.

Задача 2. Пусть I — центр вписанной окружности треугольника ABC. На сторонах AC и AB взяли точки K и L соответственно так, что прямая IK перпендикулярна CI, а KL параллельна BI. Докажите, что треугольник LKI — равнобедренный. (*М. Евдокимов*)

Решение. *Первый способ.* Пусть точка K' симметрична точке K относительно биссектрисы CI, а точка L' симметрична точке K' относительно биссектрисы BI. Тогда BI проходит через середины отрезков $K'L'$ и KK', а значит содержит среднюю линию треугольника $K'L'K$, параллельную стороне $K'L'$. Поэтому прямая KL' параллельна BI, откуда следует, что точка L из условия совпадает с L'. Так как BI перпендикулярна $K'L'$, получаем также, что угол KLK' равен $90°$. Осталось заметить, что LI является медианой в прямоугольном треугольнике KLK', а значит $LI = KI$, что и требовалось доказать.



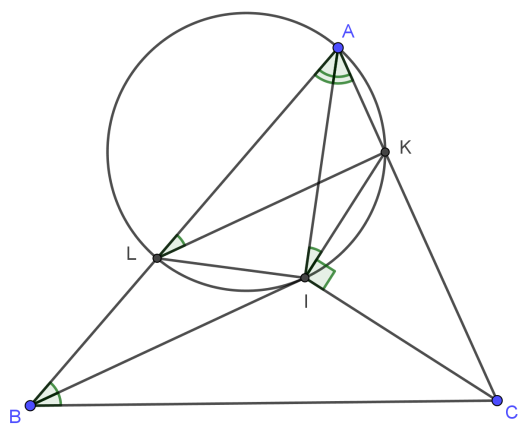
Второй способ. Заметим, что

$$\angle AIC = 180^\circ - \angle IAC - \angle ICA = 180^\circ - \left(\frac{\angle BAC + \angle BCA}{2}\right) = 180^\circ - \left(90^\circ - \frac{\angle ABC}{2}\right) = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2}.$$

Тогда

$$\angle AIK = \angle AIC - \angle CIK = \angle AIC - 90^\circ = \frac{\angle ABC}{2} = \angle ABI = \angle ALK,$$

откуда следует, что точка A, K, L и I лежат на одной окружности ω. Поскольку AI — биссектриса угла KAL, то I — середина дуги LK окружности ω, откуда следует, что $IK = IL$.



Задача 3. Петя и Вася играют в следующую игру. Сначала они пишут по единице, каждый на своей доске. Далее они по очереди (начинает Петя) заменяют каждый своё число, умножая его либо на 2, либо на 3, причём после каждого хода числа, записанные на досках, должны быть различными. Пусть a — количество натуральных делителей числа Пети после его 100-го хода, а b — количество натуральных делителей числа Васи после его 100-го хода. По итогам игры Петя получает $|a-b|$ фантиков. При каком наибольшем натуральном n Петя может действовать так, чтобы гарантированно получить не менее n фантиков вне зависимости от действий Васи? (*И. Михайлов*)

Решение. *Стратегия Пети.* Покажем, как Пете действовать так, чтобы по итогам игры получить 99 фантиков. Пусть Петя на k-м ходу заменяет своё число на $2 \cdot 3^{k-1}$ (это возможно, поскольку для каждого натурального числа a после a ходов Пети и $(a-1)$-го хода Васи в разложении числа Пети на простые множители участвует ровно на один сомножитель больше, чем в разложении числа Васи, поэтому их числа после хода Пети совпасть не могут). Индукцией по k докажем, что тогда после k ходов Васи на его доске написано число 3^k.

База: при $k = 1$ Васе запрещено писать число 2, поэтому он запишет число 3.
Переход: если после k ходов на досках Пети и Васи записаны числа $2 \cdot 3^{k-1}$ и 3^k соответственно, то после $(k+1)$-го хода Пети на его доске будет $2 \cdot 3^k$. Тогда Вася не сможет умножить своё число на 2, поскольку в таком случае числа на досках оказались бы равными, то есть запишет число 3^{k+1}, что и требовалось доказать.

В соответствии с доказанным утверждением после окончания игры на досках Пети и Васи будут записаны числа $2 \cdot 3^{99}$ и 3^{100} соответственно. Значит, Петя получит $2 \cdot 100 - 101 = 99$ фантиков.

Стратегия Васи. Покажем теперь, как Васе действовать так, чтобы по итогам игры Петя получил не больше 99 фантиков. Без ограничения общности предположим, что первым ходом Петя записал на своей доске число 2. Тогда пусть Вася своим первым ходом запишет число 3, а далее на k-м ходу (для каждого $k = 2, 3, \ldots 100$) умножает своё число на то же число (2, либо 3), на которое умножает своё число Петя на его k-м ходу (тем самым после каждого хода Васи отношение его числа к числу Пети будет оставаться равным $\frac{3}{2}$).

Тогда для каждого $k = 2, \ldots, 100$ если после k ходов Пети на его доске записано число $2 \cdot 3^m \cdot 2^n$, где $m + n = k - 1$, то после k ходов Васи на его доске записано число $3 \cdot 3^m \cdot 2^n$, отличное от $2 \cdot 3^m \cdot 2^n$. Пусть после 100 ходов Пети на его доске записано число $3^m \cdot 2^n$ для некоторых целых чисел $n \geqslant 1$ и $m \geqslant 0$ с суммой $m + n = 100$. Тогда в соответствии с предыдущим замечанием после 100 ходов Васи на его доске будет записано число $3^{m+1} \cdot 2^{n-1}$. Значит, по итогам игры Петя получит не более

$$\big|(n+1) \cdot (101 - n) - n \cdot (102 - n)\big| = \big|101 + 100n - n^2 - 102n + n^2\big| = |101 - 2n| \leqslant 99$$

фантиков, где последнее неравенство выполнено, поскольку $100 \geqslant n \geqslant 1$.

Ответ: 99.

Задача 4. В гостинице $a > 1$ этажей, на каждом этаже b одноместных номеров. На математический конгресс приехало ab математиков. Оказалось, что каждому математику на каждом этаже нравится ровно один номер. Докажите, что число способов поселить всех математиков в гостиницу так, чтобы каждому нравился его номер, чётно. (*В. Ретинский*)

Решение. Зафиксируем произвольное расселение на всех этажах выше второго. Покажем, что количество способов дополнить его до расселения всех математиков чётно.

Построим граф, в котором $2b$ вершин соответствуют номерам на первых двух этажах. Для каждого математика проведём ребро, соединяющее два подходящих ему номера. Получим граф G, в котором $2b$ вершин и $2b$ рёбер.

Если в графе G есть висячая вершина v, то в соответствующий номер можно поселить только одного математика. Поселим математика в этот номер (в любом подходящем расселении он живёт в этом номере), а из графа G удалим вершину v и исходящее из неё ребро.

Будем продолжать процесс, пока в графе не останется висячих вершин. После завершения процесса мы получим непустой граф G'. Если в графе G' есть изолированная вершина v, то расселение невозможно, поскольку мы получили, что в некотором номере при любом подходящем расселении не живёт ни одни математик. Тогда количество способов расселить всех равно 0, что является чётным числом.

Иначе в графе G' степень каждой вершины не меньше двух. Заметим, что в графе G' поровну вершин и рёбер, так как их изначально поровну, и каждым шагом мы удаляем одну вершину и одно ребро. Отсюда следует, что степени всех вершин равны двум. Из леммы о хороводах следует, что граф G' является объединением нескольких непересекающихся циклов. Нетрудно видеть, что для каждого цикла есть ровно два способа сопоставить вершинам-номерам рёбра-математиков. Действительно, при выборе номера для одного из математиков, расселение остальных математиков данного цикла определяется однозначно. Тогда если граф G' состоит из $c \geq 1$ циклов, то количество способов расселить математиков равняется 2^c, что является чётным числом.

Мы доказали, что для каждого выбора расселения во все дни после второго количество способов дополнить его до полного расселения чётно. Осталось просуммировать полученные величины по всем выборам расселения во все дни после второго. С одной стороны, мы получим искомое количество способов расселить всех. С другой стороны, так как сумма чётных чисел чётна, то результат будет чётным.

Замечание. Приведём альтернативное красивое доказательство чётности числа расселений математиков, использующее линейную алгебру.

Занумеруем математиков числами от 1 до ab; номера гостиницы на i-м этаже ($i = 1, 2, \ldots, a$) занумеруем числами от $(i-1) \cdot b + 1$ до $(i-1) \cdot b + b$. Построим матрицу M размера $ab \times ab$, где число $M_{i,j}$ в i-й строке и j-м столбце определяется следующим образом:

$$M_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если } i\text{-му математику нравится } j\text{-й номер гостиницы;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Расселение математиков по номерам можно представить как перестановку $\sigma \in S_{ab}$ $\big($т. е. функцию $\sigma\colon \{1, 2, \ldots, ab\} \to \{1, 2, \ldots, ab\}\big)$, сопоставляющую номеру математика его номер в гостинице. Тогда количество подходящих расселений равно *перманенту* матрицы M:

$$\operatorname{perm}(M) = \sum_{\sigma \in S_{ab}} \left(\prod_{i=1}^{ab} M_{i,\sigma(i)} \right).$$

Действительно, если данная перестановка σ подходит, то произведение чисел $M_{i,\sigma(i)}$ будет равно 1, иначе 0.

Так как нас интересует только чётность данного выражения, то можно произвольным образом менять знаки перед слагаемыми. Заменив знак перед каждым произведением на чётность перестановки $\operatorname{sgn}(\sigma) = \pm 1$, получим *определитель* матрицы M:

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in S_{ab}} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{i=1}^{ab} M_{i,\sigma(i)} \right).$$

Теперь заметим, что сумма первых b столбцов матрицы (соответствующих первому этажу гостиницы) равна столбцу из единиц, так как каждому математику нравится ровно один номер на первом этаже гостиницы. Такая же сумма у следующих b столбцов матрицы. Следовательно, столбцы матрицы линейно зависимы, то есть она вырожденная; а так как определитель любой вырожденной матрицы равен нулю, то он чётен.

Задача 5. Максим загадал многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами. За один ход Надя может назвать любой многочлен $Q(x)$ с вещественными коэффициентами, а в ответ Максим должен сообщить Наде следующие два факта:

- достигается ли максимальное значение $P + Q$, и если да, то чему оно равно;
- достигается ли минимальное значение $P + Q$, и если да, то чему оно равно.

Надя хочет последовательно сделать несколько таких ходов, а затем назвать такое вещественное число t, что $|P(2026) - t| < 10^{-100}$. Докажите, что Надя может действовать так, чтобы гарантированно добиться желаемого. (Надя сама решает, когда ей перестать задавать вопросы.) (*Л. Шатунов*)

Решение. Пусть Максим называет только многочлены имеющие корень 2026. Тогда если на каких-то ходах он назовёт многочлены V, W и Надя скажет, что минимум многочлена $P + V$ равен x, а максимум многочлена $P + W$ равен y, причём $y - x < 10^{-100}$ (назовём такую ситуацию *приятной*), то Максим может назвать число $t = x$. Действительно, в такой ситуации

$$x \le P(2026) + V(2026) = P(2026) = P(2026) + W(2026) \le y,$$

откуда следует, что $|P(2026) - x| = P(2026) - x \le y - x < 10^{-100}$. Осталось лишь показать, что Максим может последовательно сделать несколько ходов так, чтобы приятная ситуация гарантированно произошла. Приведём несколько способов этого добиться.

Первый способ. Разобьём стратегию Максима на два шага.

Первый шаг. Пусть Максим последовательно называет многочлены

$$(x - 2026)^2, -(x - 2026)^2, (x - 2026)^4, -(x - 2026)^4, \ldots, (x - 2026)^{2n}, -(x - 2026)^{2n}, \ldots$$

до тех пор, пока не услышит, последовательно назвав многочлены $(x-2026)^{2k}$ и $-(x-2026)^{2k}$ (для какого-то $k \in \mathbb{N}$), что сумма P с первым из них достигает минимума, а сумма P со вторым из них достигает максимума.

Заметим, что когда-то такое обязательно произойдёт. Действительно, при k, превосходящем степень многочлена P (при $k=1$, если $P=0$), оба многочлена $P+(x-2026)^{2k}$ и $P-(x-2026)^{2k}$ имеют чётную степень, и у первого из них старший коэффициент положителен, а у второго отрицателен, потому первый достигает минимума, а второй — максимума.

Итак, пусть Надя сказала, что $P(x)+(x-2026)^{2k}$ и $P(x)-(x-2026)^{2k}$ достигают минимума m и максимума M соответственно. Тогда P не может быть многочленом степени выше $2k$. Действительно, в противном случае многочлен $P+(x-2026)^{2k}$ имеет ту же степень и тот же старший коэффициент что и P, и значит эта степень чётна, а старший коэффициент положителен (так как $P+(x-2026)^{2k}$ достигает минимума), но, проводя аналогичное рассуждение для $P-(x-2026)^{2k}$, получаем, что старший коэффициент P отрицателен — противоречие.

Второй шаг. Для $n \geqslant k+1$ положим $Q_n(x)=(2n)^{2n+1}(x-2026)^{2n}$. Пусть теперь Максим последовательно называет многочлены

$$P_n^+(x)=(x-2026)^{2k}+Q_n(x), \quad P_n^-(x)=-(x-2026)^{2k}-Q_n(x) \quad \text{для } n=1,2,\ldots$$

Докажем, что приятная ситуация произойдёт, каким бы ни был загаданный Надей многочлен.

В силу непрерывности многочленов $P(x)$ и $(x-2026)^{2k}$ в точке $x=2026$ существует такое $\varepsilon>0$, что для любого $x \in \mathbb{R}$ из неравенства $|x-2026|<\varepsilon$ следует, что

$$|P(x)+(x-2026)^{2k}-P(2026)|<\frac{10^{-100}}{2}, \quad |P(x)-(x-2026)^{2k}-P(2026)|<\frac{10^{-100}}{2}. \tag{1}$$

Также заметим, что для любого такого $x \in \mathbb{R}$, что $|x-2026| \geqslant \frac{1}{2n}$ $(n \in \mathbb{N})$, имеем

$$Q_n(x)=(2n)^{2n+1}(x-2026)^{2n} \geqslant (2n)^{2n+1} \cdot \left(\frac{1}{2n}\right)^{2n}=2n. \tag{2}$$

Пусть натуральное число $N \in \mathbb{N}$ таково, что $2N>P(2026)-m$ и $\frac{1}{2N}<\varepsilon$. Тогда заметим, что в силу оценок 1 и 2

$$|x-2026|>\frac{1}{2N} \Longrightarrow P(x)+P_N^+(x)=\underbrace{P(x)+(x-2026)^{2k}}_{\geqslant m}+\underbrace{Q_N(x)}_{>2N}>m+2N>P(2026),$$

$$|x-2026| \leqslant \frac{1}{2N} \Longrightarrow P(x)+P_N^+(x)=\underbrace{P(x)+(x-2026)^{2k}}_{>P(2026)-10^{-100}/2}+\underbrace{Q_N(x)}_{\geqslant 0}>P(2026)-\frac{10^{-100}}{2},$$

откуда вытекает, что минимальное значение многочлена $P(x)+P_N^+(x)$ существует и больше $P(2026)-\frac{10^{-100}}{2}$. Аналогично, если натуральное число $N \in \mathbb{N}$ таково, что $2N>M-P(2026)$ и $\frac{1}{2N}<\varepsilon$, то

$$|x-2026|>\frac{1}{2N} \Longrightarrow P(x)+P_N^-(x)=\underbrace{P(x)-(x-2026)^{2k}}_{\leqslant M}-\underbrace{Q_N(x)}_{>2N}<M-2N<P(2026),$$

$$|x-2026| \leqslant \frac{1}{2N} \Longrightarrow P(x)+P_N^-(x)=\underbrace{P(x)-(x-2026)^{2k}}_{<P(2026)+10^{-100}/2}-\underbrace{Q_N(x)}_{\geqslant 0}<P(2026)+\frac{10^{-100}}{2},$$

и максимальное значение многочлена $P(x)+P_N^-(x)$ существует и не превосходит $P(2026)+\frac{10^{-100}}{2}$. Таким образом, для $N \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего условиям $2N>\max\{P(2026)-m, M-P(2026)\}$ и $\frac{1}{2N}<\varepsilon$, получаем, что минимальное значение многочлена $P(x)+P_N^+(x)$ отличается от максимального значения $P(x)+P_N^-(x)$ меньше чем на 10^{-100}, то есть после соответствующего хода или ещё раньше возникает приятная ситуация, что и требовалось доказать.

Второй способ.

Лемма. Пусть многочлен $R(x)$ (с вещественными коэффициентами) имеет чётную степень $2k > 1$ и таков, что модуль каждого из его коэффициентов при нечётных степенях не превосходит положительного вещественного числа C, а каждый из коэффициентов при чётных степенях от 0 до $2k$ включительно не меньше, чем C. Тогда $R(a) > 0$ для всякого вещественного a.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $a \in \mathbb{R}$. Чётная степень всякого вещественного числа неотрицательна, тогда из условий на коэффициенты многочлена $R(x)$ понятно, что $R(a) \geq C(a^{2k} + a^{2k-2} + \ldots + 1) - C(|a|^{2k-1} + |a|^{2k-3} + \ldots + |a|)$, откуда $R(a) \geq C(|a|^{2k} - |a|^{2k-1} + |a|^{2k-2} \ldots + 1) = C\dfrac{|a|^{2k+1}+1}{|a|+1} > 0$, тем самым в силу произвольности выбора $a \in \mathbb{R}$ лемма доказана. $\square$

Перейдём к решению задачи. Для всякого натурального n положим $Q_n(x) = n \cdot \sum\limits_{j=1}^{n}(x-2026)^{2j}$. Например,

$$Q_4(x) = 4(x-2026)^8 + 4(x-2026)^6 + 4(x-2026)^4 + 4(x-2026)^2).$$

Пусть Максим последовательно называет многочлены:

$$Q_1(x), -Q_1(x), Q_2(x), -Q_2(x), Q_3(x), -Q_3(x), \ldots$$

Докажем, что приятная ситуация произойдёт, каким бы ни был загаданный Надей многочлен.

Пусть загаданный многочлен это $P(x) = \sum\limits_{j=0}^{2k} a_j(x-2026)^j$, где $k > 100$ — натуральное, а $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$ — некоторые вещественные числа (любой многочлен представляется в таком виде, возможно, некоторые коэффициенты a_j равны 0). Пусть модуль каждого из чисел $a_0, a_1, \ldots, a_{2k}$ не превосходит некоторого натурального числа M. Положим

$$N = k+2M+10^{100}\cdot M^2,\ A(x) = a_0+a_1x+10^{100}M^2x^2,\ B(x) = \sum_{j=2}^{2k} a_jx^{j-2}+(N-10^{100}\cdot M^2)+N\cdot\sum_{j=2}^{N} x^{2j-2}.$$

Заметим, что $B(x)$ удовлетворяет условиям доказанной леммы (например, для $C = M$). Тогда для всякого $a \in \mathbb{R}$ выполнено $B(a) \geq 0$, и, кроме того,

$$A(a) \geq A\Big(-\frac{a_1}{2\cdot 10^{100}M^2}\Big) = a_0 - \frac{a_1^2}{4\cdot 10^{100}M^2} \geq a_0 - \frac{1}{4\cdot 10^{100}}.$$

Далее пусть $D(x) = P(x+2026) + Q_N(x+2026)$. Тогда

$$\begin{aligned} D(x) &= \sum_{j=0}^{2k} a_jx^j + N\cdot\sum_{j=1}^{N} x^{2j} = \\ &= a_0 + a_1x + x^2\Big(\sum_{j=2}^{2k} a_jx^{j-2} + (N-10^{100}M^2\Big) + N\cdot\sum_{j=2}^{N} x^{2j-2}) + 10^{100}M^2x^2 = \\ &= A(x) + x^2B(x), \end{aligned}$$

а значит, в силу ранее доказанного получаем, что для всякого $a \in \mathbb{R}$ выполнено

$$D(a-2026) = A(a-2026) + (a-2026)^2B(a-2026) \geq A(a-2026) \geq a_0 - \frac{1}{4\cdot 10^{100}}.$$

Значит,

$$P(a)+Q_N(a)=D(a-2026)\geq a_0-\frac{1}{4\cdot 10^{100}}=P(2026)-\frac{1}{4\cdot 10^{100}}.$$

Это означает, что многочлен $P+Q_N$ достигает минимума (поскольку это ограниченный снизу многочлен), и этот минимум не меньше, чем $P(2026)-\dfrac{1}{4\cdot 10^{100}}$. Аналогично (поменяв в рассуждении P на $-P$) получаем, что $-P+Q_N$ достигает минимума, и этот минимум не меньше, чем $-P(2026)-\dfrac{1}{4\cdot 10^{100}}$, а значит $P-Q_N$ достигает максимума, и этот максимум не больше, чем $P(2026)-\dfrac{1}{4\cdot 10^{100}}$. Итак, разность максимума $P-Q_N$ и минимума $P+Q_N$ меньше, чем 10^{-100}, значит приятная ситуация гарантированно произойдёт на каком-то из ходов до $(2N)$-го включительно.

Задача 6. В основании выпуклой четырёхугольной пирамиды $SABCD$ лежит четырёхугольник $ABCD$, диагонали которого перпендикулярны, а никакие две стороны не равны. Известно, что вписанные сферы тетраэдров $SABC$ и $SACD$ касаются. Докажите, что вписанные сферы тетраэдров $SABD$ и $SBCD$ касаются. (*А. Доледенок*)

Решение. Первый способ. Для решения нам понадобятся три известных леммы.

Лемма 1.1. Пусть сфера вписана в трёхгранный угол $SABC$ и касается грани SBC в точке X. Тогда

$$\angle CSX=\frac{\angle ASC+\angle BSC-\angle ASB}{2}.$$

Доказательство. Пусть сфера касается граней SAC и SAB в точках Y и Z соответственно. Тогда $SX=SY=SZ$, а также $AY=AZ$, $BX=BZ$, $CX=CY$ по теореме об отрезках касательных. Значит, по трём сторонам равны следующие пары треугольников $CSX=CYS$, $BXS=BZS$, $AYS=AZS$. Тогда

$$\frac{\angle ASC+\angle BSC-\angle ASB}{2}=\frac{\angle ASY+\angle CSY+\angle CSX+\angle BSX-\angle BSZ-\angle ASZ}{2}=$$
$$=\frac{(\angle CSX+\angle CSY)+(\angle ASY-\angle ASZ)+(\angle BSX-\angle BSZ)}{2}=\angle CSX,$$

что и требовалось доказать.

Лемма 1.2. В выпуклую четырёхугольную пирамиду $SABCD$ можно вписать сферу тогда и только тогда, когда суммы противоположных плоских углов при вершине S равны.

Доказательство данного утверждения можно найти в заметке «О шаре, вписанном в выпуклую четырёхугольную пирамиду» И. Я. Такатара в журнале «Математическое просвещение».

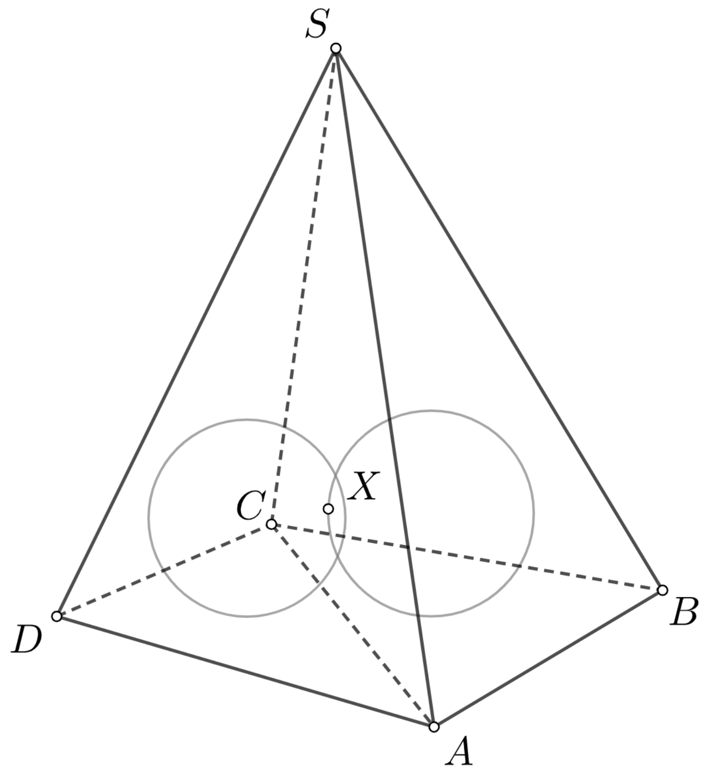
Лемма 1.3. В выпуклую четырёхугольную пирамиду $SABCD$ вписана сфера, которая касается плоскости основания в точке T. Тогда $\angle ATB+\angle CTD=180^\circ$.

Доказательство. Так как сумма углов треугольника равна 180°, получаем, что $\angle ATB=180^\circ-\angle TAB-\angle TBA$, $\angle CTD=180^\circ-\angle TCD-\angle TDC$. Значит, достаточно обосновать равенство $\angle TAB+\angle TBA+\angle TCD+\angle TDC=180^\circ$. По лемме 1.1

$$\angle TAB+\angle TBA+\angle TCD+\angle TDC=\frac{\angle SAB+\angle BAD-\angle SAD}{2}+\frac{\angle SBA+\angle ABC-\angle SBC}{2}+$$
$$+\frac{\angle BCD+\angle SCD-\angle SCB}{2}+\frac{\angle ADC+\angle SDC-\angle SDA}{2}=\left(\frac{\angle BAD+\angle ABC+\angle BCD+\angle ADC}{2}\right)+$$
$$+\left(\frac{\angle SAB+\angle SBA+\angle SCD+\angle SDC}{2}\right)-\left(\frac{\angle SAD+\angle SDA+\angle SBC+\angle SCB}{2}\right)=$$
$$=180^\circ+180^\circ-\left(\frac{\angle ASB+\angle CSD}{2}\right)-180^\circ+\left(\frac{\angle BSC+\angle ASD}{2}\right)=180^\circ,$$

где последнее равенство выполнено по лемме 1.2.

Пусть вписанные сферы тетраэдров $SABC$ и $SACD$ касаются в точке X.



Запишем по лемме 1.1 величину угла CSX двумя способами.

$$\frac{\angle ASC + \angle CSD - \angle ASD}{2} = \frac{\angle ASC + \angle BSC - \angle ASB}{2} \iff \angle ASB + \angle CSD = \angle BSC + \angle ASD.$$

По лемме 1.2 полученное равенство эквивалентно тому, что в $SABCD$ можно вписать сферу ω.

Запишем по лемме 1.1 величину угла CAX двумя способами.

$$\frac{\angle SAC + \angle BAC - \angle SAB}{2} = \frac{\angle SAC + \angle DAC - \angle SAD}{2} \iff \angle BAC - \angle DAC = \angle SAB - \angle SAD \iff$$

$$\iff 2\angle BAC = \angle BAD + \angle SAB - \angle SAD \iff \angle BAC = \frac{\angle BAD + \angle SAB - \angle SAD}{2}.$$

Из полученного равенства и леммы 1.1 следует, что точка T касания ω с гранью $ABCD$ лежит на диагонали AC. По лемме 1.3 сумма углов, под которыми из точки T видны стороны AB и CD, равна 180°. Несложно видеть, что поскольку диагонали четырёхугольника $ABCD$ перпендикулярны и он отличен от дельтоида, то на диагонали существует ровно одна подходящая точка — это точка пересечения диагоналей. Таким образом, точка T лежит на диагонали BD.

Для решения задачи теперь необходимо проделать те же выкладки, но в обратном порядке.

- Сфера ω вписана в трёхгранный угол $BCAS$, отсюда

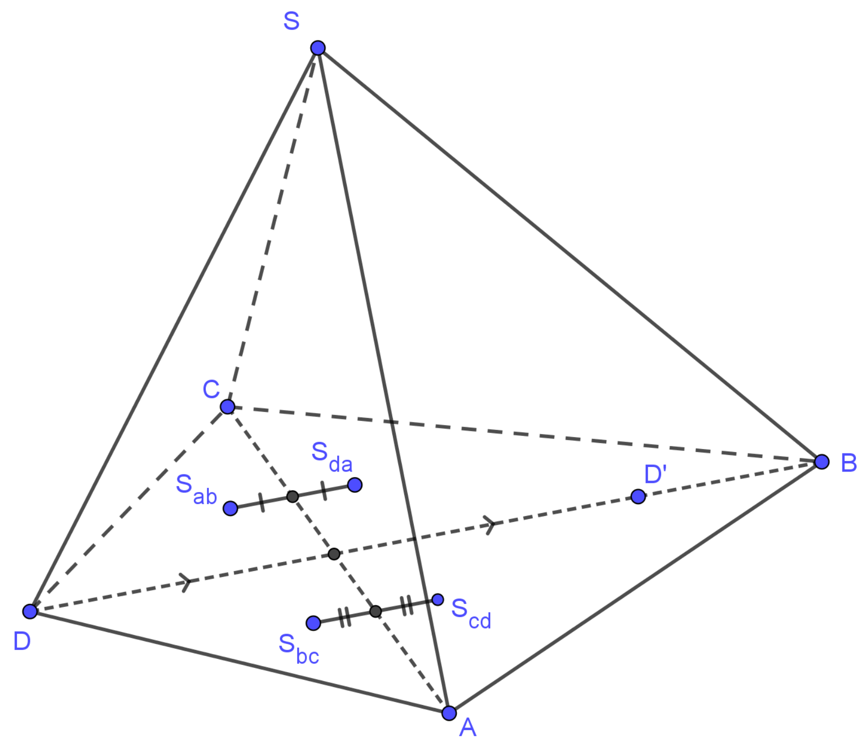
$$\angle ABT - \angle CBT = \angle ABD - \angle CBD = \angle ABS - \angle CBS.$$

- Обозначим точки касания вписанных в тетраэдры $SABD$ и $SBCD$ сфер с гранью SBD через Y и Z соответственно. Тогда, записав по лемме 1.1 углы DBY и DBZ, получим

$$\angle DBY = \angle DBZ \iff \angle ABD - \angle CBD = \angle ABS - \angle CBS,$$

что верно, откуда лучи BY и BZ совпадают. Аналогично доказывается, что лучи DY и DZ совпадают, откуда следует, что точки Y и Z совпадают, то есть сферы касаются.

Второй способ. Пусть точка S_{ab} на плоскости $(ABCD)$ такова, что $\triangle S_{ab}AB = \triangle SAB$, а также S_{ab} лежит в той же полуплоскости относительно прямой AB, что и точки C и D. Аналогично построим точки S_{bc}, S_{cd}, S_{da}.



Как и первом решении, при помощи леммы 1.1 из касания вписанных сфер тетраэдров $SABC$ и $SACD$ получим равенства

$$\angle SAB - \angle BAC = \angle SAD - \angle CAD,\ \angle SCB - \angle BCA = \angle SCD - \angle DCA.$$

Отметим, что из неравенства треугольника для плоских углов трёхгранного угла следует, что обе данные величины положительны. Также заметим, что для решения задачи досаточно обосновать аналогичные равенства

$$\angle SBA - \angle DBA = \angle SBC - \angle CBD,\ \angle SDC - \angle CDB = \angle SDA - \angle BDA.$$

По построению $S_{da}A = SA = S_{ab}A$. В силу отмеченных выше равенств углов и их положительности

$$\angle S_{da}AC = \angle S_{da}AD - \angle CAD = \angle SAD - \angle CAD = \angle SAB - \angle CAB = \angle S_{ab}AB - \angle CAB = \angle S_{ab}AC.$$

Значит, точки S_{ab} и S_{da} симметричны относительно прямой AC. Аналогично получаем, что S_{bc} и S_{cd} симметричны относительно прямой AC.

Пусть точка D' симметрична D относительно A. Поскольку по условию у $ABCD$ нет равных сторон, точка D' отлична от B. Тогда из симметрии получаем, что

$$D'S_{bc} = DS_{cd} = DS = DS_{da} = D'S_{ab}.$$

Поскольку $S_{ab}B = SB = S_{bc}B$, отсюда вытекает, что треугольники $BD'S_{ab}$ и $BD'S_{bc}$ (возможно, вырожденные) равны по трём сторонам.

Получаем, что точки S_{ab} и S_{bc} симметричны относительно прямой BD (или совпадают). Значит, $\angle S_{bc}BD = \angle S_{ab}BD$, откуда, аналогично рассуждению выше, следует равенство $\angle SDA - \angle BDA = \angle SDC - \angle CDB$. Второе искомое равенство углов доказывается аналогично.

Третий способ.

Лемма 2.1. Сфера ω касается двух плоскостей, проходящих через точки C и D, в точках X и Y. Тогда треугольники CDX и CDY совмещаются поворотом относительно прямой CD, который переводит плоскость (CDX) в плоскость (CDY).

Доказательство. Данное утверждение вытекает из доказательства леммы 1.1.

Лемма 2.2. Дана четырёхугольная пирамида $SABCD$. Сферы ω_a и ω_b, вписанные в тетраэдры $SBCD$ и $SABC$ соответственно, касаются грани SBC в точках X_1 и Y_1, а грани $ABCD$ в точках X_2 и Y_2 соответственно. Тогда $X_1Y_1 = X_2Y_2$.

Доказательство. Из леммы 2.1 следует, что при повороте относительно прямой BC, который переводит плоскость (SCD) в плоскость $(ABCD)$, точка X_1 переходит в X_2, а точка Y_1 — в Y_2, откуда вытекает искомое утверждение.

Обозначим вписанные сферы тетраэдров $SABC, SBCD, SCDA, SDAB$ через $\omega_d, \omega_a, \omega_b, \omega_c$ соответственно, их центры — I_d, I_a, I_b, I_c соответственно, а их точки касания с плоскостью $(ABCD)$ — X_d, X_a, X_b, X_c соответственно. Пусть, как и в первом решении, сферы ω_d и ω_b касаются в точке X. По теореме об отрезках касательных имеют место равенства отрезков $CX_b = CX = CX_d$, $AX_b = AX = AX_d$. Значит, точки X_b и X_d симметричны относительно прямой AC.

Обозначим точки касания ω_a с плоскостями (SCD) и (SBC) через K_2 и K_3, точку касания ω_b с (SCD) — через K_1, а точку касания ω_d с (SBC) — через K_4. По лемме 2.1 имеют место равенства треугольников: $SCK_1 = SCX = SCK_4$ и $SK_2C = SK_3C$. Поскольку пары треугольников SK_1C, SK_4C и SK_2C, SK_3C совмещаются поворотом вокруг прямой CD, при котором плоскость (SCD) переходит в плоскость (SBC), то $K_1K_2 = K_3K_4$. Из леммы 2.2 получаем также равенства $X_aX_b = K_1K_2$ и $X_dX_a = K_3K_4$. Собирая указанные равенства вместе, получаем $X_aX_b = X_aX_d$. Проведя аналогичное рассуждение для сфер ω_c, ω_b и ω_d, покажем, что $X_cX_d = X_cX_b$. Отсюда следует, что точки X_a и X_c лежат на серединном перпендикуляре к отрезку X_bX_d, то есть, как показано выше, на прямой AC.

Рассмотрим плоскость π_{ac}, проходящую через AC и перпендикулярную плоскости основания пирамиды $(ABCD)$. Так как точки касания сфер ω_a и ω_c с $(ABCD)$ — точки X_a и X_c — лежат на AC, то центры I_a и I_c лежат в π_{ac}. Это означает, что прямые AI_a и CI_c пересекаются в некоторой точке, которую мы обозначим I (обе точки I_a и I_c лежат в части плоскости π_{ac}, ограниченной прямыми, перпендикулярными плоскости $(ABCD)$, проходящими через A и C, поэтому точка I действительно существует). Поскольку точки прямой AI_a равноудалены от плоскостей (SAD), (SAB) и $(ABCD)$, а точки прямой CI_c равноудалены от плоскостей (SCD), (SBC) и $(ABCD)$, то I равноудалена от плоскостей всех граней пирамиды $SABCD$ и лежит внутри неё. Значит, в $SABCD$ можно вписать сферу, причём I — центр этой вписанной сферы.

Докажем, что прямые I_dI_b и BD не параллельны.

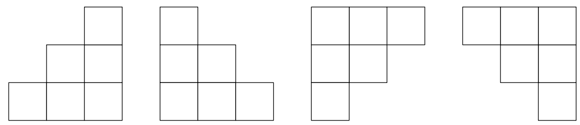
Доказательство. Если $I_dI_b \parallel BD$, то $I_dX_dX_bI_b$ — прямоугольник, в котором точка касания X сфер ω_b и ω_d является серединой отрезка I_bI_d. В таком случае S лежит в плоскости π', проходящей через сердину I_dI_b и перпендикулярной этому отрезку, а сферы ω_b и ω_d симметричны относительно π'. Тогда пары плоскостей граней (SCD), (SBD) и (SAD), (SAB) также симметричны относительно π', откуда следует, в частности, что $CD = CB$, $AD = AB$, что противоречит условию.

Так как I — центр вписанной сферы, то через эту точку также проходят лучи BI_b, DI_d. Отсюда следует, что точки (BDI_bI_d) лежат в одной плоскости. Поскольку ортогональная проекция прямой I_bI_d на плоскость $(ABCD)$ — прямая X_1X_3 — как показано выше, перпендикулярна прямой AC, то $AC \perp I_bI_d$. По условию задачи $AC \perp BD$. Так как прямые I_bI_d и BD не параллельны, получаем, что плоскость (I_dI_bBD) перпендикулярна AC. Отсюда следует, что точки касания X_b и X_d лежат на прямой BD.

Для завершения решения достаточно, как и в концовке первого способа, воспользовавшись леммой 1.1, обосновать равенства углов $\angle X_cBD = \angle X_aBD$ и $\angle X_cDB = \angle X_aDB$.

ММО-2026, 11 класс, второй день

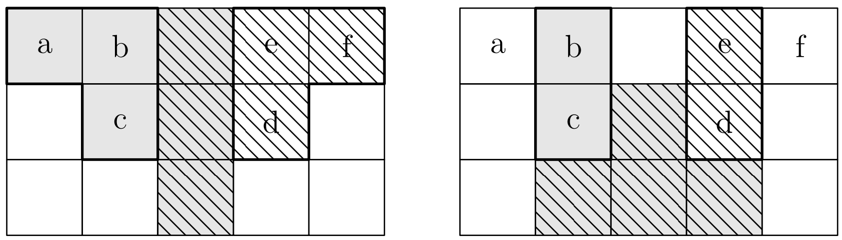
Задача 1. В каждой клетке бесконечной клетчатой плоскости записано по одному действительному числу так, что суммы чисел во всех группах клеток, образующих «лесенку» (см. рисунок), одинаковы. Может ли среди записанных чисел быть по крайней мере 89 различных?



(*Жюри*)

Ответ: нет.

Решение. Отметим четыре «лесенки» в прямоугольнике 3×5, как показано на рисунке. Приравняв



суммы чисел в них, получим равенства

$$\begin{cases} a+b+c=d+e+f \\ b+c=d+e \end{cases},$$

откуда следует, что $a=f$. Таким образом, расстановка чисел на клетчатой плоскости периодична с шагом 4 по горизонтали. Проводя аналогичное рассуждение для прямоугольника 5×3, получим, что она периодична с шагом четыре и по вертикали. Тогда на доске написано не больше $4\cdot 4=16$ различных чисел.

Задача 2. Действительные числа a, b, c, d таковы, что

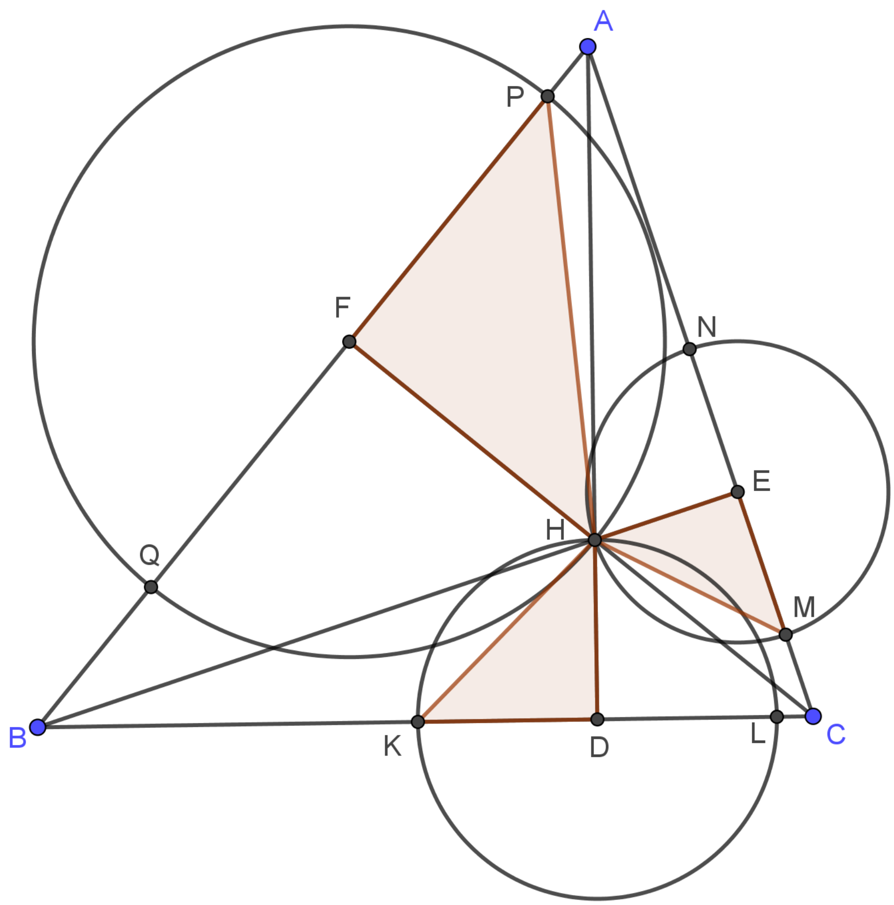
$$a+\operatorname{arctg} b > c+\operatorname{arctg} d, \quad b+\operatorname{arctg} a > d+\operatorname{arctg} c.$$

Докажите, что $a+b>c+d$. (*М. Гасанов*)

Решение. Если $a\leqslant c$ и $b\leqslant d$, то $a+\operatorname{arctg} b\leqslant c+\operatorname{arctg} d$, что противоречит первому из неравенств в условии задачи. Следовательно, $a>c$ или $b>d$. Без ограничения общности можно считать, что $a>c$. Функция $f(x)=x-\operatorname{arctg} x$ строго возрастает, так как её производная $f'(x)=1-\frac{1}{1+x^2}$ положительна при всех $x\neq 0$. Поэтому $f(a)>f(c)$, т. е. $a-\operatorname{arctg} a>c-\operatorname{arctg} c$. Складывая это неравенство со вторым неравенством из условия задачи, получаем $a+b>c+d$, что и требовалось доказать.

Задача 3. В остроугольном треугольнике ABC высоты AD, BE и CF пересекаются в точке H. Три окружности с центрами в точках D, E, F, проходящие через H, пересекают прямые BC, CA и AB соответственно в шести различных точках. Докажите, что эти шесть точек можно разбить на две тройки так, чтобы для двух треугольников, образованных этими тройками точек, нашлась окружность, касающаяся всех шести прямых, содержащих стороны этих треугольников. (*И. Михайлов*)

Решение. Обозначим точки пересечения трёх окружностей с центрами в точках D, E, F, проходящих через H, с прямыми BC, CA и AB соответственно, как показано на рисунке. Поскольку



треугольники HKD, HME, HPF — прямоугольные и равнобедренные, выполнены равенства

$$\frac{HK}{HD} = \frac{HM}{HE} = \frac{HP}{HF} = \sqrt{2}.$$

Тогда заметим, что при композиции поворота вокруг точки H на угол 45° против часовой стрелки и гомотетии с центром в H и коэффициентом $\sqrt{2}$ треугольник DEF переходит в треугольник KMP. Поскольку H — центр окружности, вписанной в треугольник DEF (обозначим её радиус r), получаем, что H — центр окружности, вписанной в треугольник KMP, радиус которой равен $r\sqrt{2}$. Проводя аналогичное рассуждение для равнобедренных прямоугольных треугольников HDL, HEN и HFQ, получаем, что окружность с центром в H радиуса $r\sqrt{2}$ вписана в треугольник LNQ. Таким образом, у треугольников KMP и LNQ — общая вписанная окружность, что и требовалось доказать.

Задача 4. В классе, состоящем из не менее 5 учеников (девочек и мальчиков), провели контрольную работу. Известно, что во время работы каждая пара школьников пообщалась и ровно один из учеников в этой паре помог другому. В результате оказалось, что для каждого ученика среди тех, кому он помог, поровну девочек и мальчиков. Сколько учеников могло быть в классе? (*М. Гасанов, М. Кошелев*)

Ответ: k^2 для любого натурального числа $k \geqslant 3$.

Решение. Сначала докажем, что n должно быть полным квадратом. Действительно, обозначим количество мальчиков за m, а количество девочек за f. Просуммируем по всем людям количество человек того же пола, которым они помогли. Эта сумма будет равна $\binom{m}{2} + \binom{f}{2}$, поскольку каждая пара людей одного пола добавляет единицу к указанной сумме. С другой стороны, эта сумма совпадает с суммой по всем людям количества человек противоположного пола, которым они помогли. В свою очередь, последняя сумма равна mf. Таким образом, получаем, что

$$\binom{m}{2} + \binom{f}{2} = mf,$$

откуда

$$(m-f)^2 = m^2 - 2mf + f^2 = m + f = n.$$

Итак, мы знаем, что $n = k^2$. Более того, из рассуждений выше следует, что $m - f = \pm k$, откуда $\{m, f\} = \left\{\binom{k}{2}, \binom{k+1}{2}\right\}$. Теперь осталось построить пример для таких параметров. Это можно сделать несколькими способами.

Первый способ. Докажем по индукции, что для всякого $k \geq 3$ существует конструкция с $(k^2-k)/2$ мальчиками и $(k^2+k)/2$ девочками.
База: для $k = 3$ пример строится непосредственно (например, можно взять конструкцию из Случая 2 следующего решения).
Переход: возьмём конструкцию A из предположения индукции, добавим n мальчиков и $n+1$ девочку, причём одну девочку выделим (пусть её зовут Таня).

Пусть все дети из конструкции A помогают в точности всем добавленным, кроме Тани (то есть они помогли n девочкам и n мальчикам);

Также пусть Таня помогает всем детям из конструкции A, а также добавленным мальчикам, и ни одной добавленной девочке (таким образом, она помогла по $(n^2+n)/2$ мальчикам и девочкам).

Наконец, занумеруем добавленных детей каждого пола (мальчиков и всех девочек, кроме Тани, по-отдельности) числами от 1 до n. Внутри одного пола дети с бо́льшими номерами помогают детям с ме́ньшим номером. Кроме того, девочки помогают мальчикам тогда и только тогда, когда их номер не меньше, чем номер мальчика. Итого, k-ая добавленная девочка помогла k девочкам (считая Таню) и k мальчикам, а k-ый новый мальчик помог $(k-1)$-й девочке и такому же количеству мальчиков.

Второй способ. Построим три вспомогательные конструкции.

Конструкция 1. Рассмотрим полный ориентированный граф на $2s+1$ вершине, в котором вершины пронумерованы числами $0, \ldots, 2s$, причем из вершины v выходят ребра с концами $v+1, \ldots, v+s$ (все числа рассматриваем по модулю $2s+1$). Это задает s-регулярный турнир на $2s+1$ вершине. Назовем такую конструкцию $\mathrm{Reg}(2s+1)$.

Конструкция 2. Рассмотрим полный ориентированный граф на $2s$ вершинах, в котором вершины пронумерованы числами $0, \ldots, 2s-1$, причем из вершины v выходят ребра с концами $v+1, \ldots, v+s-1$ (все числа рассматриваем по модулю $2s$). Кроме того, из вершин v с номерами $0, \ldots, s-1$ выходит ребро в вершину $v+s$. Получаем граф, в котором исходящие степени вершин с номерами $0, \ldots, s-1$ равны s, а исходящие степени вершин с номерами $s, \ldots, 2s-1$ равны $s-1$. Такую конструкцию назовем $\mathrm{Circ}(2s)$.

Конструкция 3. Зафиксируем натуральные числа l и r и рассмотрим целые неотрицательные числа a и b с условиями $al = br$, $a \leq r$, $b \leq l$. Пусть, кроме того, $g_l = l/\text{НОД}(l, r)$, $g_r = r/\text{НОД}(l, r)$. Заметим, что из условия немедленно следуют соотношения

$$g_r \mid a, \quad \frac{a}{g_r} \leq \frac{r}{g_r}, \quad b = \frac{la}{r} = \frac{g_l a}{g_r}.$$

Построим сначала двудольный граф, размеры левой и правой долей которого равны $t = \text{НОД}(l, r)$. Вершины каждой доли будем нумеровать числами от 0 до $t-1$. Для каждого $x \in \{0, \ldots, t-1\}$ добавим в граф ребра $(x, x+i)$, $i \in \{0, \ldots, a/g_r - 1\}$. Получили (a/g_r)-регулярный двудольный граф. Теперь каждую вершину левой доли превратим в g_l вершин, а каждую вершину правой доли — в g_r

вершин. Таким образом, получили граф, левая доля которого имеет размер l, правая — r, степень каждой вершины левой доли равна a, степень каждой вершины правой доли равна b. Наконец, ориентируем все проведенные ребра так, чтобы они шли из левой доли в правую, а между каждой парой несмежных вершин добавим ребро из правой доли в левую. Полученный граф назовем графом $\mathrm{Part}(l, r, a, b)$.

Итак, теперь мы готовы строить примеры. Для этого разберем 4 случая:

Случай 1. Пусть $l = \binom{k}{2}$ и $r = \binom{k+1}{2}$ оба нечетные. Заметим, что выполняются соотношения $r \geq (l-1)/2, l \geq l - (r-1)/2$, а также равенство (проверяется непосредственно)

$$\frac{l(l-1)}{2} = r\left(l - \frac{r-1}{2}\right).$$

Тогда построим на множестве мальчиков граф $\mathrm{Reg}(l)$, на множестве девочек граф $\mathrm{Reg}(r)$, а между ними — граф $\mathrm{Part}(l, r, (l-1)/2, l-(r-1)/2)$. Теперь для каждого ребра (x, y) будем считать, что x помог y. Тогда каждый мальчик помог $(l-1)/2$ мальчикам и девочкам, а каждая девочка помогла $(r-1)/2$ мальчику и девочке.

Случай 2. Пусть $l = \binom{k}{2}$ нечетно, а $r = \binom{k+1}{2}$ четно. Выделим одну из девочек (пусть её зовут Таня). Скажем, что Тане помогли как все мальчики, так и все остальные девочки. Для оставшихся людей повторим конструкцию из Случая 1: построим на множестве мальчиков граф $\mathrm{Reg}(l)$, на множестве девочек граф $\mathrm{Reg}(r-1)$, а между ними — граф $\mathrm{Part}(l, r-1, (l-1)/2-1, l-r/2)$ (условия существования такого графа снова проверяются непосредственно).

Случай 3. Пусть $l = \binom{k}{2}$ четно, а $r = \binom{k+1}{2}$ нечетно. Выделим одного из мальчиков (пусть его зовут Петя). Скажем, что Пете помогли как все остальные мальчики, так и все девочки. Для оставшихся людей повторим конструкцию из Случая 1: построим на множестве мальчиков граф $\mathrm{Reg}(l-1)$, на множестве девочек граф $\mathrm{Reg}(r)$, а между ними — граф $\mathrm{Part}(l-1, r, l/2, l-(r-1)/2)$ (условия существования такого графа снова проверяются непосредственно).

Случай 4. Пусть $l = \binom{k}{2}$ и $r = \binom{k+1}{2}$ оба четны (отсюда сразу же следует четность k). Построим на множестве мальчиков граф $\mathrm{Circ}(l)$, на множестве девочек граф $\mathrm{Circ}(r)$. Теперь пусть F_1, F_2 — половины девочек со степенями $r/2$ и $r/2-1$ соответственно. Построим всех девочек по кругу (причем под номерами $0, \ldots, r/2-1$ будут стоять девочки из F_1), а мальчиков выстроим в ряд. После этого i-й мальчик поможет девочкам с номерами $S_i+1, \ldots, S_i+d_i$ (по модулю r), где d_i есть степень i-ого мальчика, а $S_i = d_1 + \ldots + d_{i-1}$. Нетрудно видеть, что некоторому префиксу девочек (более точно, первым $\binom{l}{2} = S_{l+1} \bmod r$ девочкам) поможет $\lceil S_{l+1}/r \rceil$ мальчиков, а остальным — $\lfloor S_{l+1}/r \rfloor$ мальчиков. Осталось проверить соотношения $S_{l+1} \bmod r = r/2$, $\lceil S_{l+1}/r \rceil = r/2$, $\lfloor S_{l+1}/r \rfloor = r/2-1$, которые проверяются непосредственно.

Задача 5. Назовём натуральное $N > 1$ *хорошим*, если найдутся такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_N$, что наибольшие общие делители всевозможных пар из них образуют $N(N-1)/2$ последовательных натуральных чисел. Существует ли хорошее натуральное число, большее 10^{100}? (*А. Тертерян*)

Решение. Предположим, что найдётся хорошее натуральное число $N > 10^{100}$. Тогда найдутся такие натуральные числа $a_1, \ldots, a_N$, что наибольшие общие делители всевозможных пар из них образуют $N(N-1)/2$ последовательных натуральных чисел — обозначим их $b, b+1, \ldots, b+\frac{N(N-1)}{2}-1$.

Заметим, что для любого натурального числа k если среди чисел $a_1, \ldots, a_N$ ровно m чисел делятся на k, то среди их попарных НОД-ов ровно $\frac{m(m-1)}{2}$ делятся на k. Далее можно рассуждать по-разному.

Первый способ.

Заметим, что при $N > 4$ у числа $\frac{N(N-1)}{2}$ найдётся по крайней мере 2 различных простых делителя. В частности, у $\frac{N(N-1)}{2}$ найдётся простой делитель p, отличный от 3. Тогда среди чисел

$b, b+1, \ldots, b+\frac{N(N-1)}{2}-1$ ровно p делятся на $\frac{N(N-1)}{2p}$. Однако число вида $\frac{m(m-1)}{2}$ не может быть простым числом, отличным от 3, поскольку при $m \geq 4$ у него по крайней мере два различных простых делителя, а при $m = 1, 2, 3$ получаем значения 0, 1, 3. Противоречие.

Второй способ.

Поскольку попарные НОДы чисел $a_1, \ldots a_N$ образуют $\frac{N(N-1)}{2}$ последовательных натуральных чисел, то количество c_k чисел среди них, делящихся на k, равно $\left[\frac{N(N-1)}{2k}\right]$ или $\left[\frac{N(N-1)}{2k}\right]+1$.

Рассмотрим числа $c_N, c_{N+1}, \ldots, c_{\frac{N(N-1)}{2}}$. Заметим, что для любого $l = N, \ldots, \frac{N(N-1)}{2}$ числа c_l и c_{l+1} отличаются не больше чем на 3. Действительно, поскольку для каждого $j = 1, \ldots, \frac{N(N-1)}{2}$ выполнены неравенства

$$\frac{N(N-1)}{2j}-1 \leq \left[\frac{N(N-1)}{2j}\right] \leq c_j \leq \left[\frac{N(N-1)}{2j}\right]+1 \leq \frac{N(N-1)}{2j}+1,$$

имеет место оценка

$$|c_l - c_{l+1}| \leq \left|\frac{N(N-1)}{2l}-\frac{N(N-1)}{2(l+1)}\right|+2 = \left|\frac{N(N-1)}{2l(l+1)}\right|+2 \leq \frac{1}{2}+2 < 3.$$

Рассмотрим такое минимальное натуральное $l \geq N$, что $c_l > c_{l+1}$. Поскольку $c_N \geq \frac{N(N-1)}{2}-1 > 10^{100}+2$, а $c_l = c_N$, получаем, что c_l и c_{l+1} — два числа, большие 10^{100}, отличающиеся не больше чем на 3. С другой стороны, как было отмечено выше, оба числа c_l и c_{l+1} имеют вид $m(m-1)/2$, где m — натуральное. Но при $m > 3$ соседние числа такого вида отличаются хотя бы на 4, поскольку

$$\frac{(m+1)m}{2}-\frac{m(m-1)}{2} = m > 3.$$

Противоречие.