Авторский вариант «Школково» №8
по МАТЕМАТИКЕ

Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов №1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов №2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 был записан под правильным номером.

Желаем успеха!

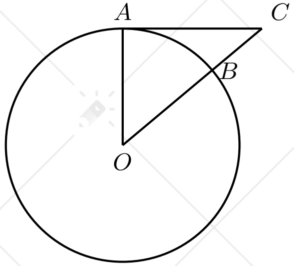
Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta$$

Часть 1

Ответом к заданиям 1–12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №1 справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Найдите величину угла ACO, если его сторона CA касается окружности с центром O, отрезок CO пересекает окружность в точке B, а дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 40°. Ответ дайте в градусах.

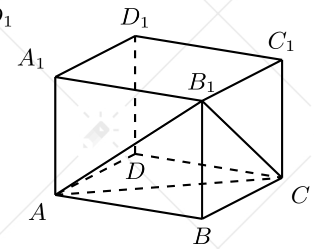


Ответ: ____________________.

2 Даны векторы $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(2;3)$ и $\vec{c}(1;1)$. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$.

Ответ: ____________________.

3 В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB = 8$, $BC = 6$, $AA_1 = 4$. Найдите отношение объёма параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к объёму многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.



Ответ: ____________________.

4 При заказе такси в городе свободно курсируют 300 машин четырёх тарифов: «эконом», «стандарт», «комфорт», «бизнес». При этом в тарифе «эконом» 40 машин, в тарифе «стандарт» – 80 машин, а в тарифах «комфорт» и «бизнес» машин поровну. Найдите вероятность того, что случайно вызванное такси окажется из тарифа «бизнес».

Ответ: ____________________.

5 Стрелок делает 5 выстрелов по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Известно, что первый выстрел оказался промахом. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в мишень хотя бы три раза. Ответ округлите до тысячных.

Ответ: ____________________.

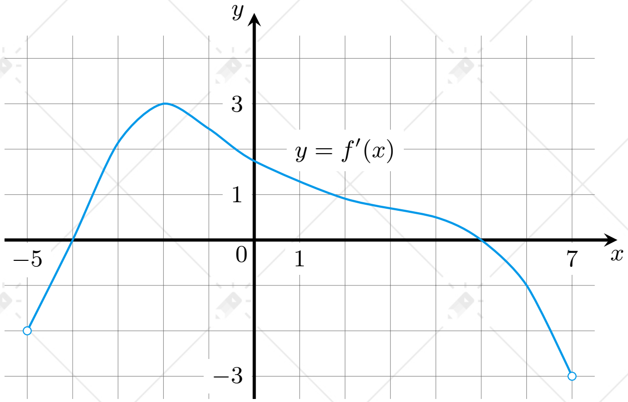
6 Найдите корни уравнения $\log_{x+2} 25 = 2$.
Если уравнение имеет более одного корня, в ответ запишите меньший из корней.

Ответ: ____________________.

7 Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ: ____________________.

8 На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________.

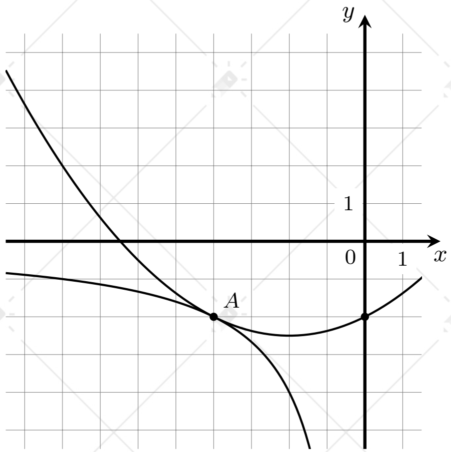
9 Тормозной путь автомобиля при аварийном торможении вычисляется по формуле $S = \dfrac{v^2}{2\mu g}$ м, где v – начальная скорость в м/с, μ – коэффициент трения, $g = 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. Коэффициент трения зависит от температуры t (в °C) по закону $\mu = 0{,}6 - 0{,}005t$. При какой температуре тормозной путь со скорости 72 км/ч составит 40 м? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ: ____________________.

10 В одной упаковке находятся сливки с жирностью 20%, в другой – сливки с жирностью 33%. Масса сливок в первой упаковке на 150 г больше, чем во второй. Сливки из обеих упаковок смешали и получили смесь жирностью 25%. Найдите массу полученной смеси. Ответ дайте в граммах.

Ответ: ____________________.

11 На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{8}{x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + bx + c$, касающиеся в точке A и пересекающиеся в точке B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ: ____________________.

12 Найдите наименьшее значение функции $y = 8\cos x - 17x + 6$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ: ____________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов №1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ №2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение $2\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^2 x = 2\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

14 Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка $AE = \dfrac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $\dfrac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении $3:2$.
б) Найдите расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

15 Решите неравенство

$$2\cdot 49^{x^2-4x+4} + 7\cdot 4^{x^2-4x+4} \geqslant 9\cdot 14^{x^2-4x+4}.$$

16 В июле 2026 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
– в январе 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2030, 2031 и 2032 годов долг уменьшается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года (в рамках программы государственной поддержки);
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2032 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно r, если общая сумма выплат составила 828 тыс. рублей?

17 Дан треугольник ABC, на стороне BC которого взята точка E так, что $BE = AB$, а на стороне AC взята точка D так, что $AD = DE$. На стороне AC также взята точка F так, что $EF \parallel BD$.

а) Докажите, что $CF \cdot AB = AD \cdot CE$.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle AED = \angle CEF = 30^\circ$ и $CL = 6$, где L – точка пересечения прямых AB и ED.

18 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(2x^2 - 2x + 2y^2 - 18y + 61)^2 = (14x + 2y - 13)^2\\ y = |x - a|\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

19 В ювелирной мастерской есть весы с двумя чашами. На одну чашу весов кладут только золото, на другую – гири. На чашу для гирь можно положить несколько гирь.
а) Можно ли некоторым набором из шести гирь отвесить любое целое число граммов от 1 до 60?
б) Можно ли некоторым набором из семи гирь отвесить любое целое число граммов от 17 до 145?
в) Пусть каждая гиря в наборе весит нецелое число грамм. Найдите наименьшее число гирь в таком наборе, если ими можно взвесить любой целый вес от 1 до 20 грамм включительно?

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

Решения авторского варианта «Школково» №8

Задание №1

Ответ: 50

Задание №2

Ответ: 10

Задание №3

Ответ: 6

Задание №4

Ответ: 0,3

Задание №5

Ответ: 0,475

Задание №6

Ответ: 3

Задание №7

Ответ: 0,5

Задание №8

Ответ: 5

Задание №9

Ответ: 20

Задание №10

Ответ: 650

Задание №11

Ответ: 4

Задание №12

Ответ: 14

Задание №13

Ответ: а) $\frac{\pi}{2}+\pi k;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$

б) $-\frac{8\pi}{3};\ -\frac{5\pi}{2}$

Задание №14

Ответ: б) $\frac{11}{\sqrt{170}}$

Задание №15

Ответ: $x\in(-\infty;1]\cup\{2\}\cup[3;+\infty)$

Задание №16

Ответ: 12

Задание №17

Ответ: б) $\frac{9\sqrt{3}}{2}$

Задание №18

Ответ: $a\in\left\{-\sqrt{2}+1;2\sqrt{2}-1\right\}$

Задание №19

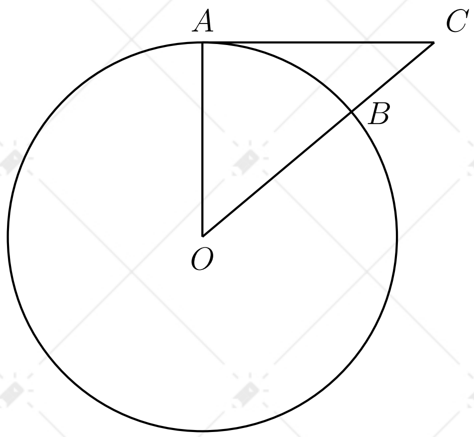
Ответ: а) да

б) нет

в) 6

Задание №1

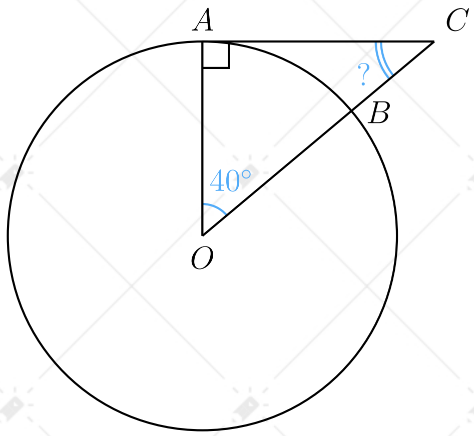
Найдите величину угла ACO, если его сторона CA касается окружности с центром O, отрезок CO пересекает окружность в точке B, а дуга AB окружности, заключённая внутри этого угла, равна 40°. Ответ дайте в градусах.



Ответ

50

Решение



Так как O — центр окружности, а точка A лежит на окружности, то OA — радиус.

Радиус, проведённый в точку касания, перпендикулярен касательной. Значит, радиус AO перпендикулярен касательной AC, то есть угол OAC равен 90°.

Центральный угол равен градусной мере дуги, на которую опирается. Угол AOB — центральный и опирается на дугу AB, поэтому $\angle AOB = 40^\circ$.

Сумма углов в треугольнике равна 180°. Запишем равенство для треугольника OAC :

$$\angle OAC + \angle AOC + \angle ACO = 180^\circ.$$

Задание №2

Даны векторы $\vec{a}(1;2)$, $\vec{b}(2;3)$ и $\vec{c}(1;1)$. Найдите квадрат длины вектора $\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$.

Ответ

10

Решение

Найдем координаты вектора $\vec{r}=\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c}$:

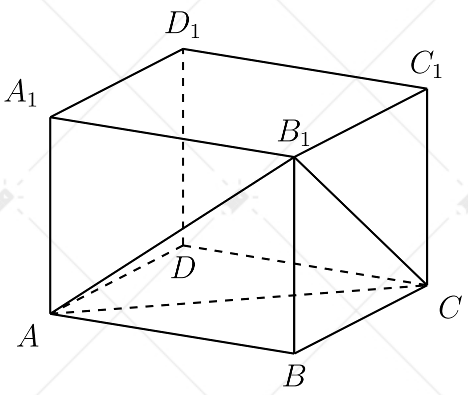
$$\vec{r}(1+2-2\cdot 1; 2+3-2\cdot 1)=\vec{r}(1;3).$$

Тогда квадрат длины вектора $\vec{r}$ равен

$$|\vec{r}|^2=1^2+3^2=1+9=10.$$

Задание №3

В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известно, что $AB=8$, $BC=6$, $AA_1=4$. Найдите отношение объёма параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ к объёму многогранника, вершинами которого являются точки A, B, C, B_1.



Ответ

6

Решение

Объём параллелепипеда:

$$V_{\text{пар}}=AB\cdot BC\cdot BB_1.$$

Многогранник $ABCB_1$ – пирамида с основанием ABC и вершиной B_1. Площадь треугольника ABC равна половине площади прямоугольника $ABCD$:

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC.$$

Высота пирамиды равна BB_1. Тогда

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} \cdot S_{ABC} \cdot BB_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC \cdot BB_1 = \frac{1}{6} V_{\text{пар}}.$$

Искомое отношение:

$$\frac{V_{\text{пар}}}{V_{\text{пир}}} = \frac{V_{\text{пар}}}{\frac{1}{6} V_{\text{пар}}} = 6.$$

Задание №4

При заказе такси в городе свободно курсируют 300 машин четырёх тарифов: «эконом», «стандарт», «комфорт», «бизнес». При этом в тарифе «эконом» 40 машин, в тарифе «стандарт» – 80 машин, а в тарифах «комфорт» и «бизнес» машин поровну. Найдите вероятность того, что случайно вызванное такси окажется из тарифа «бизнес».

Ответ

0,3

Решение

Вероятность равна отношению числа благоприятных исходов к числу всех исходов.

Благоприятные исходы – те, в которых вызванное такси окажется «бизнесом». Поскольку «комфортов» и «бизнесов» поровну, их общее количество равно:

$$300 - 40 - 80 = 180.$$

Значит, «бизнесов» ровно

$$\frac{180}{2} = 90.$$

Число всех исходов равно общему количеству машин такси, то есть 300.

Тогда вероятность того, что случайно вызванное такси окажется «бизнесом», равна:

$$p = \frac{90}{300} = \frac{3}{10} = 0{,}3.$$

Задание №5

Стрелок делает 5 выстрелов по мишени. Вероятность попадания в мишень при каждом отдельном выстреле равна 0,6. Известно, что первый выстрел оказался промахом. Найдите вероятность того, что стрелок попадёт в мишень хотя бы три раза. Ответ округлите до тысячных.

Ответ

0,475

Решение

Поскольку первый выстрел – промах, то остаётся 4 выстрела. В этих четырёх выстрелах нужно, чтобы произошло хотя бы 3 попадания, то есть 3 или 4 попадания. События несовместны,

поэтому искомая вероятность равна сумме вероятностей этих двух событий.
Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6, вероятность промаха равна $1-0{,}6=0{,}4$.
Вероятность того, что в четырёх выстрелах будет ровно 3 попадания:

$$(0{,}6)^3\cdot 0{,}4=0{,}216\cdot 0{,}4=0{,}0864.$$

Всего таких вариантов 4 (промах при 2 выстреле, промах при 3 выстреле, промах при 4 выстреле, промах при 5 выстреле). Тогда вероятность ровно трёх попаданий равна

$$p_3=4\cdot 0{,}0864=0{,}3456.$$

Вероятность того, что в четырёх выстрелах будет ровно 4 попадания:

$$p_4=(0{,}6)^4=0{,}1296.$$

Суммируем вероятности:

$$p=p_3+p_4=0{,}3456+0{,}1296=0{,}4752.$$

Округлив до тысячных, получим 0,475.

Задание №6

Найдите корни уравнения $\log_{x+2}25=2$. В ответ запишите наименьший корень.

Ответ

3

Решение

Так как основание логарифма должно быть положительным и не равным 1, то

$$\begin{cases}x+2>0\\ x+2\neq 1\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x>-2\\ x\neq -1\end{cases}$$

По определению логарифма на ОДЗ уравнение равносильно:

$$(x+2)^2=25.$$

Отсюда:

$$x+2=5\quad\text{или}\quad x+2=-5.$$

Таким образом,

$$x=3\quad\text{или}\quad x=-7.$$

Проверим корни на соответствие ОДЗ: $x=3$ удовлетворяет, а $x=-7$ не удовлетворяет.
Значит, уравнение имеет единственный корень $x=3$. Он и будет наименьшим.

Задание №7

Найдите $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = -\dfrac{\sqrt{5}}{5}$ и $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$.

Ответ

0,5

Решение

Так как $\alpha \in \left(\pi; \dfrac{3\pi}{2}\right)$, то угол α лежит в третьей четверти, где $\cos\alpha < 0$ и $\operatorname{tg}\alpha > 0$. Найдём $\cos\alpha$ с помощью основного тригонометрического тождества.

$$\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha = 1 - \left(-\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 =$$
$$= 1 - \frac{5}{25} = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Поскольку $\cos\alpha < 0$, то

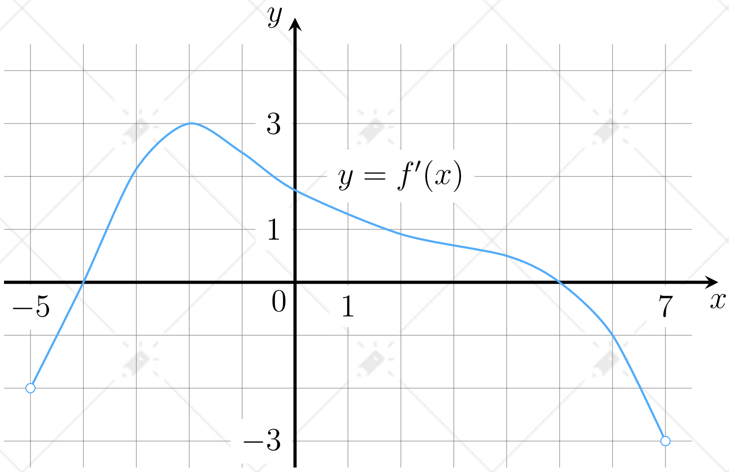
$$\cos\alpha = -\sqrt{\frac{4}{5}} = -\frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}.$$

Теперь находим $\operatorname{tg}\alpha$:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-\dfrac{\sqrt{5}}{5}}{-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{1}{2} = 0{,}5.$$

Задание №8

На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-5; 7)$. Найдите точку максимума функции $f(x)$.



Ответ

5

Решение

В точке максимума функции её производная обнуляется и меняет знак с «+» на «–» при движении слева направо, так как до точки максимума функция возрастала, а после — начала убывать.

Производная обнуляется два раза — в точках

$$x_1 = -4,\ x_2 = 5$$

В точке $x_1 = -4$ производная поменяла знак с «–» на «+».

В точке $x_2 = 5$ производная поменяла знак с «+» на «–».

Значит, $x_2 = 5$ — точка максимума функции $f(x)$.

Таким образом, функция $f(x)$ имеет точку максимума $x = 5$.

Задание №9

Тормозной путь автомобиля при аварийном торможении вычисляется по формуле $S = \dfrac{v^2}{2\mu g}$, где v – начальная скорость в м/с, μ – коэффициент трения, $g = 10$ м/с^2 – ускорение свободного падения. Коэффициент трения зависит от температуры t (в °C) по закону $\mu = 0{,}6 - 0{,}005t$. При какой температуре тормозной путь со скорости 72 км/ч составит 40 м? Ответ дайте в градусах Цельсия.

Ответ

20

Решение

Переведём скорость из км/ч в м/с:

$$72\ \text{км/ч} = \frac{72 \cdot 1000}{3600} = 20\ \text{м/с}.$$

Подставим данные в формулу тормозного пути:

$$40 = \frac{20^2}{2 \cdot \mu \cdot 10} = \frac{400}{20\mu} = \frac{20}{\mu}.$$

Отсюда находим коэффициент трения:

$$\mu = \frac{20}{40} = 0{,}5.$$

Теперь подставим найденное значение в закон зависимости коэффициента трения от температуры:

$$0{,}5 = 0{,}6 - 0{,}005t$$

$$0{,}005t = 0{,}6 - 0{,}5$$

$$0{,}005t = 0{,}1$$

$$t = \frac{0{,}1}{0{,}005} = 20$$

Значит, температура равна 20°C.

Задание №10

В одной упаковке находятся сливки с жирностью 20%, в другой – сливки с жирностью 33%. Масса сливок в первой упаковке на 150 г больше, чем во второй. Сливки из обеих упаковок смешали и получили смесь жирностью 25%. Найдите массу полученной смеси. Ответ дайте в граммах.

Ответ

650

Решение

Пусть x г – масса сливок в первой упаковке (20% жирности), тогда масса сливок во второй упаковке (33% жирности) равна $x - 150$ г. Составим таблицу, при этом массу жира в каждом виде найдем по формуле

$$\text{масса жира} = \text{масса сливок} \cdot \frac{\text{жирность}}{100\%}.$$

Тогда получаем

	Масса сливок, г	Жирность, %	Масса жира, г
Сливки (20%)	x	20	$x \cdot \frac{20}{100}$
Сливки (33%)	$x - 150$	33	$(x-150) \cdot \frac{33}{100}$
Смесь	$2x - 150$	25	$(2x-150) \cdot \frac{25}{100}$

Так как сумма масс жира в сливках (20%) и (33%) равна массе жира в смеси, получаем уравнение:

$$x \cdot \frac{20}{100} + (x-150) \cdot \frac{33}{100} = (2x-150) \cdot \frac{25}{100}$$

$$20x + 33(x-150) = 25(2x-150)$$

$$20x + 33x - 4950 = 50x - 3750$$

$$53x - 4950 = 50x - 3750$$

$$3x = 1200 \quad | : 3$$

$$x = 400$$

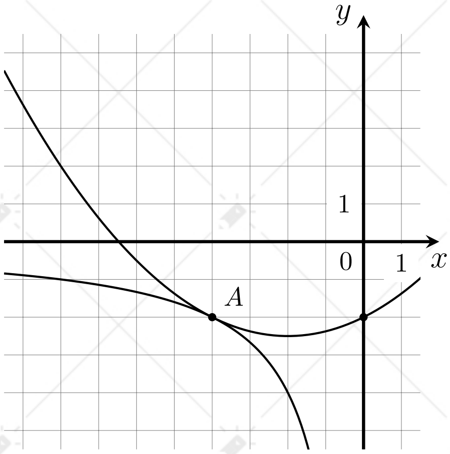
Найдём массу смеси:

$$2x - 150 = 2 \cdot 400 - 150 = 800 - 150 = 650.$$

Тогда масса смеси равна 650 г.

Задание №11

На рисунке изображены графики функций $f(x) = \dfrac{8}{x}$ и $g(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + bx + c$, касающиеся в точке A и пересекающиеся в точке B. Найдите абсциссу точки B.



Ответ

4

Решение

Гипербола задана: $f(x) = \dfrac{8}{x}$.

Парабола имеет вид $g(x) = \dfrac{1}{8}x^2 + bx + c$. Её график проходит через точки $(-4; -2)$ и $(0; -2)$. Если график функции проходит через точку, то её координаты обращают уравнение функции в верное равенство. Таким образом, для точки $(0; -2)$ получаем уравнение

$$g(0) = \frac{1}{8} \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$
$$-2 = c$$
$$c = -2$$

Для точки $(-4; -2)$ получаем уравнение

$$g(-4) = \frac{1}{8} \cdot (-4)^2 + b \cdot (-4) - 2$$
$$-2 = 2 - 4b - 2$$
$$4b = 2$$
$$b = \frac{1}{2}$$

Таким образом,

$$g(x) = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - 2.$$

Найдём точки пересечения графиков, приравняв левые части функций:

$$\frac{8}{x} = \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{2}x - 2$$

$$64 = x^3 + 4x^2 - 16x$$

$$x^3 + 4x^2 - 16x - 64 = 0$$

$$x^2 \cdot (x+4) - 16 \cdot (x+4) = 0$$

$$\left(x^2 - 16\right)(x+4) = 0$$

$$(x-4)(x+4)^2 = 0$$

$$\left[\begin{array}{l} x = 4 \\ x = -4 \end{array}\right.$$

Точка A на рисунке имеет абсциссу -4, следовательно, точка B имеет абсциссу 4.

Задание №12

Найдите наименьшее значение функции $y = 8\cos x - 17x + 6$ на отрезке $\left[-\dfrac{3\pi}{2}; 0\right]$.

Ответ

14

Решение

Возьмем производную от данной функции:

$$y' = (8\cos x)' + (-17x)' + (6)' = -8\sin x - 17$$

Заметим, что

$$-8 \leqslant -8\sin x \leqslant 8$$

Тогда оценим производную:

$$y' = -8\sin x - 17 \leqslant 8 - 17 = -9 < 0$$

Следовательно, $y = 8\cos x - 17x + 6$ — убывающая функция. Тогда наименьшее значение на отрезке $\left[-\frac{3\pi}{2}; 0\right]$ она принимает в точке $x = 0$:

$$y_{min} = y(0) = 8 \cdot 1 + 6 = 14$$

Задание №13

а) Решите уравнение $2\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^2 x = 2\sin x$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$.

Ответ

а) $\dfrac{\pi}{2} + \pi k;\ -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k;\ -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\dfrac{8\pi}{3};\ -\dfrac{5\pi}{2}$

Решение

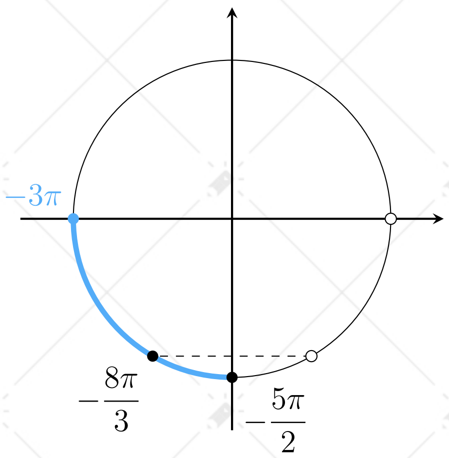
а) Преобразуем уравнение:

$$\begin{gathered}
2\sin^3 x - \sqrt{3}\cos^2 x = 2\sin x \\
2\sin^3 x - 2\sin x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0 \\
2\sin x\left(\sin^2 x - 1\right) - \sqrt{3}\cos^2 x = 0 \\
-2\sin x\cos^2 x - \sqrt{3}\cos^2 x = 0 \\
-\cos^2 x\left(2\sin x + \sqrt{3}\right) = 0
\end{gathered}$$

Отсюда получаем совокупность:

$$\left[\begin{array}{l}
\cos x = 0 \\
\sin x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}
\end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l}
x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\
x = -\dfrac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\
x = -\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}
\end{array}\right.$$

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-3\pi; -\dfrac{5\pi}{2}\right]$ лежат точки $-\dfrac{5\pi}{2};\ -\dfrac{8\pi}{3}$.

Задание №14

Длина ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 1. На ребре AA_1 взята точка E так, что длина отрезка $AE = \frac{1}{3}$. На ребре BC взята точка F так, что длина отрезка BF равна $\frac{1}{4}$. Через центр куба и точки E и F проведена плоскость α.

а) Докажите, что плоскость α делит ребро AB в отношении $3:2$.

б) Найдите расстояние от вершины B_1 до плоскости α.

Ответ

б) $\frac{11}{\sqrt{170}}$

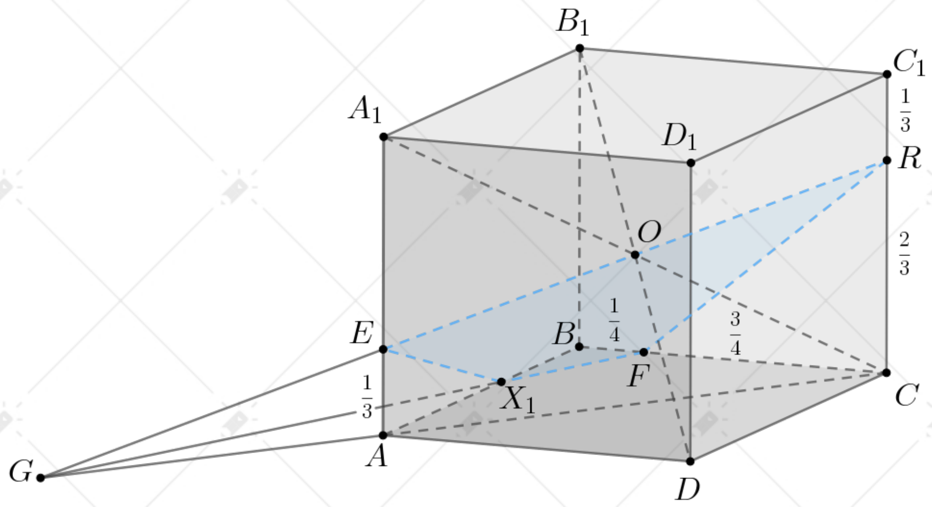
Решение

а) Пусть O — центр куба.

Так как точки E и O лежат в плоскости (AA_1C_1), то и прямая, проходящая через данные точки, лежит в этой плоскости. Пусть она пересекает ребро CC_1 в точке R.

Продлим ER и AC до пересечения в точке G. Так как AC лежит в плоскости нижнего основания, то и точка G лежит в этой плоскости.

Тогда точки G и F лежат в плоскости грани $ABCD$, следовательно можем провести прямую, проходящую через данные точки. Пусть она пересекает ребро AB в точке X_1.



Так как AA_1C_1C — прямоугольник и O — центр прямоугольника, то $AE = RC_1 = \frac{1}{3}$.

Также $RC = C_1C - C_1R = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$, $FC = BC - BF = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$.

Заметим, что $\triangle AEG \sim \triangle CRG$ по двум углам: $\angle CGR$ — общий, $\angle EAG = \angle RCG = 90^\circ$.

Запишем отношение соответствующих сторон:

$$\frac{CG}{GA} = \frac{RC}{EA}$$

$$\frac{CG}{GA} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{1}{3}} = \frac{2}{1}$$

По теореме Менелая для треугольника ABC и секущей GF получаем:

$$\frac{AX_1}{X_1B}\cdot\frac{BF}{FC}\cdot\frac{CG}{GA}=1$$

$$\frac{AX_1}{X_1B}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{1}=1$$

$$\frac{AX_1}{X_1B}=\frac{3}{2}$$

Таким образом, получили, что $AX_1 : X_1B = 3 : 2$.

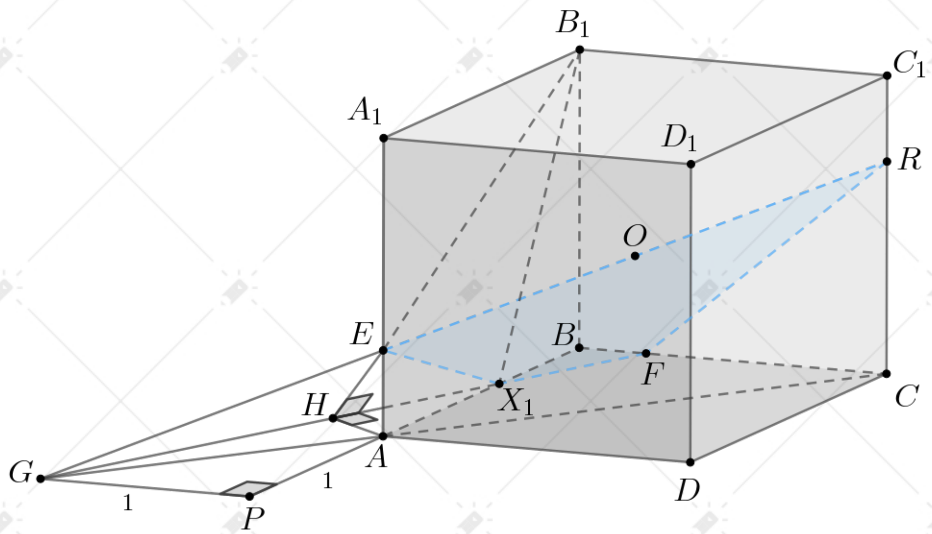
б) Пусть расстояние от точки B_1 до плоскости α равно x. Посчитаем двумя способами объем V пирамиды GEX_1B_1.

С одной стороны, $V=\frac{1}{3}\cdot x\cdot S_{GEX_1}$. С другой стороны,

$$V=\frac{1}{3}\cdot S_{B_1EX_1}\cdot y,$$

где y — расстояние от точки G до плоскости B_1EX_1, совпадающей с плоскостью ABB_1A_1. Опустим перпендикуляр из точки G на прямую AB. Он будет параллелен AD и, следовательно, перпендикулярен к (ABB_1).

Заметим, что $\triangle GEA \sim \triangle GRC$ с коэффициентом подобия $\frac{1}{2}$. Следовательно, $GA = AC$ и $\triangle GPA = \triangle ABC$ по стороне и двум прилежащим к ней углам. Тогда $y = 1$.



Посчитаем площадь треугольника B_1EX_1 :

$$S_{B_1EX_1}=S_{ABB_1A_1}-S_{AEX_1}-S_{A_1B_1E}-S_{B_1BX_1}$$

1. Так как AA_1B_1B — квадрат со стороной 1, то

$$S_{ABB_1A_1}=1$$

2. Треугольник AEX_1 прямоугольный. Из пункта а) имеем, что $AX_1 = \frac{3}{5}$, тогда

$$S_{AEX_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{10}$$

3. Треугольник A_1B_1E прямоугольный. Тогда

$$S_{A_1B_1E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

4. Треугольник B_1BX_1 прямоугольный. Из пункта а) имеем, что $BX_1 = \frac{2}{5}$, тогда

$$S_{B_1BX_1} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

Таким образом,

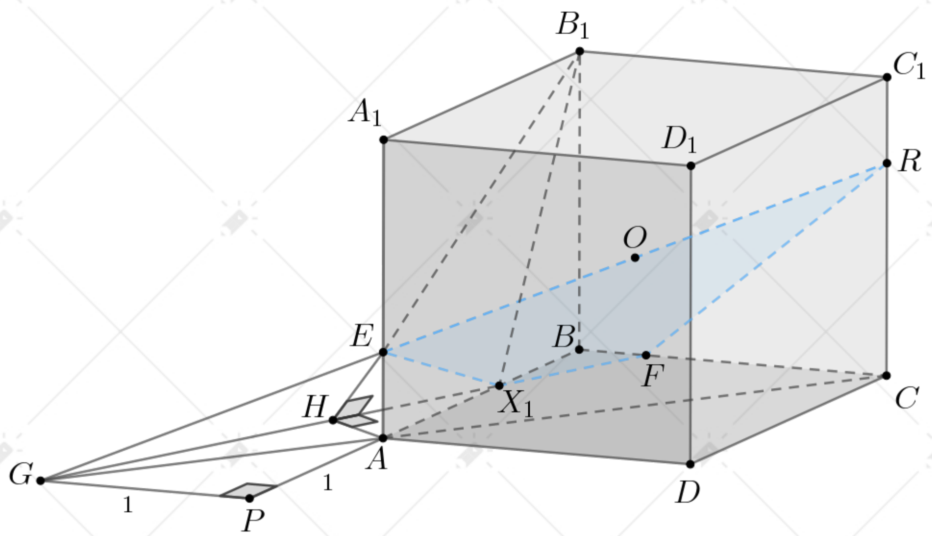
$$S_{B_1EX_1} = S_{ABB_1A_1} - S_{AEX_1} - S_{A_1B_1E} - S_{B_1BX_1} =$$
$$= 1 - \frac{1}{10} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{30 - 3 - 10 - 6}{30} = \frac{11}{30}$$

Тогда $3V = \frac{11}{30}$.

Найдем площадь треугольника GEX_1.

По теореме Пифагора для $\triangle GPX_1$:

$$GP^2 + PX_1^2 = GX_1^2$$
$$GX_1^2 = 1 + \frac{64}{25}$$
$$GX_1 = \frac{\sqrt{89}}{5}$$



Пусть AH — высота треугольника GAX_1. Тогда по теореме о трех перпендикулярах EH —

высота треугольника GEX_1.

Заметим, что $\triangle GPX_1 \sim \triangle AHX_1$ по двум углам ($\angle X_1$ — общий, $\angle GPX_1 = \angle AHX_1 = 90^\circ$).

Запишем отношение соответствующих сторон:

$$\frac{GP}{AH} = \frac{GX_1}{AX_1}$$
$$AH = \frac{GP \cdot AX_1}{GX_1}$$
$$AH = \frac{1 \cdot \frac{3}{5}}{\frac{\sqrt{89}}{5}} = \frac{3}{\sqrt{89}}$$

По теореме Пифагора для $\triangle AHE$:

$$EH^2 = AH^2 + AE^2$$
$$EH^2 = \left(\frac{3}{\sqrt{89}}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2$$
$$EH = \frac{\sqrt{170}}{3\sqrt{89}}$$

Следовательно,

$$S_{GEX_1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{89}}{5} \cdot \frac{\sqrt{170}}{3\sqrt{89}} = \frac{\sqrt{170}}{30}$$

Таким образом, получаем

$$\frac{11}{30} = 3V = \frac{\sqrt{170}}{30} \cdot x$$
$$x = \frac{11}{\sqrt{170}}$$

Задание №15

Решите неравенство

$$2 \cdot 49^{x^2-4x+4} + 7 \cdot 4^{x^2-4x+4} \geqslant 9 \cdot 14^{x^2-4x+4}.$$

Ответ

$x \in (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty)$

Решение

Заметим, что $x^2 - 4x + 4 = (x-2)^2$. Обозначим $t = (x-2)^2 \geqslant 0$. Тогда неравенство принимает вид:

$$2 \cdot 49^t + 7 \cdot 4^t \geqslant 9 \cdot 14^t.$$

Разделим обе части на $4^t > 0$:

$$2 \cdot \left(\frac{49}{4}\right)^t + 7 \geqslant 9 \cdot \left(\frac{14}{4}\right)^t.$$

Упростим дроби:

$$2 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{2t} + 7 \geqslant 9 \cdot \left(\frac{7}{2}\right)^{t}.$$

Введём замену $u = \left(\frac{7}{2}\right)^{t} > 0$. Тогда $\left(\frac{7}{2}\right)^{2t} = u^2$. Получим Неравенство

$$2u^2 + 7 \geqslant 9u$$

$$2u^2 - 9u + 7 \geqslant 0$$

$$(u-1)\left(u - \frac{7}{2}\right) \geqslant 0$$

$$\left[\begin{array}{l} u \leqslant 1 \\ u \geqslant \dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

Возвращаемся к переменной t :

$$\left[\begin{array}{l} \left(\dfrac{7}{2}\right)^{t} \leqslant 1 \\ \left(\dfrac{7}{2}\right)^{t} \geqslant \dfrac{7}{2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t \leqslant 0 \\ t \geqslant 1 \end{array}\right.$$

Учитывая, что $t = (x-2)^2 \geqslant 0$, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} (x-2)^2 = 0 \\ (x-2)^2 \geqslant 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x \leqslant 1 \\ x \geqslant 3 \end{array}\right.$$

Таким образом,

$$x \in (-\infty; 1] \cup \{2\} \cup [3; +\infty).$$

Задание №16

В июле 2026 года планируется взять кредит на 600 тыс. рублей. Условия его возврата таковы:
– в январе 2027, 2028 и 2029 годов долг возрастает на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
– в январе 2030, 2031 и 2032 годов долг уменьшается на r% по сравнению с концом предыдущего года (в рамках программы государственной поддержки);
– в июле каждого года долг должен быть на одну и ту же величину меньше долга на июль предыдущего года;
– к июлю 2032 года долг должен быть полностью погашен.
Чему равно r, если общая сумма выплат составила 828 тыс. рублей?

Ответ

12

Решение

Кредит размером $S = 600\,000$ рублей взят на 6 лет, при этом каждый раз за год сумма долга должна уменьшаться на $\frac{S}{6}$. Составим таблицу, учитывая, что первые три раза сумма долга увеличивается на 20%, а последние три — уменьшается на $r\%$.

Год	Сумма долга до изменения	Сумма долга после изменения	Выплата	Сумма долга после выплаты
2027	S	$S\cdot 1{,}2$	$1{,}2S - \frac{5}{6}S$	$\frac{5}{6}S$
2028	$\frac{5}{6}S$	$\frac{5}{6}S\cdot 1{,}2$	$\frac{5}{6}S\cdot 1{,}2 - \frac{4}{6}S$	$\frac{4}{6}S$
2029	$\frac{4}{6}S$	$\frac{4}{6}S\cdot 1{,}2$	$\frac{4}{6}S\cdot 1{,}2 - \frac{3}{6}S$	$\frac{3}{6}S$
2030	$\frac{3}{6}S$	$\frac{3}{6}S\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)$	$\frac{3}{6}S\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right) - \frac{2}{6}S$	$\frac{2}{6}S$
2031	$\frac{2}{6}S$	$\frac{2}{6}S\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)$	$\frac{2}{6}S\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right) - \frac{1}{6}S$	$\frac{1}{6}S$
2032	$\frac{1}{6}S$	$\frac{1}{6}S\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)$	$\frac{1}{6}S\cdot\left(1-\frac{r}{100}\right)$	0

Найдём общую сумму выплат:

$$\left(1{,}2S-\frac{5}{6}S\right)+\left(\frac{5}{6}S\cdot 1{,}2-\frac{4}{6}S\right)+\left(\frac{4}{6}S\cdot 1{,}2-\frac{3}{6}S\right)+$$
$$+\left(\frac{3}{6}S\left(1-\frac{r}{100}\right)-\frac{2}{6}S\right)+\left(\frac{2}{6}S\left(1-\frac{r}{100}\right)-\frac{1}{6}S\right)+\frac{1}{6}S\left(1-\frac{r}{100}\right).$$

Сгруппируем слагаемые:

$$\left(1{,}2S+\frac{5}{6}S\cdot 1{,}2+\frac{4}{6}S\cdot 1{,}2\right)-\left(\frac{5}{6}S+\frac{4}{6}S+\frac{3}{6}S\right)+$$
$$+\left(\frac{3}{6}S\left(1-\frac{r}{100}\right)+\frac{2}{6}S\left(1-\frac{r}{100}\right)+\frac{1}{6}S\left(1-\frac{r}{100}\right)\right)-\left(\frac{2}{6}S+\frac{1}{6}S\right).$$

Упростим:

$$1{,}2S\cdot\left(1+\frac{5}{6}+\frac{4}{6}\right)-\frac{12}{6}S+\left(1-\frac{r}{100}\right)\cdot S\cdot\left(\frac{3}{6}+\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\right)-\frac{3}{6}S=$$
$$=1{,}2S\cdot\frac{15}{6}-2S+\left(1-\frac{r}{100}\right)S-0{,}5S=$$
$$=3S-2S+S-\frac{r}{100}S-0{,}5S=1{,}5S-\frac{r}{100}S.$$

Подставим $S = 600$ тыс. рублей и приравняем к 828 тыс. рублей:

$$1{,}5 \cdot 600 - \frac{r}{100} \cdot 600 = 828$$
$$900 - 6r = 828$$
$$6r = 72$$
$$r = 12.$$

Задание №17

Дан треугольник ABC, на стороне BC которого взята точка E так, что $BE = AB$, а на стороне AC взята точка D так, что $AD = DE$. На стороне AC также взята точка F так, что $EF \parallel BD$.
а) Докажите, что $CF \cdot AB = AD \cdot CE$.
б) Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle AED = \angle CEF = 30^\circ$ и $CL = 6$, где L – точка пересечения прямых AB и ED.

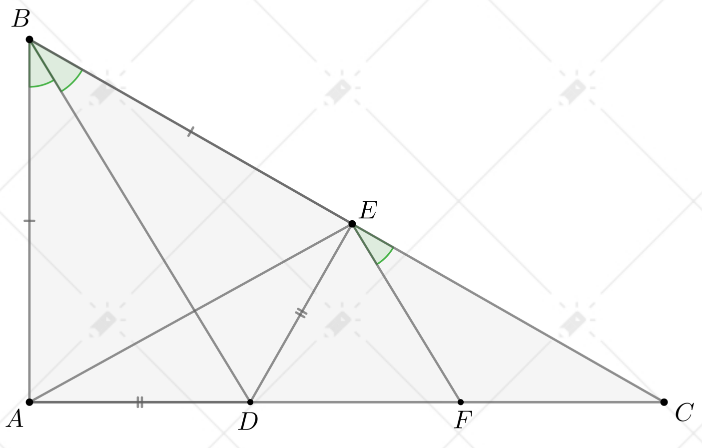
Ответ

б) $\dfrac{9\sqrt{3}}{2}$

Решение

а) Треугольники ABD и EBD равны по трем сторонам, значит, BD — биссектриса треугольника ABC.
Треугольники EFC и BDC подобны по двум углам, так как $\angle BCD$ — общий, а $\angle FEC = \angle DBC$ как соответственные углы, образованные параллельными прямыми EF и BD и секущей BC. Тогда

$$\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{CE}{CF} = \frac{BC}{CD}$$



Мы выяснили, что BD — биссектриса треугольника ABC, тогда по свойству биссектрисы

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{AB}{AD} = \frac{BC}{CD}$$

Значит,

$$\frac{CE}{CF} = \frac{BC}{CD} = \frac{AB}{AD} \quad \Rightarrow \quad CE \cdot AD = CF \cdot AB$$

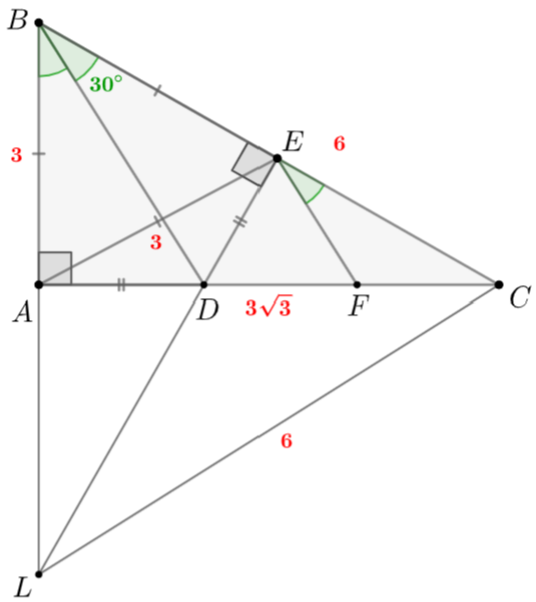
б) Углы $\angle DBE = \angle FEC = 30^\circ$ как соответственные при $EF \parallel BD$ и секущей BC. Следовательно, $\angle ABC = 60^\circ$, следовательно, $\triangle ABE$ равнобедренный с углом 60°, следовательно, он равносторонний.

Так как $\triangle ADE$ равнобедренный с углами $\angle EAD = \angle AED = 30^\circ$, то $\angle BAC = 90^\circ$. Также заметим, что $\angle DEB = 90^\circ$.

Треугольник, образованный двумя основаниями высот и третьей вершиной треугольника, подобен исходному треугольнику с коэффициентом $\cos\alpha$, где α — угол при общей вершине. Таким образом, $\triangle ABE \sim \triangle CBL$ с коэффициентом $\cos\angle ABC$. Значит,

$$AE = CL\cos\angle B = CL \cdot \cos 60^\circ = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3$$

Треугольник ABE — равносторонний, значит, $AB = BE = AE = 3$.



Треугольник CBL подобен треугольнику ABE, значит, также является равносторонним, то есть $BC = CL = BL = 6$.

По теореме Пифагора для прямоугольного треугольника ABC :

$$AB^2 + AC^2 = BC^2 \quad \Leftrightarrow \quad AC^2 = BC^2 - AB^2 = 36 - 9 = 27 \quad \Rightarrow \quad AC = 3\sqrt{3}$$

Таким образом,

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$$

Задание №18

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система уравнений

$$\begin{cases}(2x^2-2x+2y^2-18y+61)^2=(14x+2y-13)^2\\ y=|x-a|\end{cases}$$

имеет ровно три решения.

Ответ

$a\in\left\{-\sqrt{2}+1;2\sqrt{2}-1\right\}$

Решение

Преобразуем первое уравнение системы:

$$(2x^2-2x+2y^2-18y+61)^2-(14x+2y-13)^2=0$$

$$\left((2x^2-2x+2y^2-18y+61)-(14x+2y-13)\right)\left((2x^2-2x+2y^2-18y+61)+(14x+2y-13)\right)=0$$

$$(2x^2-2x+2y^2-18y+61-14x-2y+13)(2x^2-2x+2y^2-18y+61+14x+2y-13)=0$$

$$(2x^2-16x+2y^2-20y+74)(2x^2+12x+2y^2-16y+48)=0\ \Big|:4$$

$$(x^2-8x+y^2-10y+37)(x^2+6x+y^2-8y+24)=0$$

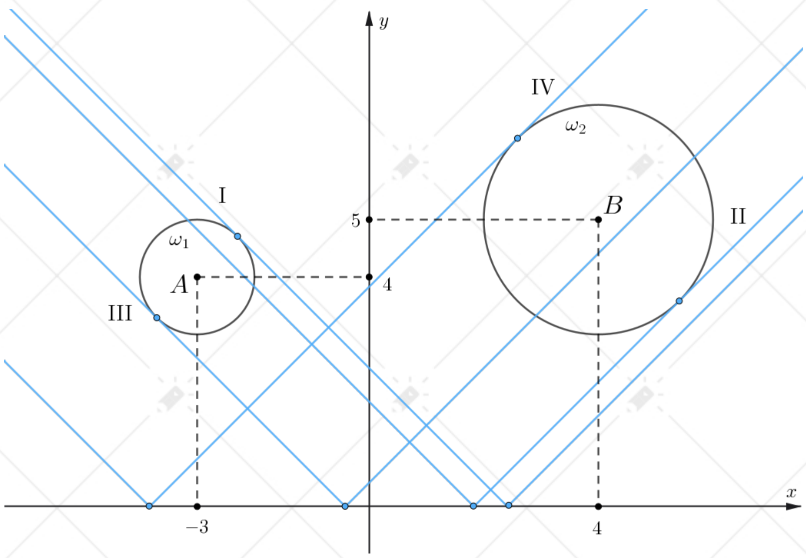
$$\left((x^2-8x+16)+(y^2-10y+25)-4\right)\left((x^2+6x+9)+(y^2-8y+16)-1\right)=0$$

$$\left((x-4)^2+(y-5)^2-4\right)\left((x+3)^2+(y-4)^2-1\right)=0$$

$$\left[\begin{aligned}&(x-4)^2+(y-5)^2=4\\&(x+3)^2+(y-4)^2=1\end{aligned}\right.$$

Получаем, что первое уравнение задает в осях xOy две окружности: ω_1 с центром $A(-3;4)$ и радиусом $r=1$ и ω_2 с центром $B(4;5)$ и радиусом $R=2$.

Графиком второго уравнения $y=|x-a|$ является уголок, ветви которого направлены вверх, а вершина имеет координаты $(a;0)$, то есть скользит по прямой $y=0$.



У нас есть 4 граничных случая: I и III – касание окружности ω_1 с разных сторон, II и IV – касание окружности ω_2 с разных сторон.

Случаи I и III. Найдем значения параметра a, при которых происходит касание левой ветви уголка с окружностью ω_1. Уравнение левой ветви будет иметь вид $y = -x + a$. Подставим это значение y в уравнение окружности ω_1 и найдем a, при которых будет $D = 0:$

$$(x+3)^2 + (-x+a-4)^2 = 1$$
$$x^2 + 6x + 9 + x^2 + a^2 + 16 - 2ax + 8x - 8a = 1$$
$$2x^2 + x(14-2a) + (a^2 - 8a + 24) = 0$$
$$D = (14-2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 - 8a + 24) =$$
$$= 196 - 56a + 4a^2 - 8a^2 + 64a - 8 \cdot 24 = -4a^2 + 8a + 4 = -4 \cdot (a^2 - 2a - 1) = 0$$

Решим уравнение $a^2 - 2a - 1 = 0$ по формуле корней через дискриминант:

$$a_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2+4}}{2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{2}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

По рисунку видно, что случаю I соответствует бóльшее значение a, а случаю III – меньшее. Значит, случаю I соответствует $a = 1 + \sqrt{2}$, а случаю III соответствует $a = 1 - \sqrt{2}$.

Случаи II и IV. Найдем значения параметра a, при которых происходит касание правой ветви уголка с окружностью ω_2. Уравнение правой ветви будет иметь вид $y = x - a$. Подставим это значение y в уравнение окружности ω_2 и найдем a, при которых будет $D = 0:$

$$(x-4)^2 + (x-a-5)^2 = 4$$
$$x^2 - 8x + 16 + x^2 + a^2 + 25 - 2ax - 10x + 10a = 4$$
$$2x^2 - x(18+2a) + (a^2 + 10a + 37) = 0$$
$$D = (18+2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a^2 + 10a + 37) =$$
$$= 18^2 + 72a + 4a^2 - 8a^2 - 80a - 8 \cdot 37 = -4a^2 - 8a + 28 = -4 \cdot (a^2 + 2a - 7) = 0$$

Решим уравнение $a^2 + 2a - 7 = 0$ по формуле корней через дискриминант:

$$a_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 + 4 \cdot 7}}{2} = \frac{-2 \pm 4\sqrt{2}}{2} = -1 \pm 2\sqrt{2}$$

Видно, что случаю II соответствует бóльшее значение a, а случаю IV – меньшее. Значит, случаю II соответствует $a = -1 + 2\sqrt{2}$, а случаю IV соответствует $a = -1 - 2\sqrt{2}$.

Интерес могут вызвать пары случаев I и II и III и IV, а также их взаимное положение.

Заметим, что касание левой ветви галочки с окружностью ω_1 действительно происходит раньше (если двигаться справа налево), чем касание правой ветви с окружностью ω_2, так как $-1+2\sqrt{2} < 1 + \sqrt{2}$.

Также заметим, что касание правой ветви галочки с ω_2 действительно происходит позже, чем

касание левой ветви с ω_1, так как $-1-2\sqrt{2}<1-\sqrt{2}$.
Тогда видим, что три решения мы получим в случаях II и III, то есть при $a=-1+2\sqrt{2}$ и $a=1-\sqrt{2}$.

Задание №19

В ювелирной мастерской есть весы с двумя чашами. На одну чашу весов кладут только золото, на другую – гири. На чашу для гирь можно положить несколько гирь.

а) Можно ли некоторым набором из шести гирь отвесить любое целое число граммов от 1 до 60?

б) Можно ли некоторым набором из семи гирь отвесить любое целое число граммов от 17 до 145?

в) Пусть каждая гиря в наборе весит нецелое число грамм. Найдите наименьшее число гирь в таком наборе, если им можно взвесить любой целый вес от 1 до 20 грамм включительно?

Ответ

а) да

б) нет

в) 6

Решение

а) Рассмотрим набор гирь массами 1, 2, 4, 8, 16, 32 грамм. Сумма масс этих гирь равна

$$1+2+4+8+16+32=63 \text{ г.}$$

Это так называемый двоичный набор: каждая следующая гиря не больше, чем сумма всех предыдущих, увеличенная на 1. С его помощью можно получить любой целый вес от 1 до 63 грамм (выбирая нужные гири). В частности, все веса от 1 до 60 грамм также получаются.

б) Предположим, что существует набор из 7 гирь, позволяющий взвесить любой целый вес от 17 г до 145 г включительно. Поскольку гири кладутся только на одну чашу весов, каждый взвешиваемый вес равен сумме масс некоторого поднабора гирь. Количество различных непустых поднаборов из 7 гирь равно $2^7-1=127$. Таким образом, максимальное количество различных целых весов, которые можно получить с помощью такого набора, равно 127. Однако для покрытия всех целых чисел от 17 до 145 необходимо $145-17+1=129$ различных значений. Получаем противоречие, так как $127<129$. Значит, требуемого набора не существует.

в) Пусть у нас есть n гирь с нецелыми массами. Докажем оценку снизу. Зафиксируем одну гирю с нецелой массой a. Все 2^n поднаборов гирь разобьём на пары: поднабор без a и тот же поднабор, но с добавлением a. В каждой паре массы поднаборов отличаются на a. Так как a нецелое, то в каждой паре не более одного поднабора имеет целую суммарную массу. Пар всего 2^{n-1}, поэтому количество поднаборов с целой суммой не превышает 2^{n-1}.

Чтобы можно было взвесить любой целый вес от 1 до 20 г, необходимо иметь как минимум 20 различных поднаборов с целыми суммами. Получаем неравенство:

$$2^{n-1} \geqslant 20.$$

При $n = 5$ имеем $2^4 = 16 < 20$ – недостаточно. При $n = 6$ имеем $2^5 = 32 > 20$. Следовательно, необходимо не менее 6 гирь.

Покажем, что 6 гирь достаточно. Рассмотрим гири с массами (в граммах):

$$\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}, \frac{8}{3}, \frac{16}{3}, \frac{32}{3}.$$

Все массы нецелые. Умножим каждую массу на 3 – получим целочисленный набор:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32.$$

Этот набор позволяет получить любое целое число от 1 до 63 (сумма всех гирь) при выборе некоторого поднабора. Для любого целого k от 1 до 20 число $3k$ лежит в диапазоне от 3 до 60, поэтому существует поднабор целочисленных гирь с суммой $3k$. Выбрав соответствующий поднабор исходных гирь, получим сумму k. Таким образом, любой целый вес от 1 до 20 грамм можно уравновесить. Значит, 6 гирь достаточно.