Авторский вариант «Школково» №9
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов №1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов №2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

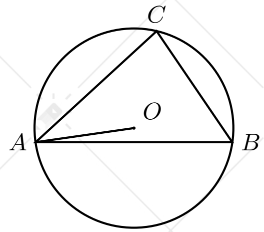
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

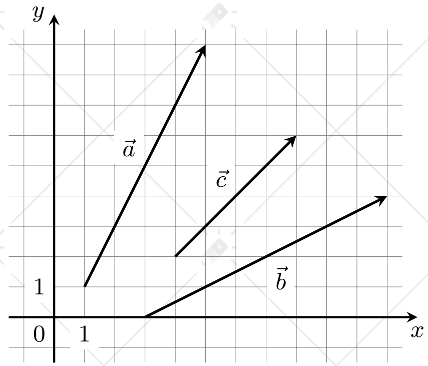
Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Вокруг треугольника ABC описана окружность. Угол ACB равен 60°. При этом $AC = 13$, $BC = 11$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.



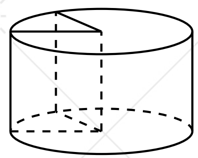
Ответ: ____________________.

2 На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $2\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}$.



Ответ: ____________________.

3 Из цилиндра с высотой $\frac{24}{\pi}$ и радиусом 6 вырезали фигуру, основаниями которой являются секторы с углом 60°. Найдите объём вырезанной фигуры.



Ответ: ____________________.

4 Вероятность того, что батарейка проработает не меньше 100 часов, равна 0,78. Вероятность того, что она проработает больше 150 часов, равна 0,46. Найдите вероятность того, что батарейка проработает от 100 до 150 часов включительно.

Ответ: ____________________.

5 На контрольной работе по математике вероятность того, что ученик допустит ошибку в задании, равна 0,05. Вероятность того, что во время проверки учитель заметит ошибку, если она есть, равна 0,8. Вероятность того, что учитель по ошибке поставит отметку об ошибке в правильно решённом задании, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранное задание будет оценено учителем как ошибочное.

Ответ: ____________________.

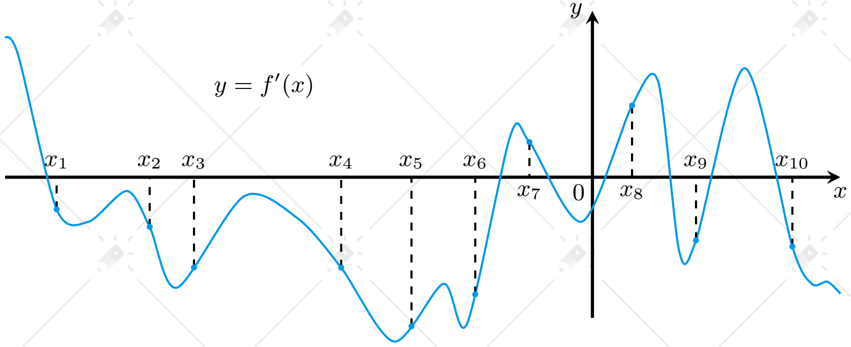
6 Найдите наибольший корень уравнения $|x^2 - 5x + 6| = 2$.

Ответ: ____________________.

7 Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{216} \cdot \sqrt[3]{216}}{\sqrt[6]{216}}$.

Ответ: ____________________.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено десять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9, x_{10}$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



Ответ: ____________________.

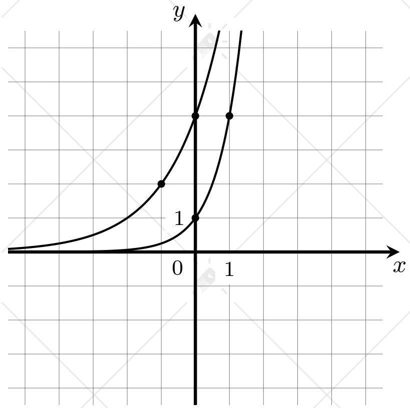
9 Для определения момента инерции тела его подвешивают на упругой нити и измеряют период крутильных колебаний. Период колебаний (в секундах) вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{I}{k}}$, где I – момент инерции тела (в кг · м^2), $k = 12\pi^2$ Н · м/рад – постоянная кручения нити. Найдите момент инерции тела, если период колебаний равен 2 с. Ответ дайте в кг · м^2.

Ответ: ____________________.

10 Вере надо сшить 480 фуражек. Первые два дня она шьет одинаковое количество фуражек, а затем каждые следующие два дня она увеличивает норму на одно и то же число фуражек по сравнению с предыдущими двумя днями. Известно, что за первый день она сшила 10 фуражек. Определите, сколько фуражек было сшито за четвертый день, если вся работа была выполнена за 12 дней.

Ответ: ____________________.

11 На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = a^x$ и $g(x) = k \cdot b^x$, пересекающиеся в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Ответ: ____________________.

12 Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 18x + 7$.

Ответ: ____________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x - \sqrt{3}\sin(x-\pi) - 1}{\log_{23}\sin x} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$.

14 В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$, для которой $AD \parallel BC$, $AB = CD = 2$, $AD = 6$ и $BC = 4$. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно $\sqrt{3}$. Через точку C проведено сечение пирамиды плоскостью α, параллельной ребрам AB и SD.
а) Докажите, что плоскость α делит ребро SA в отношении $1:2$, считая от вершины S.
б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.

15 Решите неравенство

$$\log_{\log_5 x - 3}\left(2\log_5^2 x - 7\log_5 x + 3\right) > 1.$$

16 В июле 2020 года Инна взяла кредит в банке на 4 года на S млн рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь сумма долга увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– в июле 2024 года долг должен быть выплачен полностью.
Сразу же Инна положила взятую в кредит сумму на вклад в другой банк на 4 года на следующих условиях:
– каждый январь сумма вклада увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;
– снятие средств со вклада запрещено до окончания времени действия вклада.
Чему равно S, если после погашения кредита и снятия в июле 2024 года всех средств со вклада Инна заработает 428200 рублей? Под заработком понимаем разность итоговой суммы на вкладе и всех выплат по кредиту.

17 Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Прямая AO пересекает отрезок BC в точке D. Точка E выбрана на отрезке BC так, что $CD = DE$. Основание T перпендикуляра, опущенного из точки E на CO, лежит в треугольнике ABD.
а) Докажите, что вокруг четырехугольника $BTOD$ можно описать окружность.
б) Найдите радиус окружности, описанной вокруг $BTOD$, если $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BE = 1$.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} \left|4|y| + 0{,}5x^2 - 85\right| = 13 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет 4 различных решения.

19 Из натурального числа, написанного на доске, за один ход получают другое натуральное число следующим образом: для каждой пары соседних цифр исходного числа вычисляют их произведение и вписывают результат между этими цифрами. Например, если на доске было написано число 1234, то из него получится число 12263124.
а) Можно ли с помощью такой операции получить число 2105255357?
б) Можно ли с помощью такой операции получить число 32486297426?
в) Какое наибольшее 10-значное число можно получить после такой операции?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Решения авторского варианта «Школково» №9

Задание №1

Ответ: 7

Задание №2

Ответ: 20

Задание №3

Ответ: 144

Задание №4

Ответ: 0,32

Задание №5

Ответ: 0,059

Задание №6

Ответ: 4

Задание №7

Ответ: 36

Задание №8

Ответ: 8

Задание №9

Ответ: 12

Задание №10

Ответ: 22

Задание №11

Ответ: 2

Задание №12

Ответ: 144

Задание №13

Ответ: а) $\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ \frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ k\in\mathbb{Z}$

б) $\frac{\pi}{3};\ \frac{2\pi}{3};\ \frac{7\pi}{3};\ \frac{8\pi}{3}$

Задание №14

Ответ: б) 45°

Задание №15

Ответ: $x\in(625;+\infty)$

Задание №16

Ответ: 2

Задание №17

Ответ: б) $\frac{\sqrt{39}}{3}$

Задание №18

Ответ: $a\in\left(-\frac{49}{2};-18\right)\cup\left(-6\sqrt{5};-12\right)\cup\left\{-8\sqrt{2};8\sqrt{2}\right\}\cup\left(12;6\sqrt{5}\right)\cup\left(18;\frac{49}{2}\right)$

Задание №19

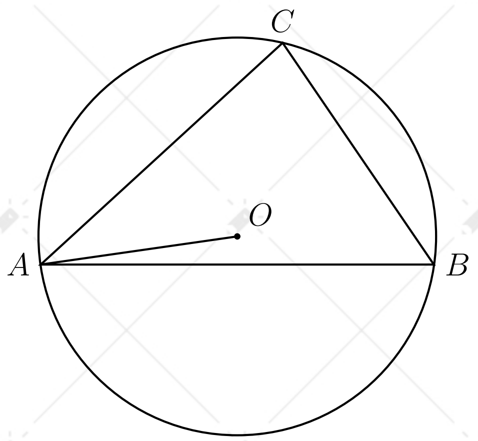
Ответ: а) да

б) нет

в) 9919981991

Задание №1

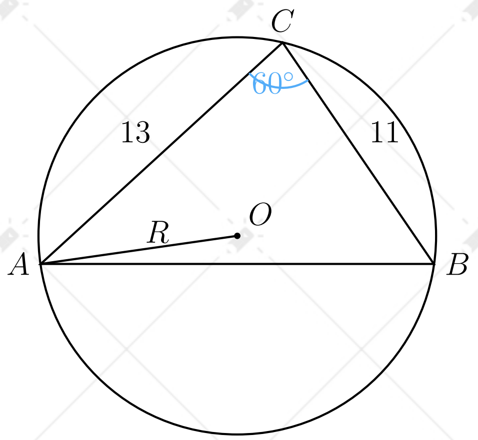
Вокруг треугольника ABC описана окружность. Угол ACB равен 60°. При этом $AC = 13$, $BC = 11$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.



Ответ

7

Решение



Найдем сторону AB по теореме косинусов:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos\angle ACB$$

$$AB^2 = 13^2 + 11^2 - 2 \cdot 13 \cdot 11 \cdot \cos 60^\circ$$

$$AB^2 = 169 + 121 - 286 \cdot \frac{1}{2} = 290 - 143 = 147$$

Следовательно, $AB = \sqrt{147} = 7\sqrt{3}$.

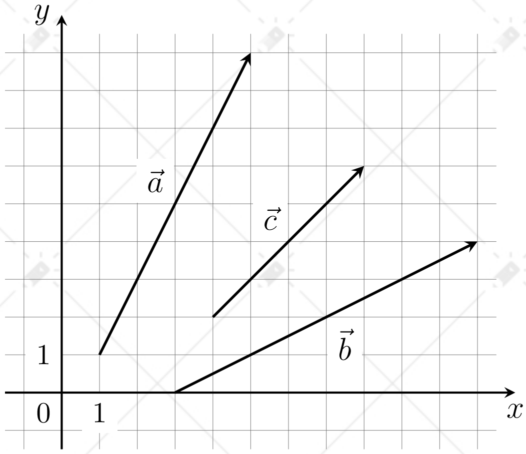
По теореме синусов:

$$\frac{AB}{\sin\angle ACB} = 2R$$

$$R = \frac{AB}{2\sin 60^\circ} = \frac{7\sqrt{3}}{2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} = 7.$$

Задание №2

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Найдите длину вектора $2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$.



Ответ

20

Решение

Найдем координаты векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$. Так как каждая координата вектора равна разности соответствующих координат конца и начала вектора, то

$$\vec{a}=\{5-1;\ 9-1\}=\{4;\ 8\};$$
$$\vec{b}=\{11-3;\ 4-0\}=\{8;\ 4\};$$
$$\vec{c}=\{8-4;\ 6-2\}=\{4;\ 4\}.$$

Следовательно, координаты вектора

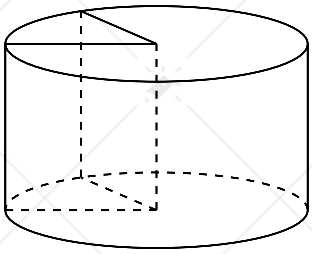
$$\vec{r}=2\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}=2\{4;8\}+\{8;4\}-\{4;4\}=$$
$$=\{8+8-4;\ 16+4-4\}=\{12;\ 16\}.$$

Длина этого вектора равна

$$\sqrt{12^2+16^2}=4\cdot\sqrt{9+16}=4\cdot\sqrt{25}=20.$$

Задание №3

Из цилиндра с высотой $\dfrac{24}{\pi}$ и радиусом 6 вырезали фигуру, основаниями которой являются секторы с углом 60°. Найдите объём вырезанной фигуры.



Ответ

144

Решение

Объём цилиндра радиусом R и высотой h равен $V_{\text{цил}} = \pi R^2 h$.

Вырезанная фигура представляет собой часть цилиндра, ограниченную сектором с центральным углом $\alpha = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$ радиан. Отношение объема такой фигуры к объему всего цилиндра равно отношению угла сектора к полному углу круга:

$$\frac{\alpha}{2\pi} = \frac{\frac{\pi}{3}}{2\pi} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, объём вырезанной фигуры:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi R^2 h.$$

Подставим $R = 6$ и $h = \dfrac{24}{\pi}$:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot \frac{24}{\pi} = \frac{1}{6} \cdot 36 \cdot 24 = 6 \cdot 24 = 144.$$

Задание №4

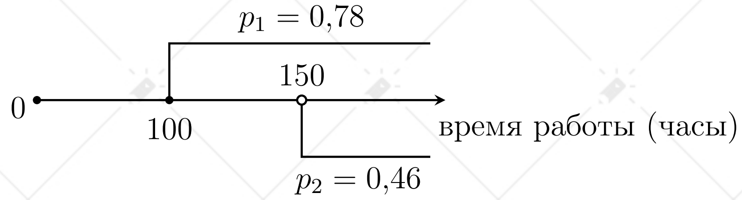
Вероятность того, что батарейка проработает не меньше 100 часов, равна 0,78. Вероятность того, что она проработает больше 150 часов, равна 0,46. Найдите вероятность того, что батарейка проработает от 100 до 150 часов включительно.

Ответ

0,32

Решение

Вероятность того, что батарейка проработает от 100 до 150 часов включительно, равна разности вероятностей того, что она проработает не меньше 100 часов, и того, что она проработает больше 150 часов.



Тогда искомая вероятность равна

$$p = p_1 - p_2 = 0{,}78 - 0{,}46 = 0{,}32.$$

Задание №5

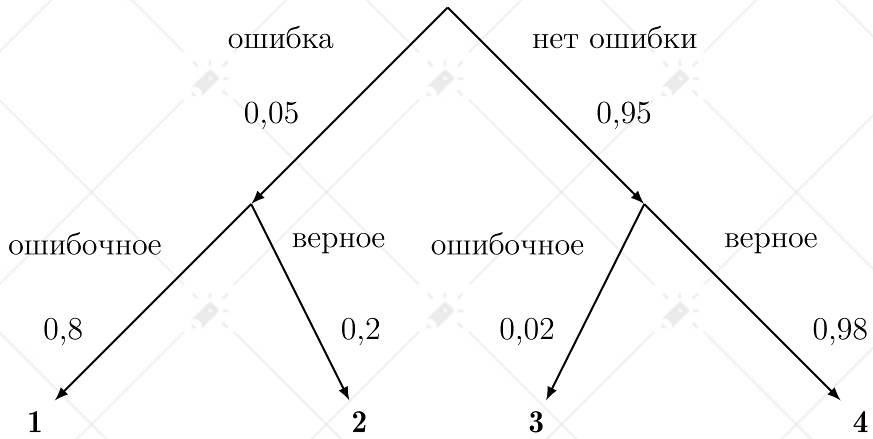
На контрольной работе по математике вероятность того, что ученик допустит ошибку в задании, равна 0,05. Вероятность того, что во время проверки учитель заметит ошибку, если она есть, равна 0,8. Вероятность того, что учитель по ошибке поставит отметку об ошибке в правильно решённом задании, равна 0,02. Найдите вероятность того, что случайно выбранное задание будет оценено учителем как ошибочное.

Ответ

0,059

Решение

Нарисуем дерево вероятностей:



Нас интересуют исходы 1 и 3, когда задание будет оценено как ошибочное.
Найдем вероятность исхода 1. Она равна произведению вероятностей на всех стрелках по пути к исходу 1, то есть

$$P(1) = 0{,}05 \cdot 0{,}8 = 0{,}04.$$

Найдем вероятность исхода 3. Она равна произведению вероятностей на всех стрелках по пути к исходу 3, то есть

$$P(3) = 0{,}95 \cdot 0{,}02 = 0{,}019.$$

Тогда вероятность того, что случайно выбранное задание будет оценено как ошибочное, равна сумме вероятностей исходов 1 и 3:

$$P(1 \cup 3) = P(1) + P(3) = 0{,}04 + 0{,}019 = 0{,}059.$$

Задание №6

Найдите наибольший корень уравнения $|x^2 - 5x + 6| = 2$.

Ответ

4

Решение

Уравнение $|x^2 - 5x + 6| = 2$ равносильно совокупности:

$$\left[\begin{aligned} &x^2 - 5x + 6 = 2, \\ &x^2 - 5x + 6 = -2. \end{aligned}\right.$$

Решаем первое уравнение:

$$x^2 - 5x + 4 = 0$$

$$x = 1 \qquad x = 4$$

Решаем второе уравнение:

$$x^2 - 5x + 8 = 0$$

$$D = 25 - 32 = -7 < 0$$

Следовательно, корней у второго уравнения нет.

Таким образом, наибольший корень $x = 4$.

Задание №7

Найдите значение выражения $\dfrac{\sqrt{216} \cdot \sqrt[3]{216}}{\sqrt[6]{216}}$.

Ответ

36

Решение

Представим каждый корень в виде степени с основанием 216:

$$\sqrt{216} = 216^{\frac{1}{2}}$$

$$\sqrt[3]{216} = 216^{\frac{1}{3}}$$

$$\sqrt[6]{216} = 216^{\frac{1}{6}}$$

Тогда выражение примет вид:

$$\frac{216^{\frac{1}{2}} \cdot 216^{\frac{1}{3}}}{216^{\frac{1}{6}}} = 216^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}}.$$

Вычислим показатель степени:

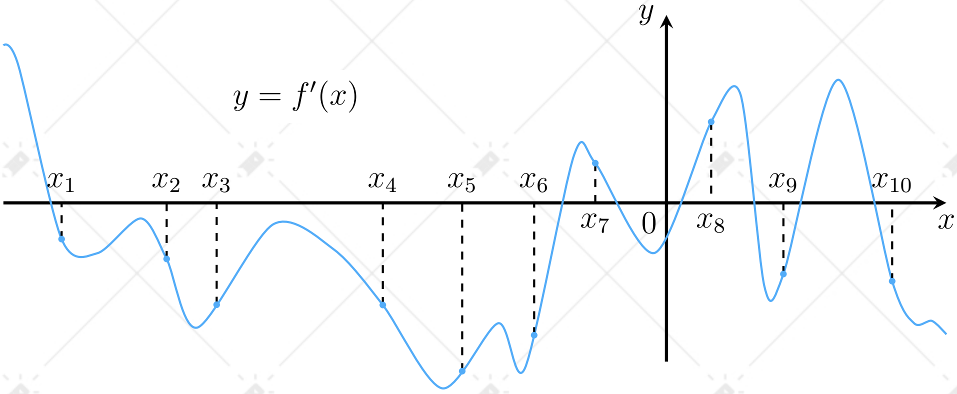
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{3+2-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

Таким образом, получаем:

$$216^{\frac{2}{3}} = (216^{\frac{1}{3}})^2 = 6^2 = 36.$$

Задание №8

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$. На оси абсцисс отмечено десять точек: $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6,\ x_7, x_8, x_9, x_{10}$. Сколько из этих точек принадлежит промежуткам убывания функции $f(x)$?



Ответ

8

Решение

Производная функции отрицательна в точках, которые лежат ниже оси Ox : x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_9, x_{10}.

Следовательно, эти точки принадлежат промежуткам убывания функции $f(x)$. Таких точек 8.

Задание №9

Для определения момента инерции тела его подвешивают на упругой нити и измеряют период крутильных колебаний. Период колебаний (в секундах) вычисляется по формуле $T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$, где I – момент инерции тела (в кг·м^2), $k = 12\pi^2$ Н·м/рад – постоянная кручения нити. Найдите момент инерции тела, если период колебаний равен 2 с. Ответ дайте в кг · м^2.

Ответ

12

Решение

Выразим момент инерции из формулы:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{k}}$$

$$\sqrt{\frac{I}{k}} = \frac{T}{2\pi}$$

$$\frac{I}{k} = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

$$I = k \cdot \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2$$

Подставим известные значения:

$$I = 12\pi^2 \cdot \left(\frac{2}{2\pi}\right)^2 = 12\pi^2 \cdot \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 = 12\pi^2 \cdot \frac{1}{\pi^2} = 12.$$

Таким образом, момент инерции тела равен 12 кг $\cdot$ м^2.

Задание №10

Вере надо сшить 480 фуражек. Первые два дня она шьет одинаковое количество фуражек, а затем каждые следующие два дня она увеличивает норму на одно и то же число фуражек по сравнению с предыдущими двумя днями. Известно, что за первый день она сшила 10 фуражек. Определите, сколько фуражек было сшито за четвертый день, если вся работа была выполнена за 12 дней.

Ответ

22

Решение

Обозначим количество фуражек, на которое увеличивается норма каждые два дня, за x. Тогда за первый и второй день она шьет по 10 фуражек, за третий и четвертый — по $10+x$ фуражек, за пятый и шестой — по $10+2x$ фуражек и так далее. Всего дней 12, значит, имеем 6 пар дней. За k-ую пару (где k от 1 до 6) она шьет по $10+(k-1)x$ фуражек в каждый из двух дней этой пары.

Общее количество сшитых фуражек равно сумме по всем дням. Так как в каждой паре по два одинаковых дня, то сумма равна

$$2\big(10 + (10+x) + (10+2x) + \ldots + (10+5x)\big).$$

В скобках сумма арифметической прогрессии из 6 членов: первый 10, последний $10+5x$, сумма равна

$$\frac{6 \cdot \big(10 + (10+5x)\big)}{2} = 3(20+5x) = 60 + 15x.$$

Тогда общая сумма

$$2(60+15x) = 120 + 30x.$$

По условию всего сшито 480 фуражек, поэтому

$$120 + 30x = 480$$

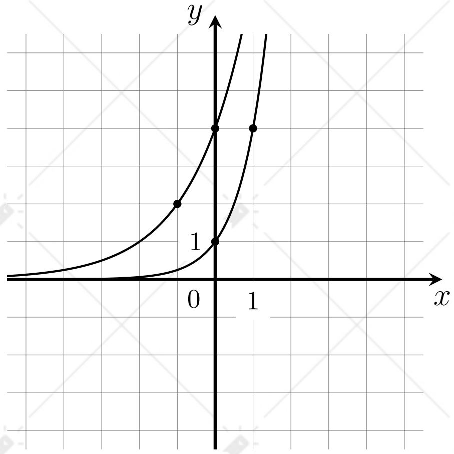
$$30x = 360$$

$$x = 12.$$

Тогда за четвертый день было сшито $10 + x = 22$ фуражки.

Задание №11

На рисунке изображены графики функций вида $f(x) = a^x$ и $g(x) = k \cdot b^x$, пересекающиеся в точке A. Найдите абсциссу точки A.



Ответ

2

Решение

График функции $f(x) = a^x$ проходит через точки $(0;1)$ и $(1;4)$, откуда $4 = a^1$.
Следовательно, $f(x) = 4^x$.
График функции $g(x) = k \cdot b^x$ проходит через точки $(-1;2)$ и $(0;4)$, следовательно,

$$\begin{cases} 4 = k \cdot b^0 \\ 2 = k \cdot b^{-1} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} k = 4 \\ b = 2 \end{cases}$$

Следовательно, $g(x) = 4 \cdot 2^x$.
Найдем абсциссу точки пересечения графиков этих функций:

$$4^x = 4 \cdot 2^x \quad \Leftrightarrow \quad 2^x = 4 \quad \Leftrightarrow \quad x = 2$$

Задание №12

Найдите точку минимума функции $y = x\sqrt{x} - 18x + 7$.

Ответ

144

Решение

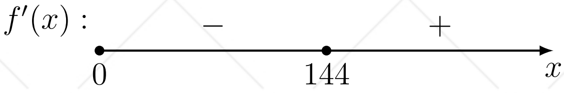
Обозначим $f(x) = x\sqrt{x} - 18x + 7$. Выпишем ОДЗ: $x \geqslant 0$.
Найдём производную функции:

$$f'(x) = \left(x\sqrt{x} - 18x + 7\right)' = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)' - 18 = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} - 18 = \frac{3}{2}\sqrt{x} - 18$$

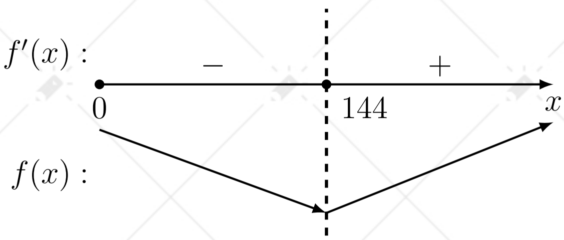
Найдём точки, в которых производная равна 0:

$$\frac{3}{2}\sqrt{x} - 18 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{x} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = 144$$

Применим метод интервалов для определения знаков производной:



Таким образом, при $0 \leqslant x \leqslant 144$ функция убывает, а при $x > 144$ — возрастает. Нарисуем эскиз графика:



Тогда $x = 144$ — точка минимума.

Задание №13

а) Решите уравнение $\dfrac{\cos 2x - \sqrt{3}\sin(x-\pi) - 1}{\log_{23}\sin x} = 0.$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$.

Ответ

а) $\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k;\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{\pi}{3};\ \dfrac{2\pi}{3};\ \dfrac{7\pi}{3};\ \dfrac{8\pi}{3}$

Решение

а) Выпишем ОДЗ:

$$\begin{cases} \log_{23}\sin x \neq 0 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x \neq 1 \\ \sin x > 0 \end{cases}$$

Преобразуем числитель, используя формулу приведения $\sin(x-\pi) = -\sin x$ и формулу $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$:

$$\cos 2x - \sqrt{3}\sin(x-\pi) - 1 = 0$$

$$1 - 2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 1 = 0$$

$$-2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x = 0$$

$$\sin x\,(\sqrt{3} - 2\sin x) = 0$$

Таким образом, числитель обращается в нуль при $\sin x = 0$ или $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая ОДЗ, остаётся $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Решая уравнение $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, получаем:

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберём корни, принадлежащие отрезку $[0; 3\pi]$.

Для серии $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi k$:

- $k = -1$: $x = \dfrac{\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{5\pi}{3} < 0$, не подходит;
- $k = 0$: $x = \dfrac{\pi}{3} \in [0; 3\pi]$;
- $k = 1$: $x = \dfrac{\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{7\pi}{3} \in [0; 3\pi]$;
- $k = 2$: $x = \dfrac{\pi}{3} + 4\pi = \dfrac{13\pi}{3} > 3\pi$, не подходит.

Для серии $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k$:

- $k = -1$: $x = \dfrac{2\pi}{3} - 2\pi = -\dfrac{4\pi}{3} < 0$, не подходит;
- $k = 0$: $x = \dfrac{2\pi}{3} \in [0; 3\pi]$;
- $k = 1$: $x = \dfrac{2\pi}{3} + 2\pi = \dfrac{8\pi}{3} \in [0; 3\pi]$;
- $k = 2$: $x = \dfrac{2\pi}{3} + 4\pi = \dfrac{14\pi}{3} > 3\pi$, не подходит.

Таким образом, на отрезке $[0; 3\pi]$ лежат четыре корня: $\dfrac{\pi}{3}$; $\dfrac{2\pi}{3}$; $\dfrac{7\pi}{3}$; $\dfrac{8\pi}{3}$.

Задание №14

В основании четырехугольной пирамиды $SABCD$ лежит равнобедренная трапеция $ABCD$, для которой $AD \parallel BC$, $AB = CD = 2$, $AD = 6$ и $BC = 4$. Ребро SC перпендикулярно плоскости основания и равно $\sqrt{3}$. Через точку C проведено сечение пирамиды плоскостью α, параллельной ребрам AB и SD.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро SA в отношении $1 : 2$, считая от вершины S.

б) Найдите угол между плоскостью сечения и плоскостью основания пирамиды.

Ответ

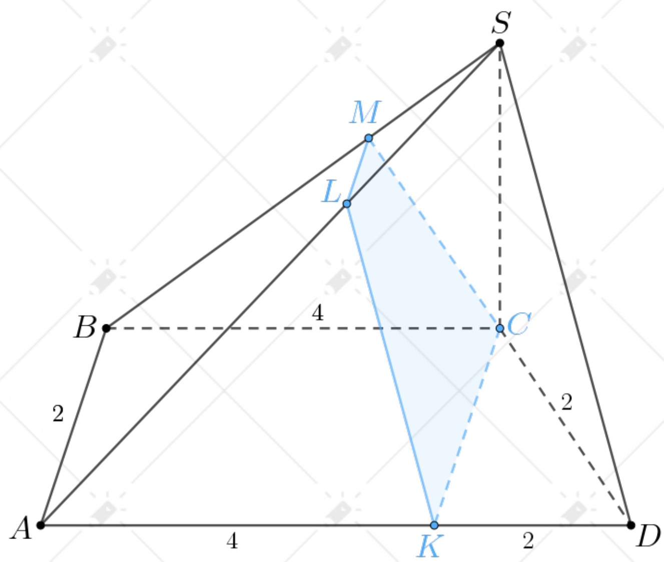
б) 45°

Решение

а) Построим сечение. Пусть K — точка пересечения плоскости α с ребром AD. Тогда $CK \parallel AB$ и $ABCK$ — параллелограмм, а значит,

$$CK = AB = 2,\ BC = AK = 4,$$
$$KD = AD - AK = 6 - 4 = 2.$$

Пусть L — точка пересечения плоскости α с ребром SA. Тогда $LK \parallel SD$.
Пусть M — точка пересечения плоскости α с ребром SB. Тогда для плоскостей (ABC), (SAB) и (CKL) применима теорема о трех попарно пересекающихся плоскостях и $ML \parallel AB \parallel CK$.
Таким образом, сечение — $CKLM$.



Так как $LK \parallel SD$, то по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{SL}{LA} = \frac{DK}{KA}$$
$$\frac{SL}{LA} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Что и требовалось доказать.
б) Опустим перпендикуляр MH из точки M на плоскость основания. Так как $SC \perp (ABC)$, то H попадает на BC.
Опустим из точки H перпендикуляр HP на CK.
Заметим, что

$$\begin{cases} MP \text{ – наклонная} \\ HP \text{ – проекция} \\ HP \perp CK \end{cases}$$

Тогда по теореме о трех перпендикулярах $MP \perp CK$. Таким образом, искомый угол – $\angle MPH$.

Так как $ML \parallel AB$, то по теореме о пропорциональных отрезках

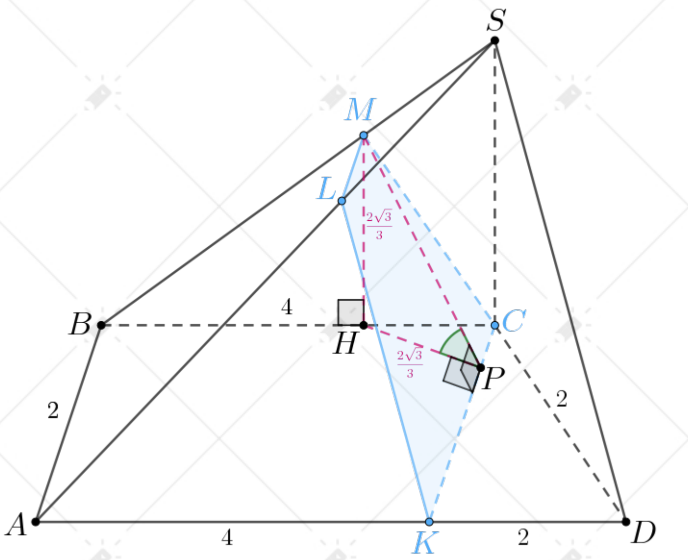
$$\frac{SM}{BM} = \frac{SL}{LA} = \frac{1}{2}$$

Тогда так как $MH \parallel SC$, то имеем:

$$\frac{SM}{SB} = \frac{CH}{CB}$$

$$\frac{CH}{CB} = \frac{1}{3}$$

$$CH = \frac{CB}{3} = \frac{4}{3}$$



Заметим, что $\triangle BMH \sim \triangle BSC$ по двум углам ($\angle BHM = 90^\circ = \angle BCS$ и $\angle B$ – общий). Тогда

$$\frac{MH}{SC} = \frac{BM}{BS}$$

$$\frac{MH}{SC} = \frac{2}{3}$$

$$MH = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Заметим, что $\triangle CKD$ равносторонний, значит, его углы равны 60°. Тогда $\angle AKC = 120^\circ$ как смежный для $\angle CKD$. В силу того, что $ABCK$ – параллелограмм, получаем $\angle BCK = 60^\circ$.
Рассмотрим прямоугольный $\triangle CHP$:

$$HP = CH \cdot \sin \angle BCK$$

$$HP = \frac{4}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Таким образом, получаем $MH = HP$. Следовательно, $\triangle MHP$ равнобедренный прямоугольный треугольник и $\angle MPH = 45^\circ$.

Задание №15

Решите неравенство

$$\log_{\log_5 x-3}\left(2\log_5^2 x-7\log_5 x+3\right)>1.$$

Ответ

$x\in(625;+\infty)$

Решение

Запишем ограничения, определяющие ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases}2\log_5^2 x-7\log_5 x+3>0\\ \log_5 x-3>0\\ \log_5 x-3\neq 1\end{cases}$$

Сделаем замену $t=\log_5 x$:

$$\begin{cases}2t^2-7t+3>0\\ t-3>0\\ t-3\neq 1\end{cases}$$

Решим первое неравенство системы. Найдем нули левой части:

$$2t^2-7t+3=0$$

$$t=\frac{7\pm\sqrt{49-24}}{4}=\frac{7\pm 5}{4}$$

$$t_1=0{,}5\quad t_2=3$$

Тогда решение первого неравенства:

$$t\in(-\infty;0{,}5)\cup(3;+\infty)$$

Решение второго неравенства:

$$t-3>0$$

$$t>3$$

Решение третьего неравенства:

$$t-3\neq 1$$

$$t\neq 4$$

Тогда получаем, что $t\in(3;4)\cup(4;+\infty)$. Сделаем обратную замену:

$$\begin{cases}\log_5 x>3\\ \log_5 x\neq 4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\log_5 x>\log_5 125\\ \log_5 x\neq\log_5 625\end{cases}$$

Таким образом, ОДЗ: $x\in(125;625)\cup(625;+\infty)$.

Перейдём к решению неравенства. Представим единицу как $\log_{\log_5 x-3}(\log_5 x-3)$:

$$\log_{\log_5 x-3}\left(2\log_5^2 x-7\log_5 x+3\right)>\log_{\log_5 x-3}(\log_5 x-3)$$
$$\log_{\log_5 x-3}\left(2\log_5^2 x-7\log_5 x+3\right)-\log_{\log_5 x-3}(\log_5 x-3)>0$$

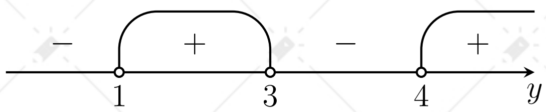
Применим метод рационализации:

$$(\log_5 x-3-1)\left(\left(2\log_5^2 x-7\log_5 x+3\right)-(\log_5 x-3)\right)>0$$
$$(\log_5 x-4)\left(2\log_5^2 x-8\log_5 x+6\right)>0$$
$$(\log_5 x-4)\cdot 2\cdot\left(\log_5^2 x-4\log_5 x+3\right)>0$$
$$2(\log_5 x-4)\left(\log_5^2 x-\log_5 x-3\log_5 x+3\right)>0$$
$$2(\log_5 x-4)\big(\log_5 x(\log_5 x-1)-3(\log_5 x-1)\big)>0$$
$$2(\log_5 x-4)(\log_5 x-1)(\log_5 x-3)>0$$

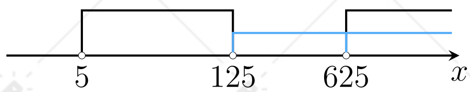
Сделаем замену $y=\log_5 x$:

$$2(y-4)(y-1)(y-3)>0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Отсюда получаем $y\in(1;3)\cup(4;+\infty)$, что соответствует $x\in(5;125)\cup(625;+\infty)$.



Пересекаем промежутки ОДЗ и решений рационального неравенства и получаем $x\in(625;+\infty)$.

Задание №16

В июле 2020 года Инна взяла кредит в банке на 4 года на S млн рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь сумма долга увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;

– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;

– в июле 2024 года долг должен быть выплачен полностью.

Сразу же Инна положила взятую в кредит сумму на вклад в другой банк на 4 года на следующих условиях:

– каждый январь сумма вклада увеличивается на 10% по сравнению с концом предыдущего года;

– снятие средств со вклада запрещено до окончания времени действия вклада.

Чему равно S, если после погашения кредита и снятия в июле 2024 года всех средств со вклада Инна заработает 428200 рублей? Под заработком понимаем разность итоговой суммы на вкладе и всех выплат по кредиту.

Ответ

2

Решение

Найдем сумму выплат по кредиту. Тогда так как долг каждый год уменьшается на одну и ту же величину и через 4 выплаты равен нулю, то каждый год он уменьшается на $0{,}25S$. Составим таблицу, позволяющую отслеживать сумму долга в течение всего периода кредитования, ведя вычисления в млн рублей.

Год	Долг до %	Долг после %	Выплата	Долг после выплаты
2021	S	$S + 0{,}1 \cdot S$	$0{,}1 \cdot S + 0{,}25S$	$0{,}75S$
2022	$0{,}75S$	$0{,}75S + 0{,}1 \cdot 0{,}75S$	$0{,}1 \cdot 0{,}75S + 0{,}25S$	$0{,}5S$
2023	$0{,}5S$	$0{,}5S + 0{,}1 \cdot 0{,}5S$	$0{,}1 \cdot 0{,}5S + 0{,}25S$	$0{,}25S$
2024	$0{,}25S$	$0{,}25S + 0{,}1 \cdot 0{,}25S$	$0{,}1 \cdot 0{,}25S + 0{,}25S$	0

Тогда общая сумма выплат по кредиту равна

$$(0{,}1 \cdot S + 0{,}25S) + (0{,}1 \cdot 0{,}75S + 0{,}25S) + (0{,}1 \cdot 0{,}5S + 0{,}25S) + (0{,}1 \cdot 0{,}25S + 0{,}25S) =$$
$$= 0{,}1S(1 + 0{,}75 + 0{,}5 + 0{,}25) + S = S(0{,}1 \cdot 2{,}5 + 1) = 1{,}25S$$

Найдем сумму, которую можно будет снять со вклада в июле 2024 года. Каждый год сумма на вкладе увеличивается в 1,1 раза, значит, за 4 года на вкладе окажется $1{,}1^4 \cdot S$ млн рублей. Тогда Инна заработает ровно

$$1{,}1^4 \cdot S - 1{,}25S = S\left(\left(\frac{11}{10}\right)^4 - \frac{125}{100}\right) = S \cdot \frac{14641 - 12500}{10000} = S \cdot \frac{2141}{10000}$$

По условию Инна заработает 428200 рублей, то есть 0,4282 млн рублей, тогда

$$S \cdot \frac{2141}{10000} = \frac{4282}{10000}$$
$$S = 2$$

Задание №17

Остроугольный треугольник ABC вписан в окружность с центром в точке O. Прямая AO пересекает отрезок BC в точке D. Точка E выбрана на отрезке BC так, что $CD = DE$. Основание T перпендикуляра, опущенного из точки E на CO, лежит в треугольнике ABD.

а) Докажите, что вокруг четырехугольника $BTOD$ можно описать окружность.

б) Найдите радиус окружности, описанной вокруг $BTOD$, если $AB = 5$, $AC = 8$, $\angle BAC = 60^\circ$, $BE = 1$.

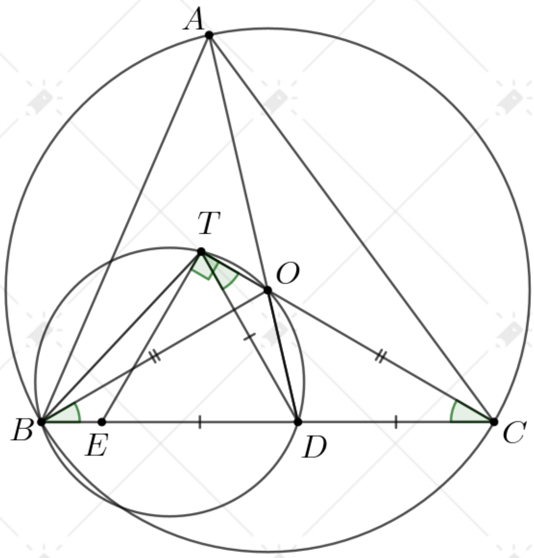
Ответ

б) $\dfrac{\sqrt{39}}{3}$

Решение

а) Рассмотрим прямоугольный треугольник CET, для которого $CD = DE$. Тогда TD – медиана из вершины прямого угла и $CD = DE = TD$. Следовательно, треугольник CDT – равнобедренный и $\angle DTC = \angle TCD$.

Рассмотрим треугольник BOC, у которого $BO = OC$ как радиусы описанной около треугольника ABC окружности. Значит, треугольник BOC – равнобедренный и $\angle OCB = \angle CBO$.



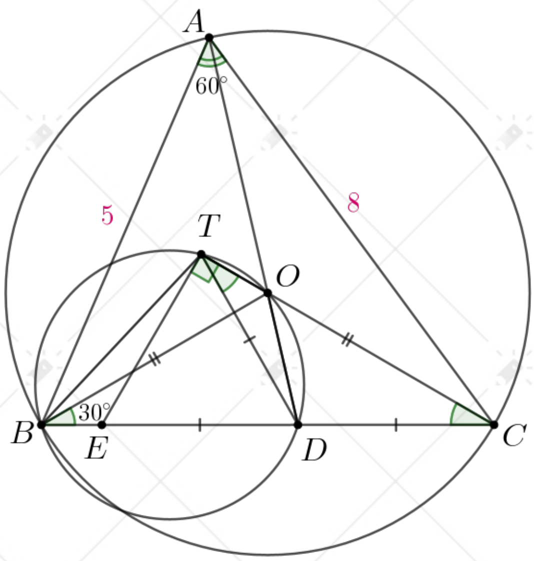
Получаем, что $\angle DBO = DTO$ и эти углы опираются на сторону OD четырехугольника $BTOD$. Следовательно, вокруг этого четырехугольника можно описать окружность. Что и требовалось доказать.

б) Найдем BC по теореме косинусов для треугольника ABC :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos 60^\circ$$
$$BC^2 = 5^2 + 8^2 - 5 \cdot 8 = 49$$
$$BC = 7.$$

Тогда по теореме синусов для треугольника ABC имеем:

$$\frac{BC}{\sin 60^\circ} = 2R$$
$$\frac{7}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 2R$$
$$R = \frac{7\sqrt{3}}{3}$$



Рассмотрим равнобедренный треугольник BOC, для которого имеем:

$$BO = OC = R = \frac{7\sqrt{3}}{3}.$$

Так как $\angle BOC$ – центральный угол, то $\angle BOC = 2\angle BAC = 120^\circ$, значит, $\angle OCB = \angle CBO = 30^\circ$. Так как $ED = DC$, то

$$BE + ED + DC = BC$$
$$1 + ED + DC = 7$$
$$ED = DC = 3$$

Значит, $BD = BE + ED = 1 + 3 = 4$.
Найдем OD по теореме косинусов для треугольника BOD :

$$OD^2 = BO^2 + BD^2 - 2\cdot BO\cdot BD\cdot \cos 30^\circ$$
$$OD^2 = \frac{49}{3} + 16 - 2\cdot\frac{7\sqrt{3}}{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{13}{3}$$
$$OD = \sqrt{\frac{13}{3}}$$

Тогда по теореме синусов для треугольника BOD имеем:

$$\frac{OD}{\sin 30^\circ} = 2r$$
$$\frac{\sqrt{\frac{13}{3}}}{\frac{1}{2}} = 2r$$
$$r = \frac{\sqrt{39}}{3}$$

Задание №18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} |4|y| + 0{,}5x^2 - 85| = 13 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}$$

имеет 4 различных решения.

Ответ

$a \in \left(-\dfrac{49}{2}; -18\right) \cup \left(-6\sqrt{5}; -12\right) \cup \left\{-8\sqrt{2}; 8\sqrt{2}\right\} \cup \left(12; 6\sqrt{5}\right) \cup \left(18; \dfrac{49}{2}\right)$

Решение

Заметим, что первое уравнение задает фиксированное множество точек, а второе уравнение задает окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом a.

Преобразуем первое уравнение системы, раскрыв модуль:

$$\begin{aligned} &4|y| + 0{,}5x^2 - 85 = 13 \qquad && 4|y| + 0{,}5x^2 - 85 = -13 \\ &4|y| + 0{,}5x^2 = 98 && 4|y| + 0{,}5x^2 = 72 \end{aligned}$$

Пусть $y \geqslant 0$, тогда $|y| = y$. Получаем

$$\begin{aligned} &4y + 0{,}5x^2 = 98 \qquad && 4y + 0{,}5x^2 = 72 \\ &y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{98}{4} && y = -\frac{1}{8}x^2 + 18 \end{aligned}$$

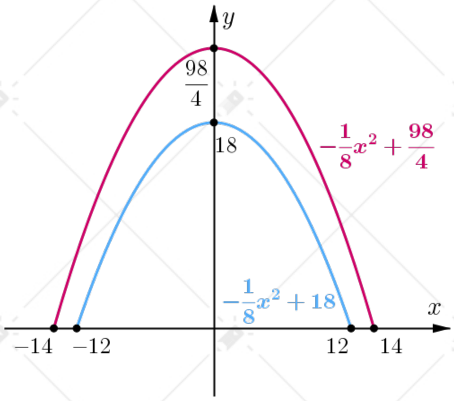
Значит, при $y \geqslant 0$ получаем две параболы. Найдем вершины парабол

$$\begin{aligned} &x_{\text{в}1} = 0 \qquad && x_{\text{в}2} = 0 \\ &y_{\text{в}1} = \frac{98}{4} && y_{\text{в}2} = 18 \end{aligned}$$

Найдем координаты точек, в которых параболы касаются оси абсцисс, подставив в уравнение парабол $y = 0$

$$\begin{aligned} &0 = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{98}{4} \qquad && 0 = -\frac{1}{8}x^2 + 18 \\ &x^2 = 196 && x^2 = 144 \\ &x = \pm 14 && x = \pm 12 \end{aligned}$$

Получаем



Пусть $y < 0$, тогда $|y| = -y$. Получаем

$$\begin{aligned} &-4y + 0{,}5x^2 = 98 \qquad && -4y + 0{,}5x^2 = 72 \\ &y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{98}{4} && y = \frac{1}{8}x^2 - 18 \end{aligned}$$

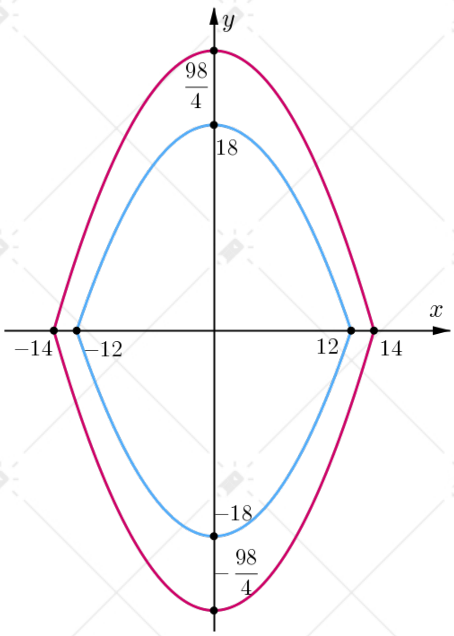
Значит, при $y < 0$ получаем две параболы. Найдем вершины парабол

$$\begin{aligned} &x_{\text{в}1} = 0 \qquad && x_{\text{в}2} = 0 \\ &y_{\text{в}1} = -\frac{98}{4} && y_{\text{в}2} = -18 \end{aligned}$$

Найдем координаты точек, в которых параболы касаются оси абсцисс, подставив в уравнение парабол $y = 0$

$$\begin{aligned} &-0 = \frac{1}{8}x^2 - \frac{98}{4} \qquad && -0 = \frac{1}{8}x^2 - 18 \\ &x^2 = 196 && x^2 = 144 \\ &x = \pm 14 && x = \pm 12 \end{aligned}$$

Получаем



Рассмотрим второе уравнение, задающее окружность. Заметим, что $a^2 = (-a)^2$, следовательно, если нам подходит значение параметра a_0, то нам автоматически подходит значение параметра $-a_0$, поэтому рассмотрим $a \geqslant 0$.

Будем увеличивать параметр a и искать количество точек пересечения окружности с графиком первого уравнения системы.

- **Случай I :** Окружность касается синего графика. В силу симметрии касание окружности с параболами $y = -\frac{1}{8}x^2 + 18$ и $y = \frac{1}{8}x^2 - 18$ происходит при одном и том же значении параметра. В этом положении получим 4 точки пересечения.

- **Случай II :** Окружность проходит через точки $(-12; 0)$, $(12; 0)$. В этом случае получим 6 точек пересечения с синим графиком. Данное положение достигается когда радиус окружность равен 12, то есть при $a = 12$.

  Между положениями I и II окружность будет иметь более 4 точек пересечения с синим графиком.

- **Случай III :** Окружность окружность касается розового графика. В силу симметрии касание окружности с параболами $y = -\frac{1}{8}x^2 + \frac{98}{4}$ и $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{98}{4}$ происходит при одном и том же значении параметра. Очевидно, что данный случай происходит при $a^2 < 18$, значит, в этом положении окружность также пересекает синий график. В этом случае получим 8 точек пересечения.

  Между положениями II и III окружность будет иметь 4 точек пересечения с синим графиком.

- **Случай IV :** Окружность проходит через точки $(0; -18)$ и $(0; 18)$. В этом случае получим 2 точки пересечения с синим графиком и 4 точки пересечения с розовым. Данное положение достигается когда радиус окружность равен 18, то есть при $a = 18$.

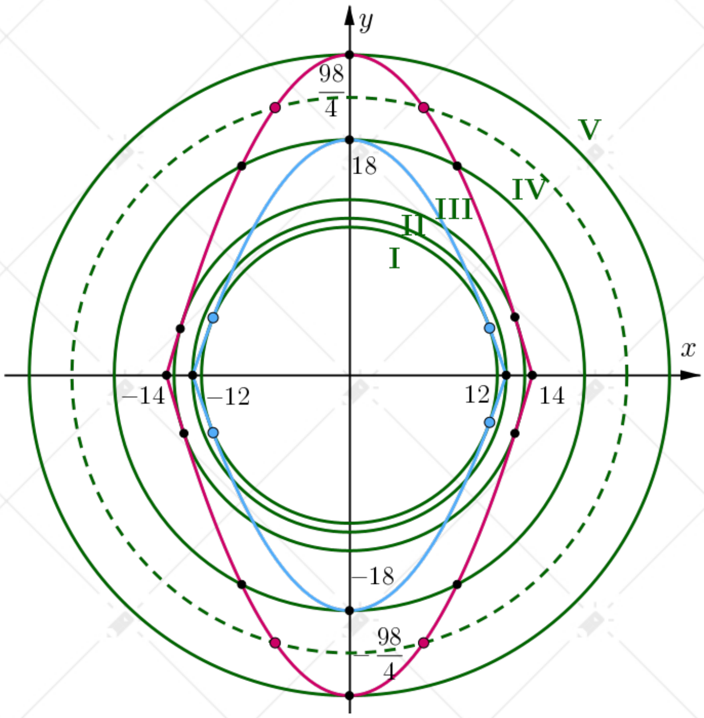
  Между положениями III и IV окружность будет иметь более 4 точек пересечения.

- **Случай V :** Окружность проходит через точки $\left(0; -\frac{98}{4}\right)$ и $\left(0; \frac{98}{4}\right)$. В этом случае получим 2 точки пересечения с розовым графиком. Данное положение достигается когда радиус окружность равен $\frac{98}{4}$, то есть при $a = \frac{98}{4} = \frac{49}{2}$.

  Между положениями IV и V окружность будет иметь 4 точки пересечения с розовым графиком и 0 с синим.

Значит,

$$a \in (-\mathrm{V}; -\mathrm{IV}) \cup (-\mathrm{III}; -\mathrm{II}) \cup \{-\mathrm{I}; \mathrm{I}\} \cup (\mathrm{III}; \mathrm{II}) \cup (\mathrm{IV}; \mathrm{V})$$



Найдем значение параметра a, при котором достигается случай I. Для этого подставим $y = \frac{1}{8}x^2 - 18$ в уравнение окружности.

$$x^2 + \left(\frac{1}{8}x^2 - 18\right)^2 = a^2$$

$$\frac{1}{64}x^4 - \frac{9}{2}x^2 + 324 + x^2 - a^2 = 0 \quad \Big| \cdot 64$$

$$x^4 - 224x^2 + 324 \cdot 64 - 64a^2 = 0$$

Сделаем замену $x^2 = t$ и получим:

$$t^2 - 224t + 324 \cdot 64 - 64 \cdot a^2$$

$$D = 224^2 - 4 \cdot 324 \cdot 64 + 4 \cdot 64 \cdot a^2 = 0$$

$$a^2 = \frac{4 \cdot 324 \cdot 64 - 224^2}{4 \cdot 64} = 324 - 56 \cdot 3{,}5 = 128$$

$$a = \pm 8\sqrt{2}$$

Найдем значение параметра a, при котором достигается случай III. Для этого подставим $y = \frac{1}{8}x^2 - \frac{98}{4}$ в уравнение окружности.

$$x^2 + \left(\frac{1}{8}x^2 - \frac{98}{4}\right)^2 = a^2$$

$$\frac{1}{64}x^4 - \frac{49}{8}x^2 + \frac{2401}{4} + x^2 - a^2 = 0 \quad \Big| \cdot 64$$

$$x^4 - 328^2 + 2401 \cdot 16 - 64a^2 = 0$$

Сделаем замену $x^2 = t$ и получим:

$$t^2 - 328 + 2401 \cdot 16 - 64 \cdot a^2$$
$$D = 328^2 - 4 \cdot 2401 \cdot 16 + 4 \cdot 64 \cdot a^2 = 0$$
$$a^2 = \frac{4 \cdot 2401 \cdot 16 - 328^2}{4 \cdot 64} = \frac{2401 - 82 \cdot 20{,}5}{4} = 180$$
$$a = \pm 6\sqrt{5}$$

Получаем ответ:

$$a \in \left(-\frac{49}{2}; -18\right) \cup \left(-6\sqrt{5}; -12\right) \cup \left\{-8\sqrt{2}; 8\sqrt{2}\right\} \cup \left(12; 6\sqrt{5}\right) \cup \left(18; \frac{49}{2}\right).$$

Задание №19

Из натурального числа, написанного на доске, за один ход получают другое натуральное число следующим образом: для каждой пары соседних цифр исходного числа вычисляют их произведение и вписывают результат между этими цифрами. Например, если на доске было написано число 1234, то из него получится число 12263124.

а) Можно ли с помощью такой операции получить число 2105255357?

б) Можно ли с помощью такой операции получить число 32486297426?

в) Какое наибольшее 10-значное число можно получить после такой операции?

Ответ

а) Да

б) Нет

в) 9919981991

Решение

а) Да, могло получиться число 2105255357, если на доске было написано число 2557:

$$2557 \longrightarrow 2105255357$$

б) Заметим, что произведение двух цифр — не более чем двузначное число. Тогда между любыми двумя цифрами исходного числа вписали одну или две цифры.

Таким образом, из четырёхзначного числа молго получиться не более, чем десятизначное. 32486297426 — одиннадцатизначное, поэтому на доске изначально было написано хотя бы пятизначное число.

Рассмотрим крайнюю правую цифру числа, которое получилось. Перед ней вписали или «2», или «42». Если вписали двойку, то она являлась произведением 6 и 4, но это не так. Значит, он вписал «42». Таким образом, изначальное число оканчивалось на «76».

Рассмотрим крайнюю левую цифру числа, которое получилось. После неё вписали или «2», или «24». Если вписали двойку, то она являлась произведением 3 и 4, но это не так. Значит, он вписал «24». Таким образом, изначальное число начиналось с «38».

Так как «8» и «7» точно были в исходном числе, то цифра «6», идущая после «8», и цифра «9», стоящая перед «7», точно были вписаны.

Изначально мы выяснили, что в исходном числе было хотя бы 5 цифр. Также мы выяснили, что исходное число начиналось на «38» и оканчивалось на «76». Таким образом, хотя бы одна цифра из блока «629» была в исходном числе, следовательно, это могла быть только «2».

Тогда 38276 — единственное возможное изначальное число, но из него получили бы 3248162147426. Значит, число 32486297426 не могли получить.

в) Поймем, из числа с каким количеством знаков могло получиться десятизначное число. Если в исходном числе 6 цифр, то впишут в него еще хотя бы 5 цифр. Значит, исходное число не более чем пятизначное.

Будем максимизировать цифры итогового числа, начиная с самой левой.

Пусть самая левая цифра — это «9».

Крайняя левая цифра итогового цисла — это также и крайняя левая цифра исходного числа. Тогда следующая цифра или следующие две цифры итогового числа — произведение 9 и какой-то другой цифры.

Нам нужно сделать так, чтобы вторая слева цифра была наибольшей, то есть девяткой. Это возможно только если исходное число начиналось на «91». Тогда итоговое число начинается на «991».

Следующие две цифры могут быть девятками, если исходное число начиналось с «919». Таким образом, итоговое число начинается с «99199».

Если шестая цифра будет девяткой, то седьмая должна быть единицей. Тогда исходное число начиналось бы на «9191». Мы знаем, что исходное число не более чем пятизначное. Из числа 9191 получится не десятизначное число, поэтому пусть a — последняя цифра исходного числа. Тогда

$$\overline{9191a} \longrightarrow \overline{9919991aa}$$

Получили девятизначное число. Значит, шестая цифра — не девятка. Тогда попробуем сделать её восьмеркой. Это можно сделать, только если рядом будут стоять две девятки. Тогда итоговое число начинается на «99199819», а исходное — на «9199».

Следующая цифра итогового числа может быть 9, если исходное число — это «91991». Тогда наибольшее итоговое десятизначное число равно «9919981991».