LXXXIX Московская математическая олимпиада

15 марта 2026 года • 10 класс

Задача 1. Дан остроугольный треугольник ABC. На его описанной окружности отмечена точка D, диаметрально противоположная вершине A. Точки X и Y на стороне BC таковы, что $BX = XD$ и $CY = YD$ (точка X лежит на отрезке BY). Докажите, что DA — биссектриса угла XDY.

Задача 2. Дано квадратное уравнение $ax^2+bx+c = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами a, b и c, имеющее целый корень. Может ли оказаться, что если увеличить любой из этих трёх коэффициентов на 1, то полученное уравнение останется квадратным и также будет иметь целый корень?

Задача 3. Имеется двести шариков ста цветов, по два шарика каждого цвета. Фокусник разложил их произвольным образом в сто коробочек, по два шарика в коробочку, где что лежит — игрок не знает. За ход игрок указывает на любые две коробочки, после чего фокусник незаметно для игрока выбирает по шарику из этих коробочек и меняет их местами. Если в какой-то момент в каждой коробочке будут лежать разноцветные шарики, ведущий выдаёт игроку приз. Может ли игрок действовать так, чтобы гарантированно получить приз, как бы фокусник ни менял шарики?

Задача 4. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $BD = DE = CE$. На отрезках AB, AC, AE и AD выбраны точки L, K, P и Q (все точки $A, B, C, D, E, K, L, P, Q$ различные) соответственно так, что

$$\angle EAD = \angle PDE = \angle QED = \angle AKP = \angle ALQ.$$

Докажите, что $LK + DE \leqslant AD + AE$.

Задача 5. Назовём набор из k последовательных натуральных чисел *хорошим*, если можно у каждого из этих чисел выбрать по простому делителю так, чтобы у всяких двух разных чисел были выбраны разные делители. В противном случае назовём набор *плохим*. При всяком ли натуральном k количество плохих наборов из k последовательных натуральных чисел конечно?

Задача 6. Дано натуральное $n \geqslant 2$. Симметрический многочлен $P(x_1, \ldots, x_n)$ таков, что уравнение $P(x_1, \ldots, x_n) = 0$ имеет вещественные решения, причём все эти решения получаются перестановкой чисел из одного-единственного набора $a_1, \ldots, a_n$. Известно, что в этом наборе есть хотя бы два различных числа. Для каждого $n \geqslant 2$ найдите наименьшую возможную степень многочлена P.

Многочлен называется симметрическим, если он не меняется при любой перестановке своих переменных. Степенью многочлена P от нескольких переменных называется наибольшая из сумм показателей степеней переменных в ненулевых слагаемых (одночленах) многочлена P, записанного в стандартном виде. Например, у многочлена $P(x, y) = x^3y^3+xy^4+x^4y$ степень равна 6 (так как $3 + 3 = 6$, а это больше, чем $4 + 1 = 5$).

XXIII устная городская олимпиада по геометрии для 8–11 классов состоится 12 апреля.
Подробности — на странице `olympiads.mccme.ru/ustn/`

Задачи, решения, информация о закрытии
LXXXIX Московской математической олимпиады —
на сайте `mmo.mccme.ru`

ММО 2026, 10 класс, решения задач

1. Дан остроугольный треугольник ABC. На его описанной окружности отмечена точка D, диаметрально противоположная вершине A. Точки X и Y на стороне BC таковы, что $BX = XD$ и $CY = YD$ (точка X лежит на отрезке BY). Докажите, что DA — биссектриса угла XDY.

Решение 1. Пусть O — центр описанной окружности треугольника ABC. Рассмотрим треугольники BOX и DOX. В них $OB = OD$ как радиусы, $BX = DX$ по условию, OX — общая сторона, поэтому они равны по трём сторонам. Следовательно, $\angle ODX = \angle OBX$. Аналогично треугольники COY и DOY равны по трём сторонам, поэтому $\angle ODY = \angle OCY$. Но треугольник OBC равнобедренный, поэтому $\angle OBX = \angle OCY$, то есть $\angle ODX = \angle ODY$, что и требовалось доказать.

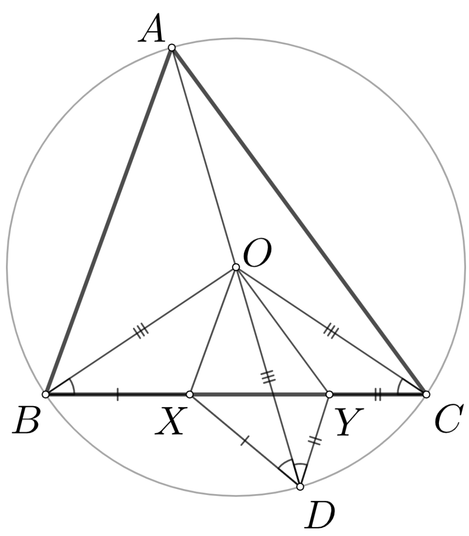


Рис. 1. к решению 1 задачи 1

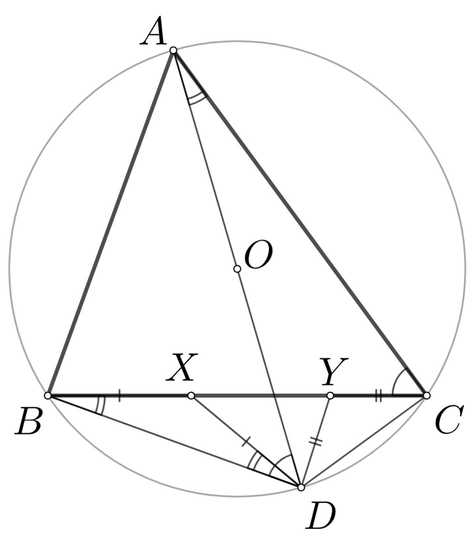


Рис. 2. к решению 2 задачи 1

Решение 2. Так как треугольник BXD равнобедренный, то $\angle BDX = \angle DBX$. Тогда

$$\angle ADX = \angle ADB - \angle BDX = \angle ACB - \angle DBX = \angle ACB - \angle DAC.$$

Из равнобедренного треугольника AOC следует, что

$$\angle OAC = 90^\circ - \frac{\angle AOC}{2} = 90^\circ - \frac{2\angle ABC}{2} = 90^\circ - \angle ABC.$$

Таким образом, $\angle ADX = \angle ABC + \angle ACB - 90^\circ$. Аналогично выразив $\angle ADY$, получим такое же выражение. Следовательно, $\angle ADX = \angle ADY$, что и требовалось доказать.

Решение 3. Продлим DX и DY до повторного пересечения с окружностью в точках P и Q соответственно. Так как имеют место равенства вписанных углов

$\angle BDP = \angle DBC$ и $\angle CDQ = \angle DCB$ (и все эти углы — острые), будут равны градусные меры дуг, на которые они опираются: $PB = CD$ и $QC = BD$. Тогда $AP = ABD - BD - PB = ACD - QC - CD = AQ$, но тогда равны вписанные углы $\angle ADP = \angle ADQ$ как опирающиеся на равные дуги, что и требовалось доказать.

2. Дано квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ с целыми ненулевыми коэффициентами a, b и c, имеющее целый корень. Может ли оказаться, что если увеличить любой из этих трёх коэффициентов на 1, то полученное уравнение останется квадратным и также будет иметь целый корень?

Ответ: да, может.

Решение. Обозначим квадратные трёхчлены $f_1(x) = (a+1)x^2 + bx + c, f_2(x) = ax^2 + (b+1)x + c = 0$ и $f_3(x) = ax^2 + bx + c + 1$. Если будет выполнено равенство $a + b + c + 1 = 0$, то единица будет корнем всех трёх квадратных трёхчленов f_1, f_2 и f_3. Теперь нужно, чтобы уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ также имело целый корень. Достаточно выполнить условие $4a+2b+c = 0$, тогда двойка будет корнем. Остаётся выбрать подходящее решение системы из двух линейных уравнений. Например, можно взять $a = 2, b = -5$ и $c = 2$.

3. Имеется двести шариков ста цветов, по два шарика каждого цвета. Фокусник разложил их произвольным образом в сто коробочек, по два шарика в коробочку, где что лежит - игрок не знает. За ход игрок указывает на любые две коробочки, после чего фокусник незаметно для игрока выбирает по шарику из этих коробочек и меняет их местами. Если в какой-то момент в каждой коробочке будут лежать разноцветные шарики, ведущий выдаёт игроку приз. Может ли игрок действовать так, чтобы гарантированно получить приз, как бы фокусник ни менял шарики?

Ответ: да, может.

Решение. Разобьём все коробочки на 50 пар подряд идущих и пронумеруем эти пары слева направо. Будем говорить, что применяем операцию для одной из этих пар, если мы указываем на две коробочки этой пары. Назовём пару плохой, если хотя бы в одной из коробочек данной пары лежат одноцветные шарики, иначе назовём пару хорошей. Заметим, что если мы указываем на плохую пару, то она обязательно становится хорошей. Докажем следующую лемму.

Лемма. Для любого натурального $n \leqslant 50$ существует последовательность операций к первым n парам, при которой гарантированно существует момент, когда все эти n пар становятся хорошими.

Доказательство. Будем использовать индукцию по n. Для $n = 1$ просто применяем одну операцию к первой паре.
Докажем переход. Пусть утверждение леммы выполянется для $n - 1$, докажем его для n. Применим последовательность операций из предположения индукции для первых $n-1$ пар. После этого применим операцию к n-ой паре, а потом еще раз повторим последовательность операций для первых $n-1$ пар. Таким образом, независимо от того, была ли n-ая пара изначально плохой или хорошей, найдётся момент, когда все первые n пар будут хорошими. Переход доказан.

По лемме для $n = 50$ у нас существует последовательность операций, при которой все 50 пар в какой-то момент гарантированно станут хорошими, что и требовалось.

4. На стороне BC треугольника ABC выбраны точки D и E так, что $BD =$

$DE = CE$. На отрезках AB, AC, AE и AD выбраны точки L, K, P и Q (все точки $A, B, C, D, E, K, L, P, Q$ различные) соответственно так, что

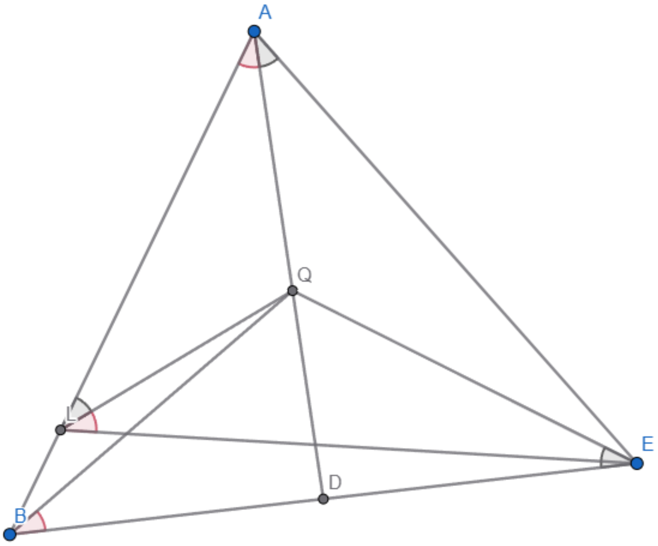
$$\angle EAD = \angle PDE = \angle QED = \angle AKP = \angle ALQ.$$

Докажите, что $LK + DE \leqslant AD + AE$.

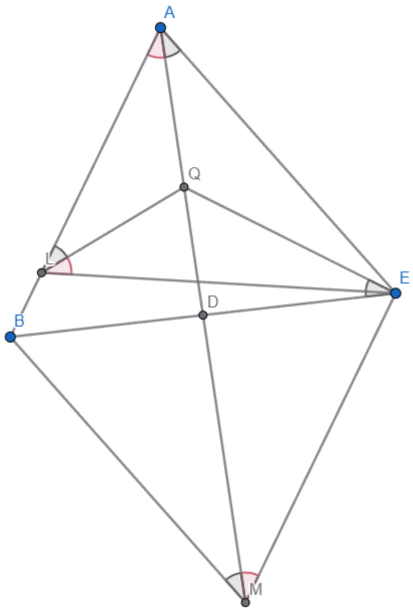
Решение. Сначала покажем, что $AE = LE$. Приведём два возможных способа.

Способ №1. Треугольники DAE и DEQ подобны, т.к. $\angle DAE = \angle DEQ$ и $\angle EDA = \angle EDQ$. Отсюда следует, что $\frac{DA}{DE} = \frac{DE}{DQ}$, то есть $DE^2 = DA \cdot DQ$. При это $DE = DB$, поэтому $DB^2 = DA \cdot DQ$. В таком случае треугольники DAB и DBQ также подобны, т.к. $\frac{DA}{DB} = \frac{DB}{DQ}$ и $\angle BDA = \angle BDQ$. Из этого подобия следует равенство $\angle DAB = \angle DBQ$.

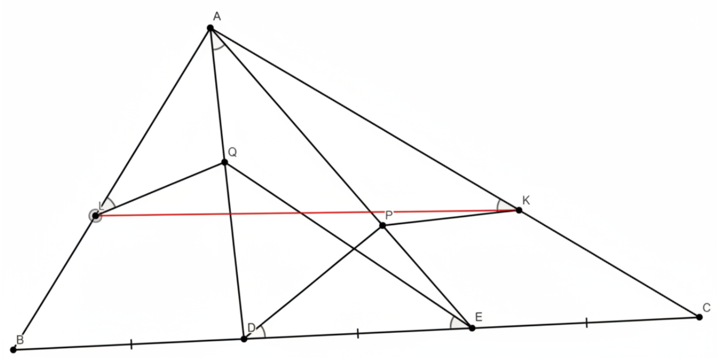
По условию $\angle BEQ = \angle QEA$, поэтому четырёхугольник $EQLB$ — вписанный. Получаем цепочку равенств $\angle DAB = \angle DBQ = \angle ELQ$. Тогда $\angle ELA = \angle ELQ + \angle QLA = \angle DAB + \angle DAE = \angle EAL$, поэтому $AE = EL$.



Способ №2. Продлив отрезок AD за точку D на его длину, получим такую точку M на луче AD, что $AD = DM$, тогда $AEMB$ — четырехугольник, в котором диагонали делятся точкой пересечения пополам, а значит, параллелограмм. Из параллельности ясно, что $\angle AMB = \angle EAM$. Четырехугольник $QEMB$ — вписанный, поскольку $\angle QEB = \angle QMB$, то есть точка E лежит на описанной около $\triangle QBM$ окружности. Четырехугольник $QLBM$ — вписанный, поскольку $\angle ALQ = \angle QMB$, то есть точка L лежит на описанной около $\triangle QBM$ окружности. Значит, точки $ELBM$ лежат на одной окружности, и четырехугольник $ELBM$ с параллельными сторонами EM и LB — равнобедренная трапеция или прямоугольник, тогда $EL = BM = AE$. Получаем требуемое.



Теперь приведём оставшуюся часть решения задачи. Аналогично равенству $AE = LE$ доказывается равенство $AD = DK$. Из условия следует, что отрезки LE и DK пересекаются (действительно, L и D лежат с одной стороны от биссектрисы $\angle DAE$, а K и E — с другой). Тогда неравенство $LK + DE \leqslant AD + AE$ следует из того, что сумма диагоналей четырехугольника $LKED$ больше суммы его противоположных сторон LK и DE.



5. Назовём набор из k последовательных натуральных чисел *хорошим*, если можно у каждого из этих чисел выбрать по простому делителю так, чтобы у всяких двух разных чисел были выбраны разные делители. В противном случае назовём набор *плохим*. При всяком ли натуральном k количество плохих наборов из k последовательных натуральных чисел конечно?

Ответ: да, количество плохих наборов конечно для любого натурального k.

Решение. Пусть $n > k^k$. Докажем, что набор $n+1, \ldots, n+k$ является хорошим. Отметим, что любая пара чисел этого набора не может иметь общий делитель, больший k. Действительно, если есть такой общий делитель, то разность чисел также имеет этот делитель, но все разности меньше k.

Разделим все числа нашего набора на две группы. В первую группу возьмём те числа, у которых есть хотя бы один простой делитель, больший k, во вторую группу — все остальные числа.

Каждому числу из первой группы просто сопоставим любой простой делитель, который больше k. Ясно, что данные простые делители не будут совпадать.

Пусть $p_1, \dots, p_m$ — все простые числа, не большие k. Каждое из этих чисел второй группы можно представить в виде $p_1^{\alpha_1} \dots p_m^{\alpha_m}$, где α_i — целые неотрицательные числа. Для каждого из чисел такого вида выберем делитель p_i такой, что $p_i^{\alpha_i}$ максимален среди множителей $p_1^{\alpha_1}, \dots, p_m^{\alpha_m}$. Из условия $n > k^k$ следует, что для этого i будет выполнено $p_i^{\alpha_i} > k$. Тогда выбранные простые числа будут различны, иначе у каких-то двух чисел набора будет общий делитель, больший k.

6. Дано натуральное $n \geqslant 2$. Симметрический многочлен $P(x_1, \dots, x_n)$ таков, что уравнение $P(x_1, \dots, x_n) = 0$ имеет вещественные решения, причем все эти решения получаются перестановкой чисел из одного единственного набора $a_1, \dots, a_n$. Известно, что в этом наборе есть хотя бы два различных числа. Для каждого $n \geqslant 2$ найдите наименьшую возможную степень многочлена P.

Ответ: 4 для любого $n \geqslant 2$.

Решение. Рассмотрим многочлен четвёртой степени

$$P(x_1, \dots, x_n) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i^2 x_j^2 + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - 1 \right)^2.$$

Если $P(a_1, \dots, a_n) = 0$, то $\sum_{i=1}^{n} a_i = 1$ и $a_i a_j = 0$ для всех $1 \leqslant i < j \leqslant n$. В таком случае одно из чисел этого набора должно быть равно единице, а все остальные числа равны нулю. Таким образом, данный многочлен подходит под условие.

Теперь покажем, что степень многочлена не может быть меньше четырёх. Без ограничения общности, будем считать, что $a_1 \neq a_2$. Рассмотрим многочлен $Q(x, y) = P(x, y, a_3, \dots, a_n)$ от двух переменных. Ясно, что Q — симметрический и $Q(x, y) = 0$ только при $\{x, y\} = \{a_1, a_2\}$. Заметим, что $\deg P \geqslant \deg Q$, поэтому достаточно показать, что $\deg Q \geqslant 4$. Таким образом, мы свели оценку только к случаю $n = 2$.

Предположим, что $\deg Q \leqslant 3$. Запишем Q в стандартном виде. Возьмём произвольное число a', отличное от a_1 и a_2. Рассмотрим многочлен $Q(x, a')$ от одной переменной. Он не может быть первой или третьей степени, т.к. иначе он имел бы корень, поэтому $\deg Q(x, a') = 2$ (нулевой степени, очевидно, быть не может). В таком случае мономов x^3 (и y^3 соответственно) в разложении не будет. Тогда мономов $x^2 y$ и $x y^2$ также быть не может, иначе $Q(x, x)$ был бы третьей степени и имел корень.

Таким образом, мы можем представить наш многочлен в виде $Q(x, y) = a(x^2 + y^2) + bxy + c(x + y) + d$, где $a \neq 0$. Без ограничения общности, будем считать, что $a > 0$. Рассмотрим уравнение $Q(x, a_1 + a_2 - x)$, оно должно иметь ровно 2 корня a_1 и a_2. Получаем параболу с ветвями вверх и двумя корнями, поэтому неё найдётся и отрицательное значение $Q(x_1, y_1) < 0$. Осталось заметить, что $Q(x, y_1)$ является также параболой с ветвями вверх и отрицательным значением, поэтому имеет два корня, что противоречит условию.