ЕГЭ по профильной математике 27.03.2026. Досрочная волна

Здесь можно скачать актуальную версию файла

Содержание

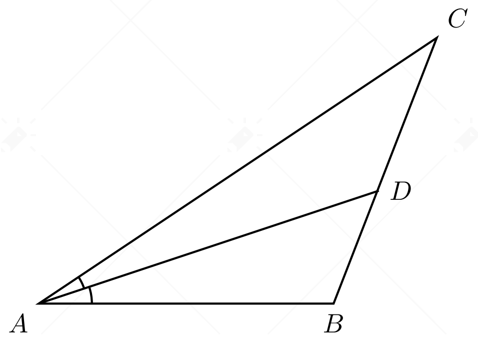
Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Первая часть. Условия

Задачи №1. Условия

№1.1 (Сибирь)

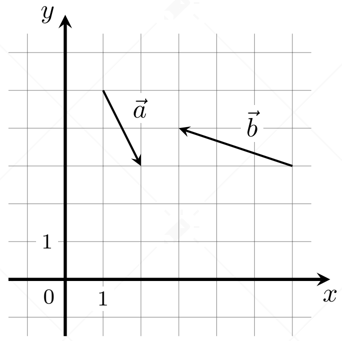
В треугольнике ABC известно, что AD – биссектриса, $\angle C = 30°$, $\angle BAD = 22°$. Найдите $\angle ADB$. Ответ дайте в градусах.



Задачи №2. Условия

№2.1 (Сибирь)

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a} + 2\vec{b}$.



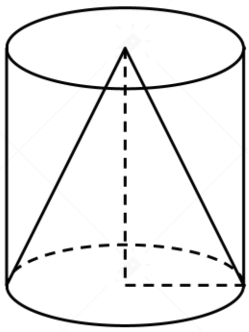
№2.2 (Центр)

Даны векторы $\vec{a}(6; 4)$ и $\vec{b}(6; 5)$. Найдите длину вектора $\vec{a} + \vec{b}$.

Задачи №3. Условия

№3.1 (Сибирь)

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 150.



Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №4. Условия

№4.1 (Сибирь)

Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит хотя бы два года, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

№4.2 (Центр)

На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,12. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,2. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Задачи №5. Условия

№5.1 (Сибирь)

В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Задачи №6. Условия

№6.1 (Сибирь)

Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+73}=9$.

№6.2 (Центр)

Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+52}=8$.

Задачи №7. Условия

№7.1 (Сибирь)

Найдите значение выражения $\dfrac{(2\sqrt{7})^2}{14}$.

№7.2 (Центр)

Найдите значение выражения $\dfrac{(6\sqrt{7})^2}{9}$.

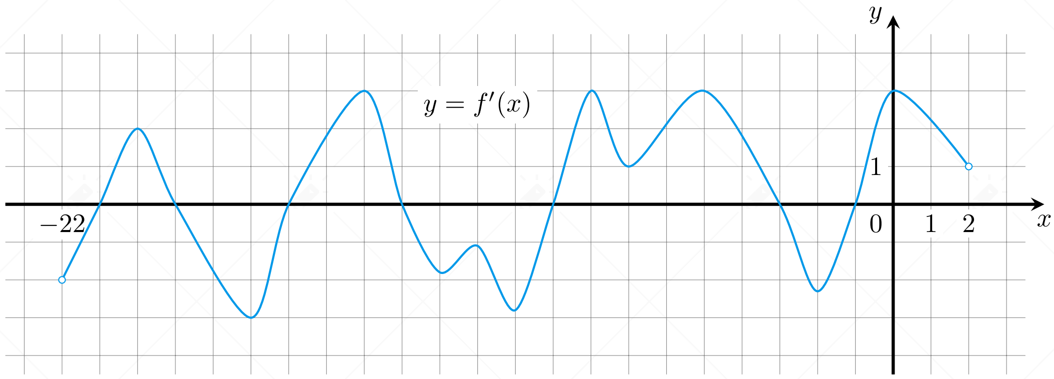
№7.3 (Москва)

Найдите $\operatorname{tg} x$, если $\cos x = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$, при $x \in [0;\pi]$.

Задачи №8. Условия

№8.1 (Центр)

На рисунке изображён график $y=f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-22;2)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-18;1]$.



Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №9. Условия

№9.1 (Сибирь)

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P – мощность излучения звезды в ваттах, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана-Больцмана, S – площадь поверхности звезды в квадратных метрах, T – температура в Кельвинах.
Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

Задачи №10. Условия

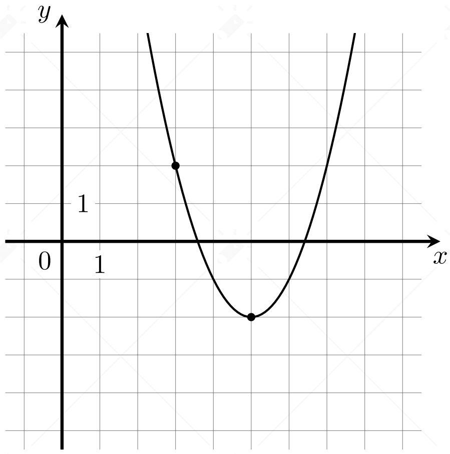
№10.1 (Центр)

Имеются два сплава. Первый содержит 15% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 140 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Задачи №11. Условия

№11.1 (Сибирь)

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-1)$.



Задачи №12. Условия

№12.1 (Москва)

Найдите точку минимума функции $y = x^2 + 3x - 44\ln x - 97$.

№12.2 (Сибирь, не подтверждено)

Найдите точку максимума функции $y = \log_2\left(2 + 2x - x^2\right) - 2$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Вторая часть. Условия

Задачи №13. Условия

№13.1 (Москва)

а) Решите уравнение $\cos^2 x + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; 6\pi]$.

№13.2 (Центр)

а) Решите уравнение $\sin^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{13\pi}{2}; \frac{15\pi}{2}\right]$.

№13.3 (Дальний Восток, не подтверждено)

а) Решите уравнение $\log_2(\sin 2x) = \log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$.

№13.4 (Дальний восток, не подтверждено)

а) Решите уравнение $\log_3(\sin 2x) = \log_3\left(\sqrt{3}\cos x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №14. Условия

№14.1 (Центр)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K – середина ребра A_1B_1. Плоскость α проходит через точки A, K и C.

а) Докажите, что сечением призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения, если все ребра призмы равны 6.

№14.2 (Центр)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K – середина ребра A_1B_1. Плоскость α проходит через точки A, K и C.

а) Докажите, что сечением призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения, если все ребра призмы равны 4.

№14.3 (Сибирь)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра B_1C_1. Плоскость α проходит через точки B, K и D.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью α является равнобедренной трапецией.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если ребро куба равно 6.

№14.4 (Сибирь)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра B_1C_1. Плоскость α проходит через точки B, K и D.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью α является равнобедренной трапецией.

б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α, если ребро куба равно 3.

№14.5 (Дальний Восток, не подтверждено)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 3MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α, если все ребра призмы равны 16.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №15. Условия

№15.1 (Москва)

Решите неравенство $\dfrac{4}{\log_2 x} - \log_2\left(\dfrac{4}{x}\right) \leqslant \dfrac{38}{\log_2 x^2}$.

№15.2 (Центр)

Решите неравенство $\dfrac{9}{\log_3 x} - \log_3\left(\dfrac{9}{x}\right) \leqslant \dfrac{34}{\log_3 x^2}$.

№15.3 (Сибирь)

Решите неравенство $(\log_{36} x + 1) \cdot \left(\dfrac{1}{\log_{36} x} + 1\right) \leqslant \log_{36} x$.

№15.4 (Дальний восток, не подтверждено)

Решите неравенство $\log_{x+1}\left(x^2 - 5x + 7\right) \leqslant \log_{x+1} x$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №16. Условия

№16.1 (Москва)

В июне 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере 6,6 млн рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 6,6 млн рублей;
– выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
– к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат равна 12,6 млн рублей.

№16.2 (Центр)

В июне 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере 4,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 4,2 млн рублей;
– выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
– к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат равна 6,1 млн рублей.

№16.3 (Сибирь)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 260 000 рублей, а во второй год – 169 000 рублей.

№16.4 (Сибирь)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 250 000 рублей. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 150 000 рублей, а во второй год – 180 000 рублей.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №17. Условия

№17.1 (Сибирь)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \dfrac{7}{25}$.

№17.2 (Сибирь)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \dfrac{1}{9}$.

№17.3 (Москва)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AC и катета BC соответственно. Точка K лежит на катете BC так, что $BK : KC = 1 : 3$.

а) Докажите, что $AN = 2KM$.

б) Пусть P – точка пересечения отрезков AN и KM. Найдите длину отрезка прямой BP, заключенного внутри треугольника KMN, если $AB = 6$, $BC = 8$.

№17.4 (Москва)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AC и катета BC соответственно. Точка K лежит на катете BC так, что $BK : KC = 1 : 3$.

а) Докажите, что $AN = 2KM$.

б) Пусть P — точка пересечения отрезков AN и KM. Найдите длину отрезка прямой BP, заключенного внутри треугольника KMN, если $AB = 10$, $BC = 16$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №18. Условия

№18.1 (Дальний восток, не подтверждено)

Найдите все значения параметра a, при каждом их которых система

$$\begin{cases} |x-a|+|y|=2 \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

№18.2 (Центр)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+6|x|+7=5y+6x^2-a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

№18.3 (Центр)

Найдите все значения параметра a, при каждом их которых система

$$\begin{cases} 3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

№18.4 (Москва)

Найдите все значения параметра a, при каждом их которых система

$$\begin{cases} 6\cdot 2^{|x|}+7|x|+1=6y+7x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

№18.5 (Москва)

Найдите все значения параметра a, при каждом их которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|+3}+7|x|+1=8y+7x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №19. Условия

№19.1 (Сибирь)

Восемь различных натуральных чисел таковы, что никакие два не имеют общего делителя, большего 1.
а) Может ли сумма всех восьми чисел быть равна 65?
б) Может ли сумма всех восьми чисел быть равна 62?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех восьми чисел?

№19.2 (Сибирь)

Семь различных натуральных чисел таковы, что никакие два не имеют общего делителя, большего 1.
а) Может ли сумма всех семи чисел быть равна 50?
б) Может ли сумма всех семи чисел быть равна 47?
в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех семи чисел?

№19.3 (Центр)

а) Можно ли представить число 2043 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?
б) Можно ли представить число 599 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?
в) Найдите наименьшее число, которое можно представить в виде суммы семи различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова.

№19.4 (Центр)

а) Можно ли представить число 2032 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?
б) Можно ли представить число 799 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?
в) Найдите наименьшую число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова.

№19.5 (Центр)

а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?
б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?
в) Найдите наименьшую число, которое можно представить в виде суммы шести различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова.

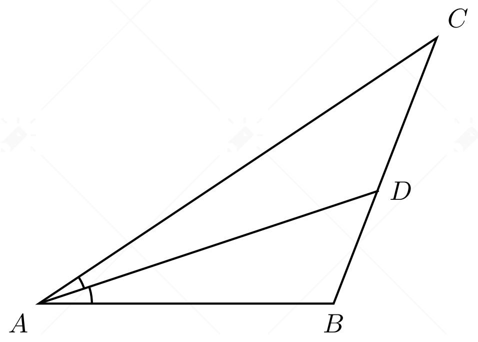
Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Первая часть. Решения

Задачи №1. Решения

№1.1 (Сибирь)

В треугольнике ABC известно, что AD – биссектриса, $\angle C = 30°$, $\angle BAD = 22°$. Найдите $\angle ADB$. Ответ дайте в градусах.



Ответ: 52.

Решение. Так как AD — биссектриса, то

$$\angle CAD = \angle BAD = 22°.$$

Заметим, что $\angle ADB$ – внешний угол треугольника ADC. Значит,

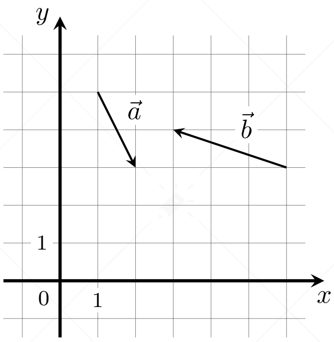
$$\angle ADB = \angle CAD + \angle ACD = 22° + 30° = 52°.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №2. Решения

№2.1 (Сибирь)

На координатной плоскости изображены векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, координатами которых являются целые числа. Найдите длину вектора $\vec{a}+2\vec{b}$.



Ответ: 5.

Решение. Найдем координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}=\{2-1;\ 3-5\}=\{1;\ -2\};$$
$$\vec{b}=\{3-6;\ 4-3\}=\{-3;\ 1\}.$$

Тогда

$$\vec{a}+2\vec{b}=\{1+2\cdot(-3);\ -2+2\cdot 1\}=\{1-6;\ -2+2\}=\{-5;\ 0\}.$$

Следовательно,

$$\left|\vec{a}+2\vec{b}\right|=\sqrt{(-5)^2+0^2}=5.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№2.2 (Центр)

Даны векторы $\vec{a}(6;4)$ и $\vec{b}(6;5)$. Найдите длину вектора $\vec{a}+\vec{b}$.

Ответ: 15.

Решение. Найдем координаты вектора $\vec{a}+\vec{b}$:

$$\vec{a}+\vec{b}=\{6+6;4+5\}=\{12;9\}.$$

Значит, его длина равна

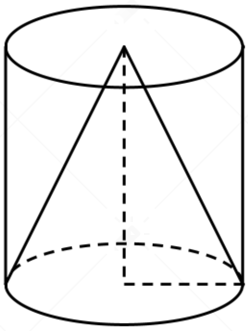
$$\left|\vec{a}+\vec{b}\right|=\sqrt{12^2+9^2}=\sqrt{15^2}=15.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №3. Решения

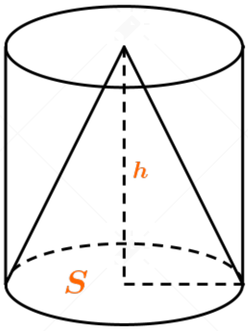
№3.1 (Сибирь)

Цилиндр и конус имеют общие основание и высоту. Найдите объём конуса, если объём цилиндра равен 150.



Ответ: 50.

Решение.



Объём конуса равен:

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}Sh.$$

Здесь S — площадь основания конуса, h — его высота.
Объём цилиндра равен:

$$V_{\text{ц}} = Sh.$$

Здесь S — площадь основания цилиндра, h — его высота.
По условию конус и цилиндр имеют общие основание и высоту, так что:

$$V_{\text{к}} = \frac{1}{3}V_{\text{ц}} = \frac{150}{3} = 50.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

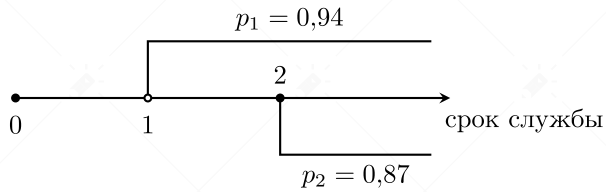
Задачи №4. Решения

№4.1 (Сибирь)

Вероятность того, что новый сканер прослужит больше года, равна 0,94. Вероятность того, что он прослужит хотя бы два года, равна 0,87. Найдите вероятность того, что он прослужит меньше двух лет, но больше года.

Ответ: 0,07.

Решение. Вероятность того, что сканер прослужит меньше двух лет, но больше года, равна разности вероятностей того, что сканер прослужит больше года, и того, что сканер прослужит больше двух лет.



Тогда искомая вероятность равна:

$$p = p_1 - p_2 = 0{,}94 - 0{,}87 = 0{,}07.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№4.2 (Центр)

На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Тригонометрия», равна 0,12. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,2. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: 0,32.

Решение. Вероятность того, что попадется вопрос по теме «Тригонометрия» или по теме «Внешние углы», равна сумме этих вероятностей, поскольку эти события несовместны. Тогда искомая вероятность равна

$$p = 0{,}12 + 0{,}2 = 0{,}32.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №5. Решения

№5.1 (Сибирь)

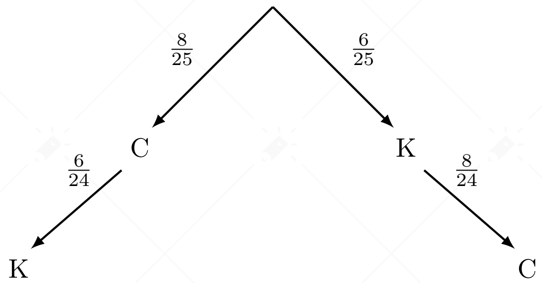
В коробке 8 синих, 6 красных и 11 зелёных фломастеров. Случайным образом выбирают два фломастера. Какова вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер?

Ответ: 0,16.

Решение. Из всех возможных элементарных исходов нам подходят два:

- сначала взяли синий (С), затем красный (К): (С; К);
- сначала взяли красный (К), затем синий (С): (К; С).

Нарисуем дерево, которое отражает процесс выбора двух фломастеров. При этом изобразим только интересующие нас ветви.



Всего фломастеров $8 + 6 + 11 = 25$. Вероятность первым взять синий фломастер равна $\frac{8}{25}$. Вероятность взять красный при условии, что один синий уже взят, равна $\frac{6}{24}$, потому что из оставшихся 24 фломастеров 6 красных. Тогда вероятность цепочки равна:

$$P(\text{С}; \text{К}) = \frac{8}{25} \cdot \frac{6}{24} = 0{,}08.$$

Вероятность первым взять красный равна $\frac{6}{25}$, так как мы выбираем фломастеры равновероятно. Вероятность взять синий при условии, что один красный уже взят, равна $\frac{8}{24}$, потому что из оставшихся 24 фломастеров ровно 8 синих. Тогда вероятность цепочки равна:

$$P(\text{К}; \text{С}) = \frac{6}{25} \cdot \frac{8}{24} = 0{,}08.$$

Складываем вероятности этих элементарных исходов:

$$0{,}08 + 0{,}08 = 0{,}16$$

Таким образом, вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастеры, равна 0,16.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №6. Решения

№6.1 (Сибирь)

Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+73}=9$.

Ответ: 4.

Решение. Уравнение в общем виде выглядит как $\sqrt{A}=B$ и равносильно

$$\begin{cases} A = B^2 \\ B \geqslant 0 \end{cases}$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно

$$\sqrt{2x+73}=9$$
$$2x+73=81$$
$$2x=8$$
$$x=4.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№6.2 (Центр)

Найдите корень уравнения $\sqrt{2x+52}=8$.

Ответ: 6.

Решение. Уравнение в общем виде выглядит как $\sqrt{A}=B$ и равносильно

$$\begin{cases} A=B^2\\ B\geqslant 0 \end{cases}$$

Следовательно, исходное уравнение равносильно

$$\begin{gathered} \sqrt{2x+52}=8\\ 2x+52=64\\ 2x=12\\ x=6. \end{gathered}$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №7. Решения

№7.1 (Сибирь)

Найдите значение выражения $\dfrac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14}$.

Ответ: 2.

Решение.

$$\frac{\left(2\sqrt{7}\right)^2}{14} = \frac{2^2 \cdot \left(\sqrt{7}\right)^2}{14} =$$

$$= \frac{2 \cdot 2 \cdot 7}{14} = 2.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№7.2 (Центр)

Найдите значение выражения $\frac{\left(6\sqrt{7}\right)^2}{9}$.

Ответ: 28.

Решение.

$$\frac{\left(6\sqrt{7}\right)^2}{9} = \frac{6^2 \cdot \left(\sqrt{7}\right)^2}{9} =$$

$$= \frac{6^2 \cdot 7}{9} = 4 \cdot 7 = 28.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№7.3 (Москва)

Найдите $\operatorname{tg} x$, если $\cos x = \dfrac{5\sqrt{26}}{26}$, при $x \in [0; \pi]$.

Ответ: 0,2.

Решение. Так как $x \in [0^\circ; 180^\circ]$, то $\sin x \geqslant 0$. По основному тригонометрическому тождеству

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\sin^2 x + \frac{25}{26} = 1$$

$$\sin^2 x = 1 - \frac{25}{26}$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{26}$$

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{26}}$$

Тогда

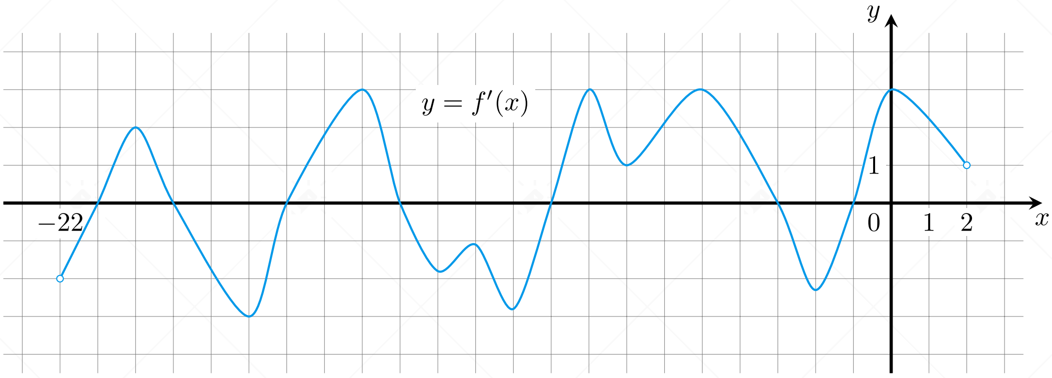
$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{1}{\sqrt{26}}}{\frac{5\sqrt{26}}{26}} = \frac{1}{5} = 0{,}2.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №8. Решения

№8.1 (Центр)

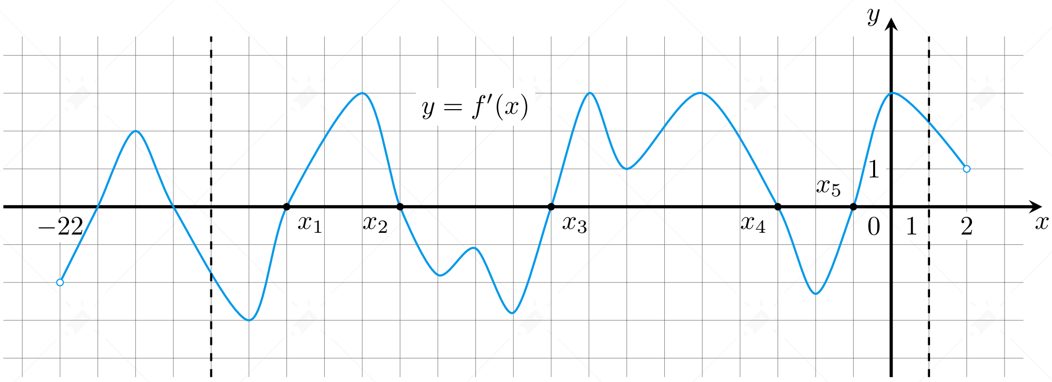
На рисунке изображён график $y = f'(x)$ — производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-22; 2)$. Найдите количество точек максимума функции $f(x)$, принадлежащих отрезку $[-18; 1]$.



Ответ: 2.

Решение. В точке максимума функции её производная обнуляется и меняет знак с «+» на «–» при движении слева направо, то есть до точки минимума функция возрастает, а после — начинает убывать.

На отрезке $[-18; 1]$ производная обнуляется пять раз — в точках:



В точке x_1 производная поменяла знак с «–» на «+».
В точке x_2 производная поменяла знак с «+» на «–».
В точке x_3 производная поменяла знак с «–» на «+».
В точке x_4 производная поменяла знак с «+» на «–».
В точке x_5 производная поменяла знак с «–» на «+».
Значит, x_2, x_4 — точки максимума на отрезке $[-18; 1]$.
Таким образом, функция $f(x)$ имеет 2 точки максимума, принадлежащих отрезку $[-18; 1]$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №9. Решения

№9.1 (Сибирь)

Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана-Больцмана, согласно которому $P = \sigma S T^4$, где P – мощность излучения звезды в ваттах, $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ – постоянная Стефана-Больцмана, S – площадь поверхности звезды в квадратных метрах, T – температура в Кельвинах.
Известно, что площадь поверхности некоторой звезды равна $\frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, а мощность её излучения равна $9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт. Найдите температуру этой звезды в Кельвинах.

Ответ: 4000.

Решение. Выразим из уравнения температуру в четвертой степени:

$$P = \sigma S T^4 \quad \Rightarrow \quad T^4 = \frac{P}{\sigma S}$$

Подставим значения $\sigma = 5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$, $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20}$ м^2, $P = 9{,}12 \cdot 10^{25}$ Вт:

$$T^4 = \frac{9{,}12 \cdot 10^{25}}{5{,}7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{20}} = \frac{912 \cdot 10^{23} \cdot 16}{57 \cdot 10^{11}} =$$
$$= \frac{912 \cdot 16}{57} \cdot 10^{12} = 16 \cdot 16 \cdot 10^{12} = \left(4 \cdot 10^3\right)^4$$

Значит,

$$T = 4 \cdot 10^3 = 4000.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №10. Решения

№10.1 (Центр)

Имеются два сплава. Первый содержит 15% никеля, второй — 35% никеля. Из этих двух сплавов получили третий сплав массой 140 кг, содержащий 30% никеля. На сколько килограммов масса первого сплава меньше массы второго?

Ответ: 70.

Решение. Пусть масса первого сплава равна x кг, второго — y кг. Тогда масса никеля в первом сплаве равна $0{,}15x$ кг, во втором — $0{,}35y$ кг. Выразив массу и процентное содержание никеля в третьем сплаве через x и y, получим систему:

$$\begin{cases} x+y=140 \\ \dfrac{0{,}15x+0{,}35y}{x+y}=0{,}3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x+y=140 \\ \dfrac{0{,}15(140-y)+0{,}35y}{140}=0{,}3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+y=140 \\ 21+0{,}2y=42 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y=\dfrac{42-21}{0{,}2}=105 \\ x=35 \end{cases}$$

Тогда искомая разница в килограммах равна:

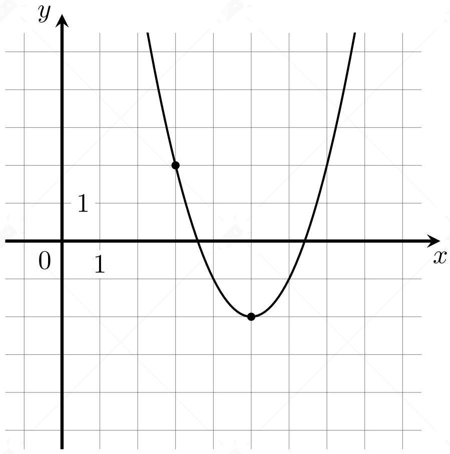
$$y-x=105-35=70$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №11. Решения

№11.1 (Сибирь)

На рисунке изображён график функции $f(x) = ax^2 + bx + c$, где числа a, b и c — целые. Найдите значение $f(-1)$.



Ответ: 34.

Решение. Любую параболу вида $f(x) = ax^2 + bx + c$ с вершиной $(x_0; y_0)$ можно представить в виде:

$$f(x) = a(x - x_0)^2 + y_0$$

По картинке видим, что вершина параболы имеет координаты $(5; -2)$, значит функция имеет вид:

$$f(x) = a(x - 5)^2 - 2$$

Также по картинке видно, что функция проходит через точку $(3; 2)$. Подставив в нашу функцию эту точку, получаем:

$$2 = a(3 - 5)^2 - 2$$

$$4a = 4$$

$$a = 1$$

Теперь мы полностью восстановили нашу функцию, она имеет вид:

$$f(x) = (x - 5)^2 - 2$$

Тогда искомое значение равно:

$$f(-1) = (-1 - 5)^2 - 2 = 36 - 2 = 34$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №12. Решения

№12.1 (Москва)

Найдите точку минимума функции $y = x^2 + 3x - 44\ln x - 97$.

Ответ: 4.

Решение.

1. Область определения функции $x > 0$.

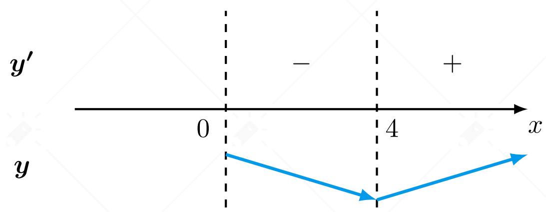
2. Найдем производную:
$$y' = 2x + 3 - \frac{44}{x} = \frac{2x^2 + 3x - 44}{x}$$

3. Найдём критические точки.

   Точки, в которых производная равна нулю:
$$\frac{2x^2 + 3x - 44}{x} = 0$$
$$2x^2 + 3x - 44 = 0$$
$$\left[\begin{array}{l} x = -5{,}5 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

   Точка, в которой производная не существует: $x = 0$.

4. Рисуем координатную ось и отмечаем на ней область определения и критические точки. Затем расставляем знаки производной на двух получившихся промежутках и отмечаем, на каких из них функция возрастает, а на каких убывает:



5. Видим, что $x = 4$ является точкой минимума.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№12.2 (Сибирь, не подтверждено)

Найдите точку максимума функции $y = \log_2\left(2 + 2x - x^2\right) - 2$.

Ответ: 1.

Решение. Заметим, что значение функции $f(x) = \log_2\left(2 + 2x - x^2\right)$ тем больше, чем больше значение функции $g(x) = 2 + 2x - x^2$. Следовательно, точка максимума функции $f(x)$ совпадает с точкой максимума функции $g(x)$. Найдем точку максимума $g(x)$.

$g(x) = 2 + 2x - x^2$ — это квадратичная функция и ее график — парабола с ветвями вниз. Значит, точка максимума совпадает с абсциссой вершины параболы. Значит, точка максимума – это точка

$$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot(-1)} = 1.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Вторая часть. Решения

Задачи №13. Решения

№13.1 (Москва)

а) Решите уравнение $\cos^2 x + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $[5\pi; 6\pi]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\frac{21\pi}{4};\ \frac{11\pi}{2}$.

Решение. а) Воспользуемся формулой синуса разности:

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \cos x \cdot \sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x - \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x - \cos x).$$

Тогда наше уравнение примет вид:

$$\cos^2 x + \sin^2\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\cos^2 x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot(\sin x - \cos x)\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\left(\sin^2 x - 2\sin x\cdot\cos x + \cos^2 x\right) = \frac{1}{2}.$$

Поскольку по ОТТ имеем $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, то получим:

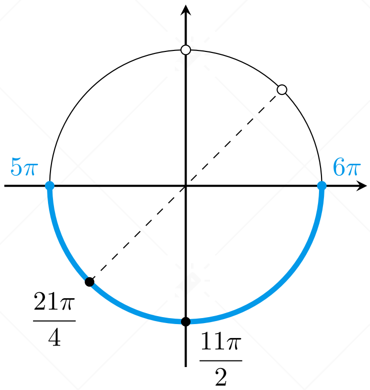
$$\cos^2 x + \frac{1}{2}\cdot(1 - 2\sin x\cdot\cos x) = \frac{1}{2}$$
$$2\cos^2 x + 1 - 2\sin x\cdot\cos x = 1$$
$$2\cos^2 x - 2\sin x\cdot\cos = 0$$
$$2\cos x(\cos x - \sin x) = 0$$
$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x - \sin x = 0\end{array}\right.$$

Заметим, что второе равенство не обращается в верное при $\cos x = 0$, а значит, на $\cos x$ можно разделить:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \operatorname{tg} x = 1\end{array}\right.$$
$$\left[\begin{array}{l}x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $[5\pi; 6\pi]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $[5\pi; 6\pi]$ лежат точки $\frac{21\pi}{4}$; $\frac{11\pi}{2}$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№13.2 (Центр)

а) Решите уравнение $\sin^2 x + \cos^2\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{1}{2}$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\dfrac{13\pi}{2}; \dfrac{15\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) πk; $\dfrac{\pi}{4} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{29\pi}{4}$; 7π.

Решение. а) Воспользуемся формулой косинуса суммы:

$$\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos x \cdot \cos\frac{\pi}{4} - \sin x \cdot \sin\frac{\pi}{4} =$$
$$= \cos x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \sin x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos x - \sin x).$$

Тогда наше уравнение примет вид:

$$\sin^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$
$$\sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot (\cos x - \sin x)\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\left(\cos^2 x - 2\cos x \cdot \sin x + \sin^2 x\right) = \frac{1}{2}.$$

Поскольку по ОТТ имеем $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, то получим:

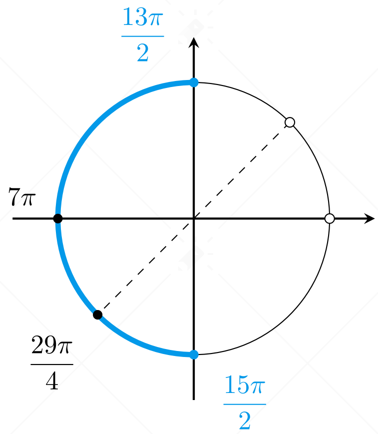
$$\sin^2 x + \frac{1}{2}(1 - 2\sin x \cdot \cos x) = \frac{1}{2}$$
$$2\sin^2 x + 1 - 2\sin x \cdot \cos x = 1$$
$$2\sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x = 0$$
$$2\sin x(\sin x - \cos x) = 0$$
$$\left[\begin{aligned} &\sin x = 0 \\ &\sin x - \cos x = 0 \end{aligned}\right.$$

Заметим, что второе равенство не обращается в верное при $\sin x = 0$, а значит, на $\sin x$ можно разделить:

$$\left[\begin{aligned} &\sin x = 0 \\ &\operatorname{ctg} x = 1 \end{aligned}\right.$$
$$\left[\begin{aligned} &x = \pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \frac{\pi}{4} + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}\right.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[\frac{13\pi}{2}; \frac{15\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[\frac{13\pi}{2}; \frac{15\pi}{2}\right]$ лежат точки $\frac{29\pi}{4}$; 7π.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№13.3 (Дальний Восток, не подтверждено)

а) Решите уравнение $\log_2(\sin 2x) = \log_2\left(\sqrt{2}\cos x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\pi; \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $\dfrac{\pi}{4}$.

Решение. а) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = \sqrt{2}\cos x \\ \sqrt{2}\cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin x \cos x = \sqrt{2}\cos x \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

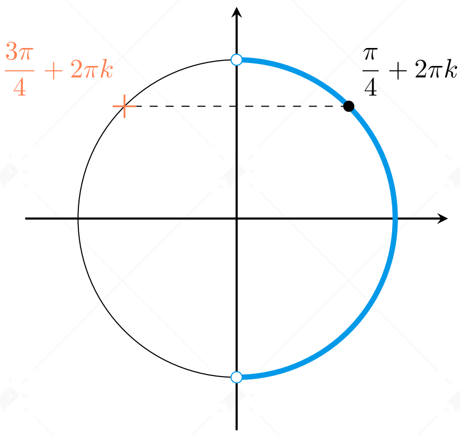
$$\begin{cases} \cos x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin x - \sqrt{2} = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} &x = \dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ &x = \dfrac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}\right. \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

Выделим на окружности промежуток, на котором $\cos x > 0$ и отметим полученные серии:

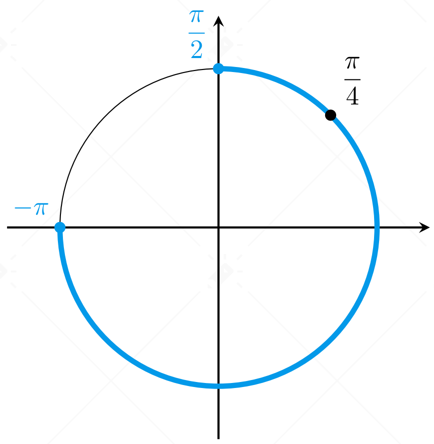


Значит,

$$x = \frac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-\pi; \frac{\pi}{2}\right]$ лежит только точка $\frac{\pi}{4}$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№13.4 (Дальний восток, не подтверждено)

а) Решите уравнение $\log_3(\sin 2x) = \log_3\left(\sqrt{3}\cos x\right)$.

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-3\pi; -\frac{3\pi}{2}\right]$.

Ответ: а) $\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$

б) $-\frac{5\pi}{3}$.

Решение. а) Уравнение равносильно системе

$$\begin{cases} \sin 2x = \sqrt{3}\cos x \\ \sqrt{3}\cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin x\cos x = \sqrt{3}\cos x \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

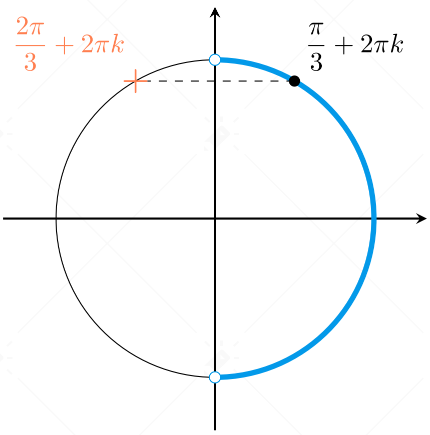
$$\begin{cases} \cos x\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin x - \sqrt{3} = 0 \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z} \end{array}\right. \\ \cos x > 0 \end{cases}$$

Выделим на окружности промежуток, на котором $\cos x > 0$ и отметим полученные серии:

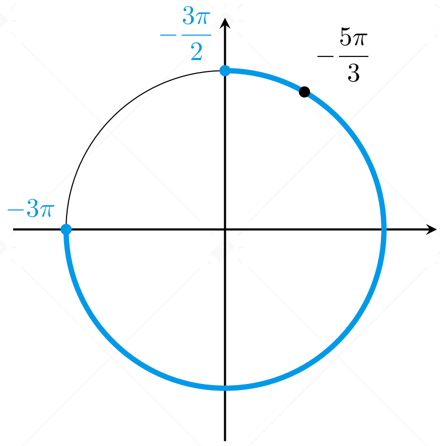


Значит,

$$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

б) Отберем корни на тригонометрической окружности. Для этого отметим на ней дугу, соответствующую отрезку $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$, концы этой дуги и лежащие на ней точки серий решений из пункта а).



Следовательно, на отрезке $\left[-3\pi; -\dfrac{3\pi}{2}\right]$ лежит точка $-\dfrac{5\pi}{3}$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №14. Решения

№14.1 (Центр)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K – середина ребра A_1B_1. Плоскость α проходит через точки A, K и C.

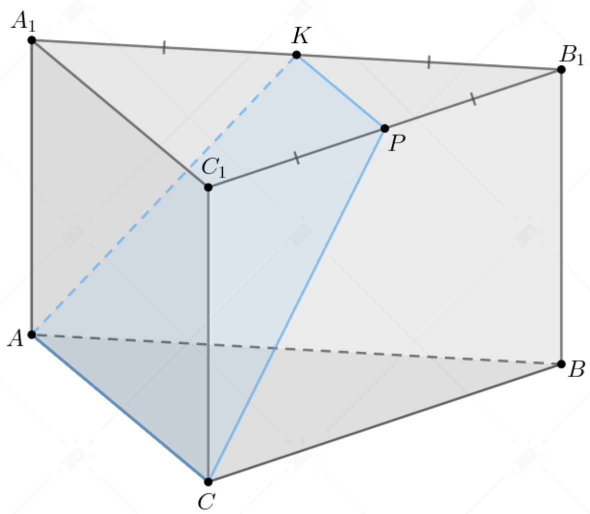
а) Докажите, что сечением призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения, если все ребра призмы равны 6.

Ответ: б) $\dfrac{36}{\sqrt{57}}$.

Решение. а) Построим сечение правильной треугольной призмы плоскостью α. Так как точки A и K лежат в одной грани, то можем их соединить. Аналогично для точек A и C. Так как верхняя и нижняя грани лежат в параллельных плоскостях, то плоскость α пересекает верхнюю грань по прямой, параллельной прямой AC. Пусть плоскость α пересекает ребро B_1C_1 в точке P, тогда $AC \parallel KP$. При этом так как $A_1C_1 \parallel AC$, то $KP \parallel A_1C_1$ и по теореме Фалеса точка P — середина ребра B_1C_1. Получили, что сечением призмы плоскостью α является четырехугольник $AKPC$.

Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник, следовательно $A_1K = KB_1 = C_1P = PB_1$.



По теореме Пифагора в прямоугольном $\triangle CC_1P$:

$$CP^2 = CC_1^2 + C_1P^2$$

По теореме Пифагора в прямоугольном $\triangle AA_1K$:

$$AK^2 = AA_1^2 + A_1K^2$$

А так как $AA_1 = CC_1$ и $A_1K = C_1P$, то получаем, что $AK = CP$.

Более того, KP является средней линией $\triangle A_1B_1C_1$, а значит, $KP = \dfrac{A_1C_1}{2} = \dfrac{AC}{2}$, то есть $KP \neq AC$ и $AKPC$ не является параллелограммом.

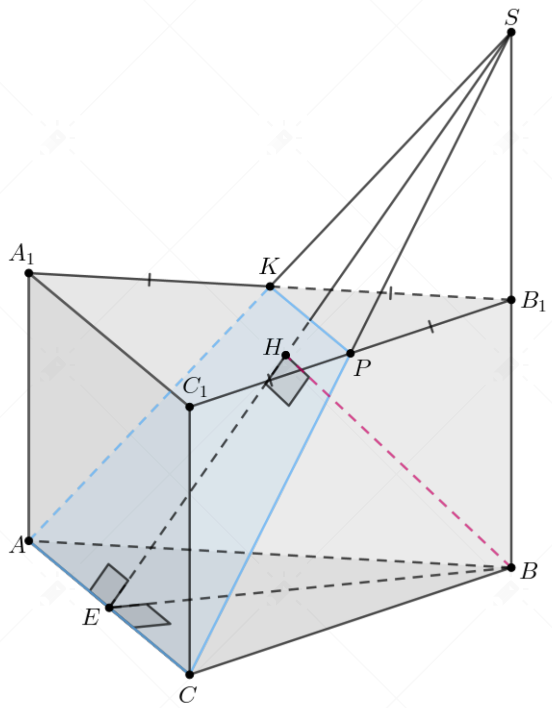
Тогда четырехугольник $AKPC$ является равнобедренной трапецией.

б) Продлим отрезки CP и AK за точки P и K соответственно до пересечения с продолжением ребра BB_1. По теореме о трех попарно пересекающихся плоскостях они пересекутся в одной точке. Обозначим её за S.

В $\triangle ABC$ опустим высоту BE. Тогда $BE \perp AC$. Более того, так как $SB \perp (ABC)$, то $SB \perp AC$. Следовательно, $AC \perp (SEB)$.

В $\triangle SBE$ опустим высоту BH. Получаем, что $BH \perp AC$ и $BH \perp SE$, а значит, $BH \perp \alpha$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ



Найдем длину BH.
Заметим, что $\triangle CSB \sim \triangle PSB_1$, так как $PB_1 \parallel CB$. Тогда

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{PB_1}{CB}$$
$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, $SB_1 = BB_1 = 6$.
Так как BE – высота правильного треугольника со стороной 6, то

$$BE = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

По теореме Пифагора для $\triangle SEB$:

$$SE^2 = SB^2 + EB^2$$
$$SE^2 = 12^2 + (3\sqrt{3})^2$$
$$SE^2 = 144 + 27$$
$$SE = \sqrt{171}$$

Можем найти BH как высоту в прямоугольном треугольнике:

$$BH = \frac{BS \cdot BE}{SE}$$
$$BH = \frac{12 \cdot 3\sqrt{3}}{\sqrt{171}} = \frac{36}{\sqrt{57}}$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№14.2 (Центр)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ точка K – середина ребра A_1B_1. Плоскость α проходит через точки A, K и C.

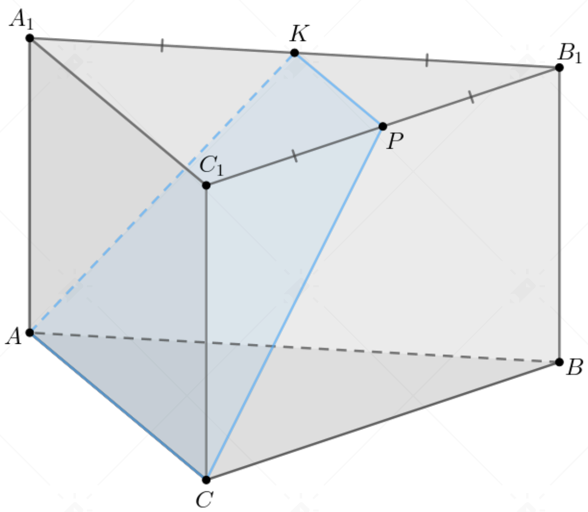
а) Докажите, что сечением призмы плоскостью α является равнобедренная трапеция.

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости сечения, если все ребра призмы равны 4.

Ответ: б) $\dfrac{8\sqrt{57}}{19}$.

Решение. а) Построим сечение правильной треугольной призмы плоскостью α. Так как точки A и K лежат в одной грани, то можем их соединить. Аналогично для точек A и C. Так как верхняя и нижняя грани лежат в параллельных плоскостях, то плоскость α пересекает верхнюю грань по прямой, параллельной прямой AC. Пусть плоскость α пересекает ребро B_1C_1 в точке P, тогда $AC \parallel KP$. При этом так как $A_1C_1 \parallel AC$, то $KP \parallel A_1C_1$ и по теореме Фалеса точка P — середина ребра B_1C_1. Получили, что сечением призмы плоскостью α является четырехугольник $AKPC$.

Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ — равносторонний треугольник, следовательно $A_1K = KB_1 = C_1P = PB_1$.



По теореме Пифагора в прямоугольном $\triangle CC_1P$:

$$CP^2 = CC_1^2 + C_1P^2$$

По теореме Пифагора в прямоугольном $\triangle AA_1K$:

$$AK^2 = AA_1^2 + A_1K^2$$

А так как $AA_1 = CC_1$ и $A_1K = C_1P$, то получаем, что $AK = CP$.

Более того, KP является средней линией $\triangle A_1B_1C_1$, а значит, $KP = \dfrac{A_1C_1}{2} = \dfrac{AC}{2}$, то есть $KP \neq AC$ и $AKPC$ не является параллелограммом.

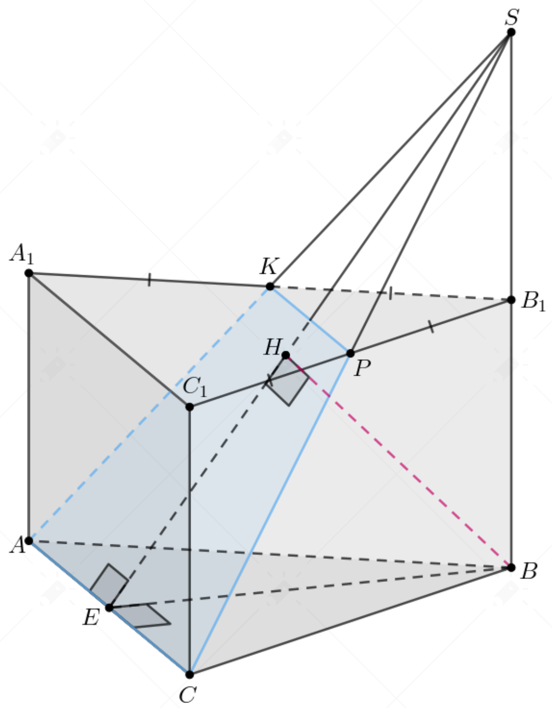
Тогда четырехугольник $AKPC$ является равнобедренной трапецией.

б) Продлим отрезки CP и AK за точки P и K соответственно до пересечения с продолжением ребра BB_1. По теореме о трех попарно пересекающихся плоскостях они пересекутся в одной точке. Обозначим её за S.

В $\triangle ABC$ опустим высоту BE. Тогда $BE \perp AC$. Более того, так как $SB \perp (ABC)$, то $SB \perp AC$. Следовательно, $AC \perp (SEB)$.

В $\triangle SBE$ опустим высоту BH. Получаем, что $BH \perp AC$ и $BH \perp SE$, а значит, $BH \perp \alpha$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ



Найдем длину BH.
Заметим, что $\triangle CSB \sim \triangle PSB_1$, так как $PB_1 \parallel CB$. Тогда

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{PB_1}{CB}$$

$$\frac{SB_1}{SB} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, $SB_1 = BB_1 = 4$.
Так как BE – высота правильного треугольника со стороной 4, то

$$BE = \frac{4\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

По теореме Пифагора для $\triangle SEB$:

$$SE^2 = SB^2 + EB^2$$

$$SE^2 = 8^2 + (2\sqrt{3})^2$$

$$SE^2 = 64 + 12$$

$$SE = 2\sqrt{19}$$

Можем найти BH как высоту в прямоугольном треугольнике:

$$BH = \frac{BS \cdot BE}{SE}$$

$$BH = \frac{8 \cdot 2\sqrt{3}}{2\sqrt{19}} = \frac{8\sqrt{57}}{19}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№14.3 (Сибирь)

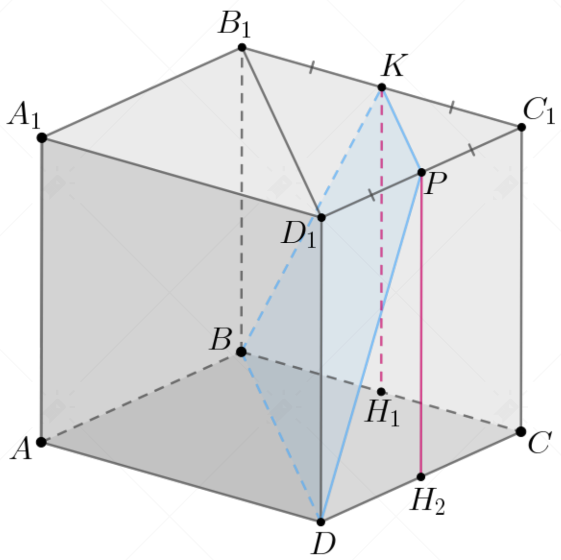
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра B_1C_1. Плоскость α проходит через точки B, K и D.

а) Докажите, что сечение куба плоскостью α является равнобедренной трапецией.

б) Найдите расстояние от точки C до плоскости α, если ребро куба равно 6.

Ответ: б) 2.

Решение. а) Построим сечение куба плоскостью α. Так как точки B и K лежат в одной грани, то можем их соединить. Аналогично для точек B и D. Так как верхняя и нижняя грани лежат в параллельных плоскостях, то плоскость α пересекает верхнюю грань по прямой, параллельной прямой BD. Пусть плоскость α пересекает ребро C_1D_1 в точке P, тогда $BD \parallel KP$. При этом так как в кубе $B_1D_1 \parallel BD$, то $KP \parallel B_1D_1$ и по теореме Фалеса точка P – середина ребра C_1D_1. Получили, что сечением куба плоскостью α является четырехугольник $BKPD$.



Из точек K и P опустим перпендикуляры на нижнюю грань куба. Пусть их основания H_1 и H_2 соответственно. Пусть ребро куба $2x$. Тогда

$$BH_1 = H_1C = CH_2 = H_2D = x.$$

По теореме Пифагора для треугольника BKH_1 :

$$BK^2 = KH_1^2 + BH_1^2$$
$$BK^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2$$

По теореме Пифагора для треугольника DPH_2 :

$$DP^2 = PH_2^2 + DH_2^2$$
$$DP^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2$$

Таким образом, $BK = DP$.

Заметим, что KP является средней линией $\triangle B_1C_1D_1$, а значит, $KP = \dfrac{B_1D_1}{2} = \dfrac{BD}{2}$, то есть $KP \neq BD$ и $BKPD$ не является параллелограммом.

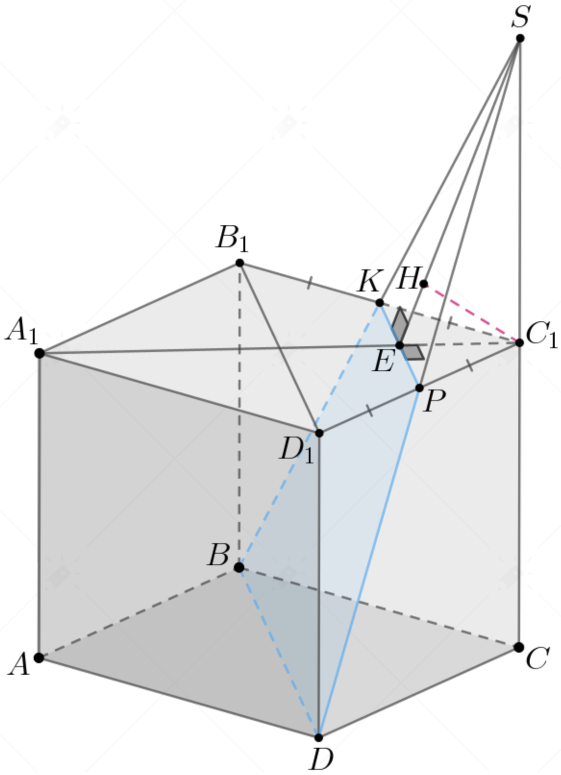
Следовательно, четырехугольник $BKPD$ является равнобедренной трапецией.

б) Продлим отрезки DP и BK за точки P и K соответственно до пересечения с продолжением ребра CC_1. По теореме о трех попарно пересекающихся плоскостях они пересекутся в одной точке. Обозначим её за S.

Проведем диагональ A_1C_1 верхней грани куба. Пусть она пересекает отрезок KP в точке E. Тогда $C_1E \perp KP$. Более того, $SC_1 \perp KP$, следовательно, $(SEC_1) \perp KP$.

В $\triangle SC_1E$ опустим высоту C_1H. Получаем, что $C_1H \perp KP$ и $C_1H \perp SE$, а значит, $C_1H \perp \alpha$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ



Найдем длину C_1H.
Заметим, что $\triangle DSC \sim \triangle PSC_1$, так как $PC_1 \parallel DC$. Тогда

$$\frac{SC_1}{SC} = \frac{PC_1}{DC}$$
$$\frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, $SC_1 = CC_1 = 6$.
Так как KP – средняя линия, то $EC_1 = \dfrac{A_1C_1}{4} = \dfrac{6\sqrt{2}}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$.
По теореме Пифагора для $\triangle SEC_1$:

$$SE^2 = SC_1^2 + EC_1^2$$
$$SE^2 = 36 + \frac{9}{2}$$
$$SE^2 = \frac{72+9}{2}$$
$$SE = \frac{9}{\sqrt{2}}.$$

Можем найти C_1H как высоту в прямоугольном треугольнике:

$$C_1H = \frac{C_1S \cdot C_1E}{SE}$$
$$C_1H = \frac{6 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2}}{\frac{9}{\sqrt{2}}} = 2.$$

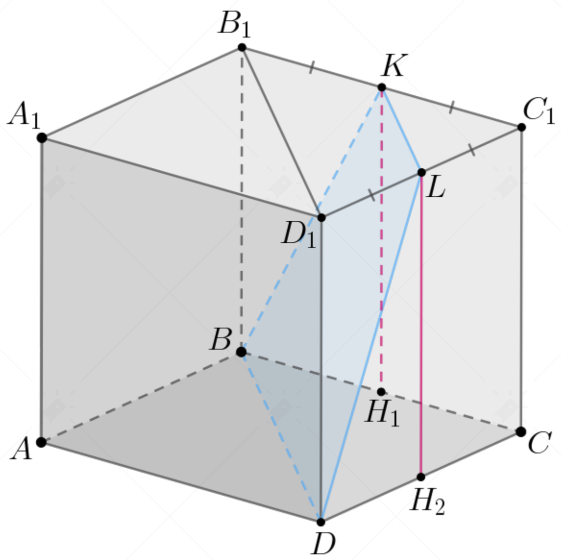
Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№14.4 (Сибирь)

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка K – середина ребра B_1C_1. Плоскость α проходит через точки B, K и D.
а) Докажите, что сечение куба плоскостью α является равнобедренной трапецией.
б) Найдите расстояние от точки C_1 до плоскости α, если ребро куба равно 3.

Ответ: б) 1.

Решение. а) Построим сечение куба плоскостью α. Так как точки B и K лежат в одной грани, то можем их соединить. Аналогично для точек B и D. Так как верхняя и нижняя грани лежат в параллельных плоскостях, то плоскость α пересекает верхнюю грань по прямой, параллельной прямой BD. Пусть плоскость α пересекает ребро C_1D_1 в точке L, тогда $BD \parallel KL$. При этом так как в кубе $B_1D_1 \parallel BD$, то $KL \parallel B_1D_1$ и по теореме Фалеса точка L – середина ребра C_1D_1. Получили, что сечением куба плоскостью α является четырехугольник $BKLD$.



Из точек K и L опустим перпендикуляры на нижнюю грань куба. Пусть их основания H_1 и H_2 соответственно. Пусть ребро куба $2x$. Тогда

$$BH_1 = H_1C = CH_2 = H_2D = x.$$

По теореме Пифагора для треугольника BKH_1 :

$$BK^2 = KH_1^2 + BH_1^2$$
$$BK^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2$$

По теореме Пифагора для треугольника DLH_2 :

$$DL^2 = LH_2^2 + DH_2^2$$
$$DL^2 = 4x^2 + x^2 = 5x^2$$

Таким образом, $BK = DL$.

Заметим, что KL является средней линией $\triangle B_1C_1D_1$, а значит, $KL = \dfrac{B_1D_1}{2} = \dfrac{BD}{2}$, то есть $KL \neq BD$ и $BKLD$ не является параллелограммом.

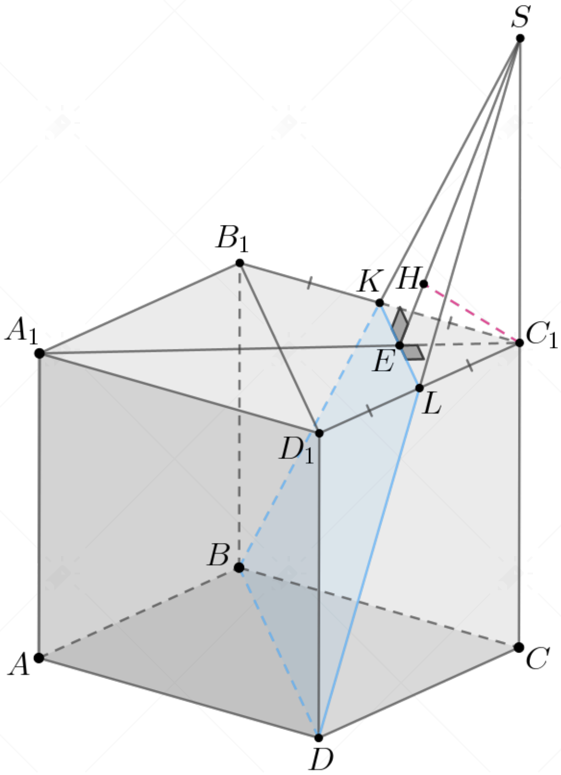
Следовательно, четырехугольник $BKLD$ является равнобедренной трапецией.

б) Продлим отрезки DL и BK за точки L и K соответственно до пересечения с продолжением ребра CC_1. По теореме о трех попарно пересекающихся плоскостях они пересекутся в одной точке. Обозначим её за S.

Проведем диагональ A_1C_1 верхней грани куба. Пусть она пересекает отрезок KL в точке E. Тогда $C_1E \perp KL$. Более того, $SC_1 \perp KL$, следовательно, $(SEC_1) \perp KL$.

В $\triangle SC_1E$ опустим высоту C_1H. Получаем, что $C_1H \perp KL$ и $C_1H \perp SE$, а значит, $C_1H \perp \alpha$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ



Найдем длину C_1H.
Заметим, что $\triangle DSC \sim \triangle LSC_1$, так как $LC_1 \parallel DC$. Тогда

$$\frac{SC_1}{SC} = \frac{LC_1}{DC}$$

$$\frac{SC_1}{SC} = \frac{1}{2}$$

Следовательно, $SC_1 = CC_1 = 3$.
Так как KL – средняя линия, то $EC_1 = \dfrac{A_1C_1}{4} = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.
По теореме Пифагора для $\triangle SEC_1$:

$$SE^2 = SC_1^2 + EC_1^2$$

$$SE^2 = 9 + \frac{9 \cdot 2}{16}$$

$$SE^2 = \frac{9 \cdot 18}{16}$$

$$SE = \frac{9\sqrt{2}}{4}$$

Можем найти C_1H как высоту в прямоугольном треугольнике:

$$C_1H = \frac{C_1S \cdot C_1E}{SE}$$

$$C_1H = \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{4}}{\frac{9\sqrt{2}}{4}} = 1$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№14.5 (Дальний Восток, не подтверждено)

В правильной треугольной призме $ABCA_1B_1C_1$ отметили точки M и K на ребрах AA_1 и A_1B_1 соответственно. Известно, что $AM = 3MA_1$, $A_1K = KB_1$. Через точки M и K провели плоскость α перпендикулярно грани ABB_1A_1.

а) Докажите, что плоскость α проходит через вершину C_1.

б) Найдите расстояние от точки A_1 до плоскости α, если все ребра призмы равны 16.

Ответ: б) $\dfrac{8\sqrt{5}}{5}$.

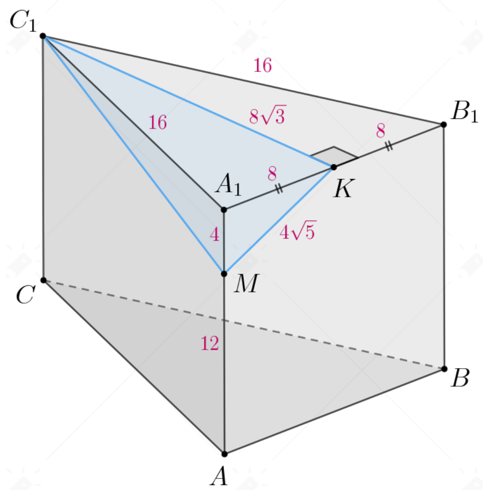
Решение.

а) Так как призма правильная, то $A_1B_1C_1$ – равносторонний треугольник. Следовательно, медиана C_1K является также и высотой треугольника $A_1B_1C_1$. Отсюда $KC_1 \perp A_1B_1$.

Также так как призма правильная, то $KC_1 \perp AA_1$.

Получили, что KC_1 перпендикулярна двум пересекающимся прямым из плоскости (ABB_1), следовательно, $KC_1 \perp (ABB_1)$.

Так как $\alpha \perp (ABB_1)$, $K \in \alpha$ и $KC_1 \perp (ABB_1)$, то $KC_1 \subset \alpha$. Что и требовалось доказать.



б) Так как все ребра призмы равны 16, то $MA_1 = 4, AM = 12, A_1K = KB_1 = 8$.

Пусть h – искомое расстояние от A_1 до плоскости α.

Применим метод объемов. Распишем объем пирамиды C_1A_1KM двумя способами:

$$\frac{1}{3} \cdot C_1K \cdot S_{A_1MK} = \frac{1}{3} \cdot h \cdot S_{C_1MK}$$

$$h = C_1K \cdot \frac{S_{A_1MK}}{S_{C_1MK}}$$

Так как $\triangle A_1MK$ – прямоугольный, то имеем:

$$S_{A_1MK} = \frac{1}{2} \cdot A_1M \cdot A_1K = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 8 = 16$$

Так как $C_1K \perp (ABB_1)$, то прямая C_1K перпендикулярна любой прямой из данной плоскости, в частности, $C_1K \perp MK$. Тогда $\triangle C_1MK$ – прямоугольный.

По теореме Пифагора для $\triangle A_1KC_1$:

$$C_1K^2 = A_1C_1^2 - A_1K^2$$
$$C_1K^2 = 16^2 - 8^2 = 3 \cdot 8^2$$
$$C_1K = 8\sqrt{3}$$

По теореме Пифагора для $\triangle A_1KM$:

$$KM^2 = A_1K^2 + A_1M^2$$
$$KM^2 = 8^2 + 4^2 = 5 \cdot 4^2$$
$$KM = 4\sqrt{5}$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Тогда площадь $\triangle C_1MK$ равна:

$$S_{C_1MK} = \frac{1}{2} \cdot C_1K \cdot KM = \frac{1}{2} \cdot 8\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{5} = 16\sqrt{15}$$

Теперь можем найти h :

$$h = C_1K \cdot \frac{S_{A_1MK}}{S_{C_1MK}} = 8\sqrt{3} \cdot \frac{16}{16\sqrt{15}} = \frac{8\sqrt{5}}{5}$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №15. Решения

№15.1 (Москва)

Решите неравенство $\dfrac{4}{\log_2 x} - \log_2\left(\dfrac{4}{x}\right) \leqslant \dfrac{38}{\log_2 x^2}$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{8}\right] \cup (1; 32]$.

Решение. Запишем ОДЗ неравенства

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x \neq 0 \\ \dfrac{4}{x} > 0 \\ x \neq 0 \\ \log_2 x^2 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Итоговая ОДЗ: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Преобразуем неравенство на ОДЗ, используя свойства логарифмов:

$$\frac{4}{\log_2 x} - (\log_2 4 - \log_2 x) \leqslant \frac{38}{2\log_2 x}$$

$$\frac{4}{\log_2 x} - 2 + \log_2 x \leqslant \frac{19}{\log_2 x}$$

Сделаем замену $\log_2 x = t$ и получим:

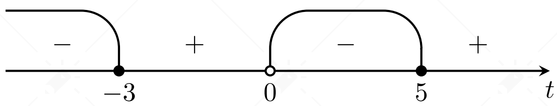
$$\frac{4}{t} - 2 + t \leqslant \frac{19}{t}$$

$$\frac{t^2 - 2t + 4 - 19}{t} \leqslant 0$$

$$\frac{t^2 - 2t - 15}{t} \leqslant 0$$

$$\frac{(t+3)(t-5)}{t} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Отсюда получаем $t \in (-\infty; -3] \cup (0; 5]$. Сделаем обратную замену

$$\left[\begin{aligned} &t \leqslant -3 \\ &0 < t \leqslant 5 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\log_2 x \leqslant -3 \\ &0 < \log_2 x \leqslant 5 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &0 < x \leqslant \frac{1}{8} \\ &\log_2 1 < \log_2 x \leqslant \log_2 32 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &0 < x \leqslant \frac{1}{8} \\ &1 < x \leqslant 32 \end{aligned}\right.$$

Таким образом, с учетом ОДЗ, получаем

$$x \in \left(0; \frac{1}{8}\right] \cup (1; 32].$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№15.2 (Центр)

Решите неравенство $\dfrac{9}{\log_3 x} - \log_3\left(\dfrac{9}{x}\right) \leqslant \dfrac{34}{\log_3 x^2}$.

Ответ: $\left(0; \dfrac{1}{9}\right] \cup (1; 81]$.

Решение. Запишем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_3 x \neq 0 \\ \dfrac{9}{x} > 0 \\ x \neq 0 \\ \log_3 x^2 \neq 0 \\ x^2 > 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Итоговая ОДЗ: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$.
Преобразуем неравенство на ОДЗ, используя свойства логарифмов:

$$\frac{9}{\log_3 x} - (\log_3 9 - \log_3 x) \leqslant \frac{34}{2\log_3 x}$$

$$\frac{9}{\log_3 x} - 2 + \log_3 x \leqslant \frac{17}{\log_3 x}$$

Сделаем замену $\log_3 x = t$ и получим:

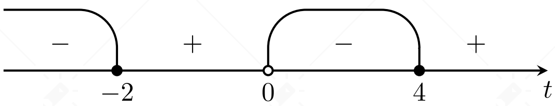
$$\frac{9}{t} - 2 + t \leqslant \frac{17}{t}$$

$$\frac{t^2 - 2t + 9 - 17}{t} \leqslant 0$$

$$\frac{t^2 - 2t - 8}{t} \leqslant 0$$

$$\frac{(t+2)(t-4)}{t} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Отсюда получаем $t \in (-\infty; -2] \cup (0; 4]$. Сделаем обратную замену:

$$\left[\begin{aligned} &t \leqslant -2 \\ &0 < t \leqslant 4 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\log_3 x \leqslant -2 \\ &0 < \log_3 x \leqslant 4 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &\log_3 x \leqslant \log_3 \frac{1}{9} \\ &\log_3 1 < \log_3 x \leqslant \log_3 81 \end{aligned}\right.$$

$$\left[\begin{aligned} &0 < x \leqslant \frac{1}{9} \\ &1 < x \leqslant 81 \end{aligned}\right.$$

Таким образом, с учетом ОДЗ получаем, получаем

$$x \in \left(0; \frac{1}{9}\right] \cup (1; 81].$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№15.3 (Сибирь)

Решите неравенство $(\log_{36} x + 1) \cdot \left(\dfrac{1}{\log_{36} x} + 1\right) \leqslant \log_{36} x$.

Ответ: $\left[\dfrac{1}{6}; 1\right)$.

Решение. Запишем ОДЗ неравенства

$$\begin{cases} x > 0 \\ \log_{36} x \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

Итоговая ОДЗ: $x \in (0; 1) \cup (1; +\infty)$. Сделаем замену $\log_{36} x = t$ и получим:

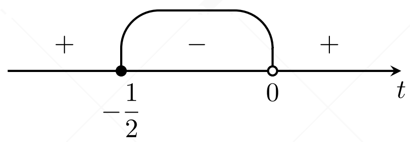
$$(t+1) \cdot \left(\frac{1}{t} + 1\right) \leqslant t$$

$$\frac{(t+1)^2}{t} - t \leqslant 0$$

$$\frac{t^2 + 2t + 1 - t^2}{t} \leqslant 0$$

$$\frac{2t+1}{t} \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Сделаем обратную замену и получим:

$$-\frac{1}{2} \leqslant t < 0$$

$$-\frac{1}{2} \leqslant \log_{36} x < 0$$

$$\log_{36} \frac{1}{6} \leqslant \log_{36} x < \log_{36} 1$$

$$\frac{1}{6} \leqslant x < 1$$

Таким образом,

$$x \in \left[\frac{1}{6}; 1\right)$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№15.4 (Дальний восток, не подтверждено)

Решите неравенство $\log_{x+1}\left(x^2-5x+7\right) \leqslant \log_{x+1} x$.

Ответ: $\left[3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2}\right]$.

Решение. Запишем ОДЗ неравенства:

$$\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 1 \\ x^2-5x+7>0 \\ x>0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x>-1 \\ x\neq 0 \\ x\in\mathbb{R} \\ x>0 \end{cases}$$

Отсюда получаем $x>0$.

Способ 1.

По методу рационализации исходное неравенство на ОДЗ равносильно неравенству

$$(x+1-1)\cdot\left(x^2-5x+7-x\right) \leqslant 0$$
$$x\cdot\left(x^2-6x+7\right) \leqslant 0$$

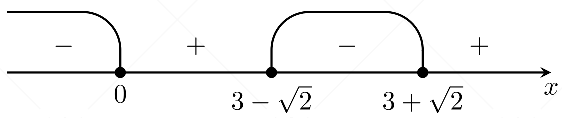
Найдем нули второй скобки:

$$x^2-6x+7=0$$
$$D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 7=36-28=8$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}=3\pm\sqrt{2}$$

Получаем итоговый вид неравенства:

$$x\cdot\left(x-3-\sqrt{2}\right)\left(x-3+\sqrt{2}\right) \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Пересекая с ОДЗ, получаем

$$x\in\left[3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2}\right].$$

Способ 2.

Перейдем от логарифмического неравенства к рациональному. Так как $x>0$, то основание логарифма $x+1>1$, значит, при переходе знак неравенства не изменится:

$$\log_{x+1}\left(x^2-5x+7\right) \leqslant \log_{x+1} x$$
$$x^2-5x+7 \leqslant x$$
$$x^2-6x+7 \leqslant 0$$

Найдем нули левой части:

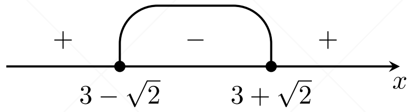
$$x^2-6x+7=0$$
$$D=(-6)^2-4\cdot 1\cdot 7=36-28=8$$
$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{8}}{2}=3\pm\sqrt{2}$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Получаем итоговый вид неравенства:

$$\left(x-3-\sqrt{2}\right)\left(x-3+\sqrt{2}\right) \leqslant 0$$

Решим полученное неравенство методом интервалов:



Таким образом, с учетом ОДЗ получаем

$$x \in \left[3-\sqrt{2}; 3+\sqrt{2}\right].$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №16. Решения

№16.1 (Москва)

В июне 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере 6,6 млн рублей. Условия его возврата таковы:
– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 6,6 млн рублей;
– выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
– к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат равна 12,6 млн рублей.

Ответ: 20.

Решение. Обозначим $p = 1 + \dfrac{r}{100}$. Пусть также x млн рублей – платеж в 2030 и 2031 годах. Составим таблицу выплат, все суммы будем указывать в млн рублей:

Год	Долг до %	Долг после %	Платеж	Долг после платежа
2027	6,6	$6{,}6p$	$6{,}6\cdot(p-1)$	6,6
2028	6,6	$6{,}6p$	$6{,}6\cdot(p-1)$	6,6
2029	6,6	$6{,}6p$	$6{,}6\cdot(p-1)$	6,6
2030	6,6	$6{,}6p$	x	$6{,}6p-x$
2031	$6{,}6p-x$	$(6{,}6p-x)\cdot p$	x	0

Так как после последнего платежа долг банку полностью выплачен, то получаем следующее уравнение:

$$(6{,}6p - x)\cdot p - x = 0$$
$$6{,}6p^2 - xp - x = 0$$
$$x = \frac{6{,}6p^2}{1+p}$$

Также по условию сумма выплат равна 12,6 млн рублей, то есть имеем:

$$3\cdot 6{,}6(p-1) + 2x = 12{,}6$$
$$198p - 198 + 20x = 126$$
$$198p + 20x = 324$$

Подставим x, полученное из предыдущего уравнения:

$$198p + \frac{132p^2}{1+p} = 324$$
$$198p^2 + 198p + 132p^2 - 324p - 324 = 0$$
$$330p^2 - 126p - 324 = 0$$
$$165p^2 - 63p - 162 = 0$$
$$D = 63^2 + 4\cdot 165\cdot 162 = 7^2\cdot 9^2 + 4\cdot 165\cdot 9^2\cdot 2 = 9^2\cdot(49+1320) = 9^2\cdot 37^2$$
$$p_{1,2} = \frac{63 \pm 333}{330}$$
$$p_1 = -\frac{9}{11};\quad p_2 = \frac{12}{10}$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Так как $p > 0$, то подходит только $p = \dfrac{12}{10}$. Отсюда получаем:

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{12}{10}$$

$$\frac{r}{100} = \frac{2}{10}$$

$$r = 20$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№16.2 (Центр)

В июне 2026 года планируется взять кредит в банке на пять лет в размере 4,2 млн рублей. Условия его возврата таковы:

– каждый январь долг возрастает на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
– в июле 2027, 2028 и 2029 годов долг остаётся равным 4,2 млн рублей;
– выплаты в 2030 и 2031 годах равны;
– к июлю 2031 года долг будет выплачен полностью.

Найдите r, если известно, что общая сумма выплат равна 6,1 млн рублей.

Ответ: 10.

Решение. Обозначим $p = 1 + \frac{r}{100}$. Пусть также x млн рублей – платеж в 2030 и 2031 годах. Составим таблицу выплат, все суммы будем указывать в млн рублей:

Год	Долг до %	Долг после %	Платеж	Долг после платежа
2027	4,2	$4{,}2p$	$4{,}2 \cdot (p-1)$	4,2
2028	4,2	$4{,}2p$	$4{,}2 \cdot (p-1)$	4,2
2029	4,2	$4{,}2p$	$4{,}2 \cdot (p-1)$	4,2
2030	4,2	$4{,}2p$	x	$4{,}2p - x$
2031	$4{,}2p - x$	$(4{,}2p - x) \cdot p$	x	0

Так как после последнего платежа долг банку полностью выплачен, то получаем следующее уравнение:

$$(4{,}2p - x) \cdot p - x = 0$$
$$4{,}2p^2 - xp - x = 0$$
$$x = \frac{4{,}2p^2}{1+p}$$

Также по условию сумма выплат равна 6,1 млн рублей, то есть имеем:

$$3 \cdot 4{,}2(p-1) + 2x = 6{,}1$$
$$126p - 126 + 20x = 61$$
$$126p + 20x = 187$$

Подставим x, полученное из предыдущего уравнения:

$$126p + \frac{84p^2}{1+p} = 187$$
$$126p^2 + 126p + 84p^2 - 187p - 187 = 0$$
$$210p^2 - 61p - 187 = 0$$
$$(10p - 11)(21p + 17) = 0$$
$$\left[\begin{aligned} &p = \frac{11}{10} \\ &p = -\frac{17}{21} \end{aligned}\right.$$

Так как $p > 0$, то подходит только $p = \frac{11}{10}$. Отсюда получаем:

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{11}{10}$$
$$\frac{r}{100} = \frac{1}{10}$$
$$r = 10$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№16.3 (Сибирь)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 300 000 рублей. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 260 000 рублей, а во второй год – 169 000 рублей.

Ответ: 30.

Решение. Пусть $p = 1 + \dfrac{r}{100}$. Составим таблицу выплат, все суммы будем указывать в тыс. рублей:

Год	Долг до %	Долг после %	Платеж	Долг после платежа
1	300	$300p$	260	$300p - 260$
2	$300p - 260$	$(300p - 260)\cdot p$	169	0

Из последней строчки получаем уравнение:

$$(300p - 260)\cdot p - 169 = 0$$
$$300p^2 - 260p - 169 = 0$$
$$\frac{D}{4} = 130^2 + 300\cdot 169 = 13^2\cdot 100 + 13^2\cdot 300 = 13^2\cdot 20^2$$
$$p_{1,2} = \frac{130 \pm 260}{300}$$
$$p_1 = -\frac{13}{30};\quad p_2 = \frac{13}{10}$$

Так как $p > 0$, то подходит только $p = \dfrac{13}{10}$. Отсюда получаем:

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{13}{10}$$
$$\frac{r}{100} = \frac{3}{10}$$
$$r = 30$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№16.4 (Сибирь)

В июле 2026 года планируется взять кредит в банке на сумму 250 000 рублей. Условия возврата таковы:
– каждый январь долг увеличивается на $r\%$ по сравнению с концом предыдущего года;
– с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.
Найдите r, если известно, что кредит будет полностью погашен за два года, причем в первый год будет выплачено 150 000 рублей, а во второй год – 180 000 рублей.

Ответ: 20.

Решение. Пусть $p = 1 + \frac{r}{100}$. Составим таблицу выплат, все суммы будем указывать в тыс. рублей:

Год	Долг до %	Долг после %	Платеж	Долг после платежа
1	250	$250p$	150	$250p - 150$
2	$250p - 150$	$(250p - 150) \cdot p$	180	0

Из последней строчки получаем уравнение:

$$(250p - 150) \cdot p - 180 = 0$$
$$250p^2 - 150p - 180 = 0$$
$$25p^2 - 15p - 18 = 0$$
$$D = (-15)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (-18) = 225 + 1800 = 2025 = 45^2$$
$$p_{1,2} = \frac{15 \pm 45}{50}$$
$$p_1 = -\frac{30}{50}; \quad p_2 = \frac{60}{50}$$

Так как $p > 0$, то подходит только $p = \frac{60}{50}$. Отсюда получаем:

$$1 + \frac{r}{100} = \frac{60}{50}$$
$$\frac{r}{100} = \frac{2}{10}$$
$$r = 20$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №17. Решения

№17.1 (Сибирь)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \dfrac{7}{25}$.

Ответ: б) $\dfrac{25}{36}$.

Решение. а) Пусть $AL \cap BC = H$.

AL – биссектриса угла BAC. Тогда

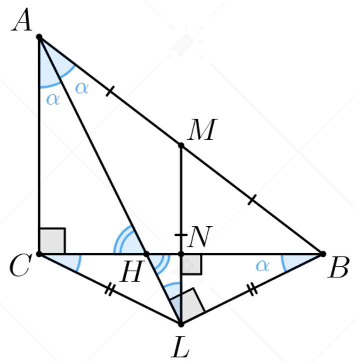
$$\angle BAL = \angle CAL = \alpha.$$

Точки M и N – середины сторон AB и BC, значит, MN – средняя линия треугольника ABC. Тогда $AC \parallel MN$. $\angle CAL = \angle MLA = \alpha$ как накрест лежащие при $AC \parallel ML$ и секущей AL. Тогда

$$\angle BAL = \alpha = \angle MLA.$$

В треугольнике AML углы MAL и MLA равны, значит, треугольник AML – равнобедренный, то есть $AM = ML$. Тогда

$$ML = AM = BM = \frac{AB}{2}.$$



Значит, в треугольнике ABL медиана ML равна половине стороны AB. Тогда треугольник ABL – прямоугольный, причём $\angle ALB = 90^\circ$.

Треугольники AHC и BHL подобны по двум углам, так как $\angle AHC = \angle BHL$ как вертикальные, $\angle ACH = \angle BLH = 90^\circ$. Тогда $\angle LBH = \angle CAH = \alpha$.

Так как $ML \parallel AC$, $AC \perp BC$, то $ML \perp BC$.

В треугольнике BLC высота LN совпадает с медианой, следовательно, треугольник BLC – равнобедренный. Тогда $\angle BCL = \angle LBC = \alpha$.

Треугольники AML и BLC подобны по двум углам, так как $\angle MAL = \angle MLA = \angle BCL = \angle LBC = \alpha$. Что и требовалось доказать.

б) Из условия имеем:

$$\cos\angle BAC = \cos 2\alpha = \frac{7}{25}.$$

По формуле косинуса двойного угла получаем:

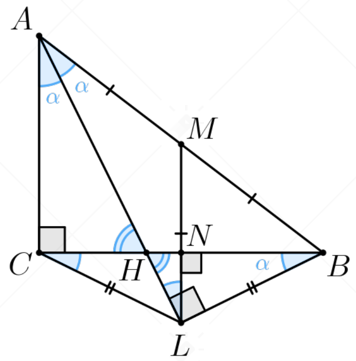
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\frac{7}{25} = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{9}{25}$$

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ



В прямоугольном треугольнике ABL имеем:

$$\frac{3}{5} = \sin\alpha = \frac{BL}{AB}.$$

M – середина AB, тогда $AB = 2AM$. Из этого получаем:

$$\frac{BL}{AB} = \frac{BL}{2AM} = \frac{3}{5}$$
$$\frac{BL}{AM} = \frac{6}{5}.$$

Коэффициент подобия треугольников AML и BLC равен:

$$k = \frac{AM}{BL} = \frac{5}{6}.$$

Площади подобных треугольников AML и BLC относятся как квадрат коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\triangle AML}}{S_{\triangle BLC}} = k^2 = \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№17.2 (Сибирь)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AB и катета BC соответственно. Биссектриса угла BAC пересекает прямую MN в точке L.

а) Докажите, что треугольники AML и BLC подобны.

б) Найдите отношение площадей этих треугольников, если $\cos\angle BAC = \dfrac{1}{9}$.

Ответ: б) $\dfrac{9}{16}$.

Решение. а) Пусть $AL \cap BC = H$.

AL – биссектриса угла BAC. Тогда

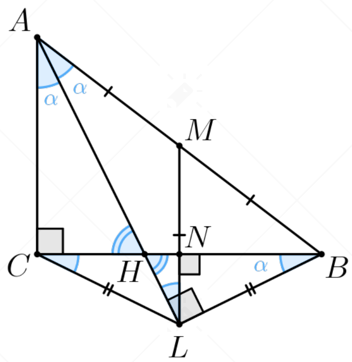
$$\angle BAL = \angle CAL = \alpha.$$

Точки M и N – середины сторон AB и BC, значит, MN – средняя линия треугольника ABC. Тогда $AC \parallel MN$. $\angle CAL = \angle MLA = \alpha$ как накрест лежащие при $AC \parallel ML$ и секущей AL. Тогда

$$\angle BAL = \alpha = \angle MLA.$$

В треугольнике AML углы MAL и MLA равны, значит, треугольник AML – равнобедренный, то есть $AM = ML$. Тогда

$$ML = AM = BM = \frac{AB}{2}.$$



Значит, в треугольнике ABL медиана ML равна половине стороны AB. Тогда треугольник ABL – прямоугольный, причём $\angle ALB = 90^\circ$.

Треугольники AHC и BHL подобны по двум углам, так как $\angle AHC = \angle BHL$ как вертикальные, $\angle ACH = \angle BLH = 90^\circ$. Тогда $\angle LBH = \angle CAH = \alpha$.

Так как $ML \parallel AC$, $AC \perp BC$, то $ML \perp BC$.

В треугольнике BLC высота LN совпадает с медианой, следовательно, треугольник BLC – равнобедренный. Тогда $\angle BCL = \angle LBC = \alpha$.

Треугольники AML и BLC подобны по двум углам, так как $\angle MAL = \angle MLA = \angle BCL = \angle LBC = \alpha$. Что и требовалось доказать.

б) Из условия имеем:

$$\cos\angle BAC = \cos 2\alpha = \frac{1}{9}.$$

По формуле косинуса двойного угла получаем:

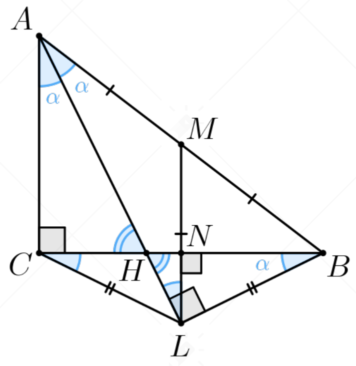
$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\frac{1}{9} = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin^2\alpha = \frac{4}{9}$$

$$\sin\alpha = \frac{2}{3}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ



В прямоугольном треугольнике ABL имеем:

$$\frac{2}{3} = \sin\alpha = \frac{BL}{AB}.$$

M – середина AB, тогда $AB = 2AM$. Из этого получаем:

$$\frac{BL}{AB} = \frac{BL}{2AM} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{BL}{AM} = \frac{4}{3}.$$

Коэффициент подобия треугольников AML и BLC равен:

$$k = \frac{AM}{BL} = \frac{3}{4}.$$

Площади подобных треугольников AML и BLC относятся как квадрат коэффициента подобия:

$$\frac{S_{\triangle AML}}{S_{\triangle BLC}} = k^2 = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№17.3 (Москва)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N – середины гипотенузы AC и катета BC соответственно. Точка K лежит на катете BC так, что $BK : KC = 1 : 3$.

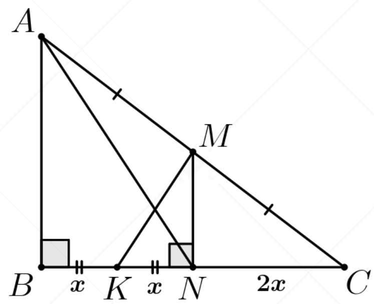
а) Докажите, что $AN = 2KM$.

б) Пусть P – точка пересечения отрезков AN и KM. Найдите длину отрезка прямой BP, заключенного внутри треугольника KMN, если $AB = 6$, $BC = 8$.

Ответ: б) $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Решение. а) Пусть $BC = 4x$. Так как $BK : KC = 1 : 3$, то $BK = x$, $KC = 3x$. Так как N — середина BC, то $BN = NC = 2x$. Тогда

$$KN = BN - BK = 2x - x = x.$$



Так как M и N — середины сторон AC и BC, то MN — средняя линия треугольника ABC. Тогда имеем:

$$MN \parallel AB, \quad MN = \frac{AB}{2}.$$

Тогда так как $AB \perp BC$, то $MN \perp BC$.

Рассмотрим треугольники ABN и MNK. Их углы ABN и MNK равны 90°. Также выполнено отношение:

$$\frac{BN}{KN} = \frac{2}{1} = \frac{AB}{MN}.$$

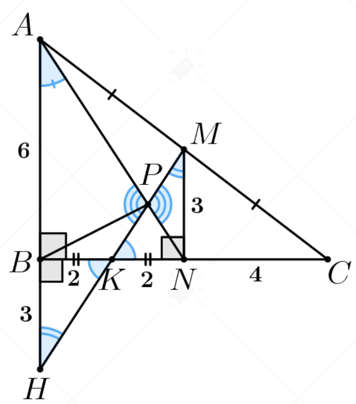
Значит, треугольники ABN и MNK подобны по углу и двум пропорциональным сторонам. Запишем для них отношение подобия:

$$\frac{AN}{KM} = \frac{BN}{KN} = \frac{2x}{x} = 2.$$

Таким образом, $AN = 2KM$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть $AB \cap MK = H$. Так как MN — средняя линия треугольника ABC, то

$$MN = \frac{AB}{2} = \frac{6}{2} = 3.$$



Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Из того, что $BC = 8$, имеем:

$$BK = KN = \frac{BC}{4} = \frac{8}{4} = 2$$

$$NC = \frac{BC}{2} = \frac{8}{2} = 4.$$

Треугольники MNK и HBK равны по стороне и двум прилежащим углам: $BK = KN$, $\angle MNK = \angle HBK = 90^\circ$, $\angle MKN = \angle BKH$ как вертикальные. Тогда равны их соответственные стороны:

$$BH = MN = 3.$$

Тогда

$$AH = AB + BH = 6 + 3 = 9.$$

По теореме Пифагора для треугольника ABN :

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{6^2 + 4^2} =$$
$$= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}.$$

Треугольники MNP и HAP подобны по двум углам, так как $\angle MPN = \angle APH$ как вертикальные, $\angle PMN = \angle PHA$ как накрест лежащие при $AB \parallel MN$ и секущей MH. Запишем отношение подобия:

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AH}{MN} = \frac{9}{3} = 3.$$

Тогда

$$AP = \frac{3AN}{4} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{13}}{4} = \frac{3\sqrt{13}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике ABN имеем:

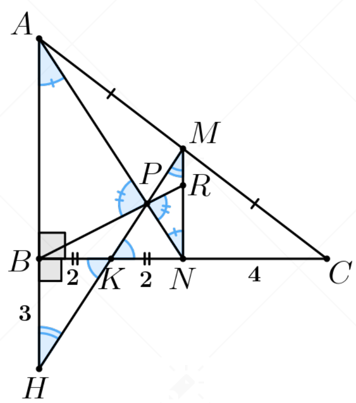
$$\cos\angle BAN = \frac{AB}{AN} = \frac{6}{2\sqrt{13}} = \frac{3}{\sqrt{13}}.$$

По теореме косинусов для треугольника ABP :

$$BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2 \cdot AB \cdot AP \cdot \cos\angle BAN$$

$$BP^2 = 36 + \frac{117}{4} - 2 \cdot 6 \cdot \frac{3\sqrt{13}}{2} \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$BP^2 = \frac{45}{4} \quad \Rightarrow \quad BP = \frac{3\sqrt{5}}{2}.$$



Треугольники ABP и NRP подобны по двум углам, так как $\angle APB = \angle NPR$ как вертикальные, $\angle BAP = \angle PNR$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

как накрест лежащие при $AB \parallel RN$ и секущей AN. Запишем отношение подобия:

$$\frac{BP}{PR} = \frac{AP}{PN} = 3$$

$$PR = \frac{BP}{3} = \frac{\frac{3\sqrt{5}}{2}}{3} = \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№17.4 (Москва)

В прямоугольном треугольнике ABC точки M и N — середины гипотенузы AC и катета BC соответственно. Точка K лежит на катете BC так, что $BK : KC = 1 : 3$.

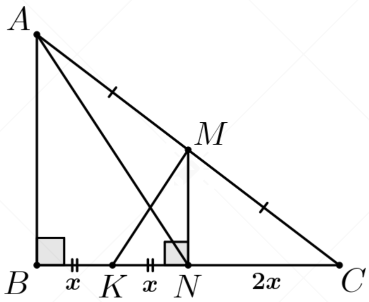
а) Докажите, что $AN = 2KM$.

б) Пусть P — точка пересечения отрезков AN и KM. Найдите длину отрезка прямой BP, заключенного внутри треугольника KMN, если $AB = 10$, $BC = 16$.

Ответ: б) $\dfrac{13}{6}$.

Решение. а) Пусть $BC = 4x$. Так как $BK : KC = 1 : 3$, то $BK = x$, $KC = 3x$. Так как N — середина BC, то $BN = NC = 2x$. Тогда

$$KN = BN - BK = 2x - x = x.$$



Так как M и N — середины сторон AC и BC, то MN — средняя линия треугольника ABC. Тогда имеем:

$$MN \parallel AB, \quad MN = \frac{AB}{2}.$$

Тогда так как $AB \perp BC$, то $MN \perp BC$.

Рассмотрим треугольники ABN и MNK. Их углы ABN и MNK равны 90°. Также выполнено отношение:

$$\frac{BN}{KN} = \frac{2}{1} = \frac{AB}{MN}.$$

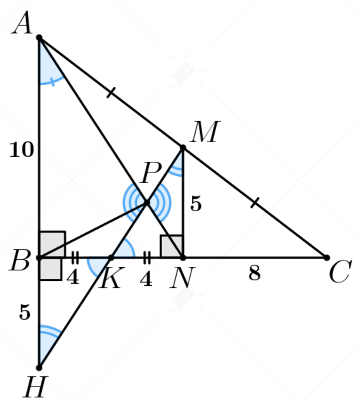
Значит, треугольники ABN и MNK подобны по углу и пропорциональным сторонам. Запишем для них отношение подобия:

$$\frac{AN}{KM} = \frac{BN}{KN} = \frac{2x}{x} = 2.$$

Таким образом, $AN = 2KM$. Что и требовалось доказать.

б) Пусть $AB \cap MK = H$. Так как MN — средняя линия треугольника ABC, то

$$MN = \frac{AB}{2} = \frac{10}{2} = 5.$$



Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Из того, что $BC = 16$, имеем:

$$BK = KN = \frac{BC}{4} = \frac{16}{4} = 4$$

$$NC = \frac{BC}{2} = \frac{16}{2} = 8.$$

Треугольники MNK и HBK равны по стороне и двум прилежащим углам: $BK = KN$, $\angle MNK = \angle HBK = 90^\circ$, $\angle MKN = \angle BKH$ как вертикальные. В них равны соответственные стороны:

$$BH = MN = 5.$$

Тогда

$$AH = AB + BH = 10 + 5 = 15.$$

По теореме Пифагора для треугольника ABN :

$$AN = \sqrt{AB^2 + BN^2} = \sqrt{10^2 + 8^2} =$$
$$= \sqrt{100 + 64} = \sqrt{164} = 2\sqrt{41}.$$

Треугольники MNP и HAP подобны по двум углам, так как $\angle MPN = \angle APH$ как вертикальные, $\angle PMN = \angle PHA$ как накрест лежащие при $AB \parallel MN$ и секущей MH. Запишем отношение подобия:

$$\frac{AP}{PN} = \frac{AH}{MN} = \frac{15}{5} = 3.$$

Тогда

$$AP = \frac{3AN}{4} = \frac{3 \cdot 2\sqrt{41}}{4} = \frac{3\sqrt{41}}{2}.$$

В прямоугольном треугольнике ABN имеем:

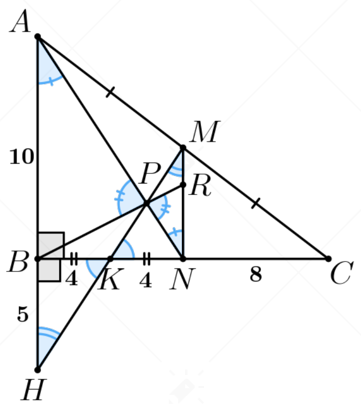
$$\cos\angle BAN = \frac{AB}{AN} = \frac{10}{2\sqrt{41}} = \frac{5}{\sqrt{41}}.$$

По теореме косинусов для треугольника ABP :

$$BP^2 = AB^2 + AP^2 - 2 \cdot AB \cdot AP \cdot \cos\angle BAN$$

$$BP^2 = 100 + \frac{369}{4} - 2 \cdot 10 \cdot \frac{3\sqrt{41}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{41}}$$

$$BP^2 = \frac{169}{4} \quad \Rightarrow \quad BP = \frac{13}{2}.$$



Пусть R — точка пересечения прямой BP с MN. Тогда по условию необходимо найти PR.
Треугольники ABP и NRP подобны по двум углам, так как $\angle APB = \angle NPR$ как вертикальные, $\angle BAP = \angle PNR$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

как накрест лежащие при $AB \parallel RN$ и секущей AN. Запишем отношение подобия:

$$\frac{BP}{PR} = \frac{AP}{PN} = 3$$

$$PR = \frac{BP}{3} = \frac{\frac{13}{2}}{3} = \frac{13}{6}.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №18. Решения

№18.1 (Дальний восток, не подтверждено)

Найдите все значения параметра a, при каждом их которых система

$$\begin{cases} |x-a|+|y|=2 \\ y=\sqrt{4-x^2} \end{cases}$$

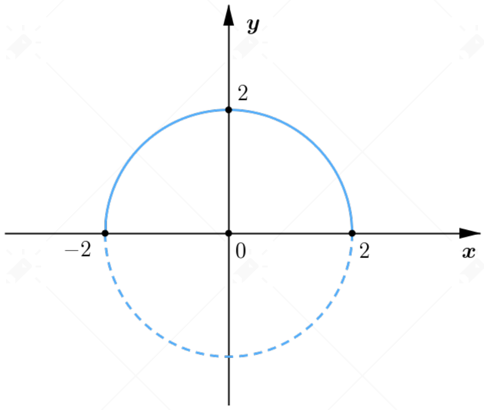
имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \left[-4; 2-2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2+2\sqrt{2}; 4\right]$.

Решение. Преобразуем второе уравнение системы, возведя его в квадрат при условии, что $y \geqslant 0$:

$$y^2 = 4 - x^2$$
$$x^2 + y^2 = 4$$

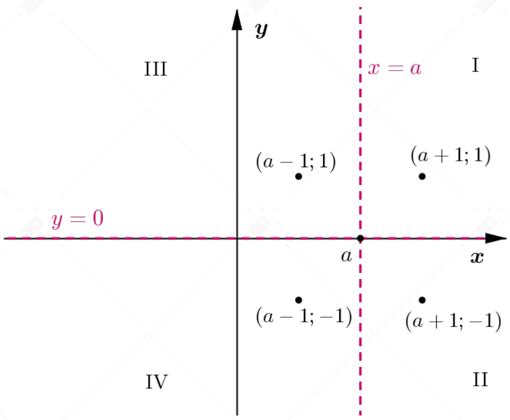
Получаем окружность с центром в точке $(0;0)$ и радиусом 2. Изобразим данную окружность при условии $y \geqslant 0$:



Рассмотрим первое уравнение системы. Найдем нули подмодульных выражений:

$$x - a = 0 \qquad y = 0$$
$$x = a$$

Нарисуем данные прямые. Они разбивают плоскость на 4 области. Подставляем точки из разных областей, например, точки $(a+1;1)$, $(a+1;-1)$, $(a-1;1)$, $(a-1;-1)$, и определяем знаки, с которыми будут раскрываться модули:



Точка	Область	Знаки
$(a+1;1)$	I	$++$
$(a+1;-1)$	II	$+-$
$(a-1;1)$	III	$-+$
$(a-1;-1)$	IV	$--$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

- Раскроем модули на области I :

$$x - a + y = 2$$
$$y = -x + 2 + a$$

Получили убывающую прямую. Найдем координаты точек пересечения с прямыми $x = a,\ y = 0$:

$$y = -a + 2 + a \qquad 0 = -x + 2 + a$$
$$y = 2 \qquad x = 2 + a$$

Следовательно, прямая проходит через точки $(a; 2),\ (2 + a; 0)$.

- Раскроем модули на области II :

$$x - a - y = 2$$
$$y = x - 2 - a$$

Получили возрастающую прямую. Найдем координаты точек пересечения с прямыми $x = a,\ y = 0$:

$$y = a - 2 - a \qquad 0 = x - 2 - a$$
$$y = -2 \qquad x = 2 + a$$

Следовательно, прямая проходит через точки $(a; -2),\ (2 + a; 0)$.

- Раскроем модули на области III :

$$-x + a + y = 2$$
$$y = x + 2 - a$$

Получили возрастающую прямую. Найдем координаты точек пересечения с прямыми $x = a,\ y = 0$:

$$y = a + 2 - a \qquad 0 = x + 2 - a$$
$$y = 2 \qquad x = a - 2$$

Следовательно, прямая проходит через точки $(a; 2),\ (a - 2; 0)$.

- Раскроем модули на области IV :

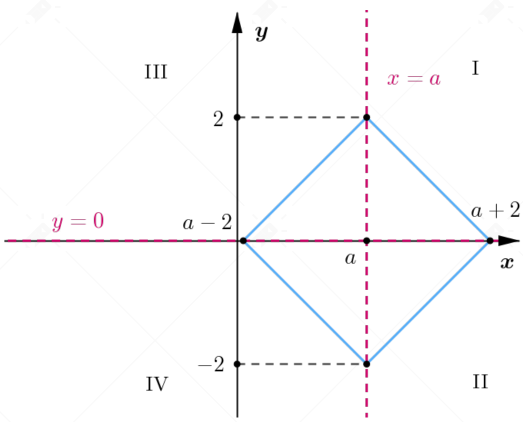
$$-x + a - y = 2$$
$$y = -x - 2 + a$$

Получили убывающую прямую. Найдем координаты точек пересечения с прямыми $x = a,\ y = 0$:

$$y = -a - 2 + a \qquad 0 = -x - 2 + a$$
$$y = -2 \qquad x = a - 2$$

Следовательно, прямая проходит через точки $(a; -2),\ (a - 2; 0)$.

Изобразим данные прямые:



Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

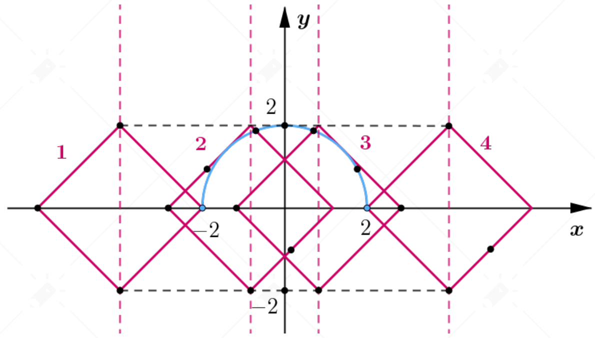
Получаем ромб, вершины которого двигаются в зависимости от параметра a. Начнем двигать данный ромб, получая граничные случаи.

- **Случай 1**. Правая вершина ромба проходит через точку $(-2;0)$. Так как правая вершина ромба имеет координаты $(a+2;0)$, то получаем уравнение

$$a+2=-2$$
$$a=-4$$

  В данном положении ромб имеет одну точку пересечения. До случая **1** ромб не имеет общих точек с полуокружностью.

- **Случай 2**. Прямая из области III, имеющая уравнение $y=x+2-a$, касается полуокружности. В данном положении ромб имеет 2 точки пересечения с полуокружностью. Между случаями **1** и **2** ромб имеет одну точку пересечения.



- **Случай 3**. Прямая из области I, имеющая уравнение $y=-x+2+a$, касается полуокружности. В данном положении ромб имеет 2 точки пересечения с полуокружностью. Между случаями **2** и **3** ромб имеет более одной точки пересечения.

- **Случай 4**. Левая вершина ромба проходит через точку $(2;0)$. Так как левая вершина ромба имеет координаты $(a-2;0)$, то получаем уравнение

$$a-2=2$$
$$a=4$$

  В данном положении ромб имеет одну точку пересечения. После случая **4** ромб не имеет общих точек с полуокружностью.

Найдем, при каком значении параметра a происходит случай **2**. Для этого необходимо, чтобы данная система имела единственное решение:

$$\begin{cases} y=x+2-a \\ x^2+y^2=4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y=x+2-a \\ x^2+(x+2-a)^2=4 \end{cases}$$

Найдем значения параметра, при котором квадратное уравнение имеет единственное решение:

$$x^2+(x+2-a)^2=4$$
$$2x^2+x(4-2a)+a^2-4a=0$$
$$D=-4a^2+16a+16=0$$
$$a_{1,2}=2\pm2\sqrt{2}$$

Заметим, что при $a=2+2\sqrt{2}$ касание происходит с несуществующей частью окружности, значит, случай **2** достигается при $a=2-2\sqrt{2}$.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Найдем, при каком значении параметра a происходит случай **3**. Для этого необходимо, чтобы данная система имела единственное решение:

$$\begin{cases} y = -x + 2 + a \\ x^2 + y^2 = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -x + 2 + a \\ x^2 + (-x + 2 + a)^2 = 4 \end{cases}$$

Найдем значения параметра, при котором квадратное уравнение имеет единственное решение:

$$x^2 + (-x + 2 + a)^2 = 4$$
$$2x^2 - x(4 + 2a) + a^2 + 4a = 0$$
$$D = -4a^2 - 16a + 16 = 0$$
$$a_{3,4} = -2 \pm 2\sqrt{2}$$

Заметим, что при $a = -2 - 2\sqrt{2}$ касание происходит с несуществующей частью окружности, значит, случай **3** достигается при $a = -2 + 2\sqrt{2}$.
Таким образом, исходная система имеет ровно одно решение при

$$a \in \left[-4; 2 - 2\sqrt{2}\right) \cup \left(-2 + 2\sqrt{2}; 4\right].$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№18.2 (Центр)

Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|x|}+6|x|+7=5y+6x^2-a \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Ответ: $a\in\{-7\}$.

Решение. Заметим, что второе уравнение системы задает окружность, которая симметрична относительно оси ординат, так как при замене x на $-x$ уравнение не меняется. При этом данная окружность имеет радиус 1, следовательно, она определена при $x\in[-1;1]$.

Рассмотрим первое уравнение системы. Заметим, что график этого уравнения также симметричен относительно оси ординат, так как при замене x на $-x$ уравнение не меняется.

Из вышесказанного получаем, что если график первого уравнения имеет точку пересечения с окружностью при $x\in(0;1]$, то будет существовать еще одна точка пересечения при $x\in[-1;0)$. Значит, существует единственный случай, когда система может иметь единственное решение: если точка пересечения графиков имеет абсциссу $x=0$.

Подставим данное значение в систему:

$$\begin{cases} 5\cdot 2^{|0|}+6\cdot|0|+7=5y+6\cdot 0^2-a \\ 0^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5+7=5y-a \\ y^2=1 \end{cases}$$

Тогда при $y=1$ получаем:

$$12=5\cdot 1-a$$
$$a=-7$$

При $y=-1$ получаем:

$$12=5\cdot(-1)-a$$
$$a=-17$$

Необходимо понять, действительно ли при данных значениях параметра a система будет иметь единственное решение. Подставим $a=-17$ в первое уравнение системы. Пусть $x\in(0;1]$, тогда $|x|=x$. Получим:

$$5\cdot 2^x+6x+7=5y+6x^2+17$$
$$5\cdot 2^x+6x=5y+6x^2+10$$

Заметим, что при $x=1$ получаем:

$$10+6=5y+6+10$$
$$5y=0$$
$$y=0$$

Значит, при $a=-17$ первому уравнению системы удовлетворяет точка $(1;0)$, которая, в свою очередь, лежит на окружности. Следовательно, решением системы также будет являться точка $(-1;0)$. Значит, при $a=-17$ система имеет более одного решения.

Подставим $a=-7$ в первое уравнение системы. Пусть $x\in(0;1]$, тогда

$$5\cdot 2^x+6x+7=5y+6x^2+7$$
$$y=\frac{5\cdot 2^x+6x-6x^2}{5}=2^x+\frac{6}{5}x-\frac{6}{5}x^2$$

Так как $x\in(0;1]$, то $\frac{6}{5}x\geqslant\frac{6}{5}x^2$, следовательно, $\frac{6}{5}x-\frac{6}{5}x^2\geqslant 0$. При этом $2^x>1$. Тогда

$$y=2^x+\frac{6}{5}x-\frac{6}{5}x^2>1$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Значит, у графика первого уравнения есть единственная точка пересечения с окружностью — точка $(0;1)$, следовательно, $a=-7$ является ответом.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№18.3 (Центр)

Найдите все значения параметра a, при каждом их которых система

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|x|}+5|x|+4=3y+5x^2+3a,\\ x^2+y^2=1\end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a\in\left\{\dfrac{4}{3}\right\}$.

Решение. Заметим, что второе уравнение системы задает окружность, которая симметрична относительно оси ординат, так как при замене x на $-x$ уравнение не меняется. При этом данная окружность имеет радиус 1, следовательно, она определена при $x\in[-1;1]$.

Рассмотрим первое уравнение системы. Заметим, что график этого уравнения также симметричен относительно оси ординат, так как при замене x на $-x$ уравнение не меняется.

Из вышесказанного получаем, что если график первого уравнения имеет точку пересечения с окружностью при $x\in(0;1]$, то будет существовать еще одна точка пересечения при $x\in[-1;0)$. Значит, существует единственный случай, когда система может иметь единственное решение: если точка пересечения графиков имеет абсциссу $x=0$. Подставим данное значение в систему:

$$\begin{cases}3\cdot 2^{|0|}+5\cdot|0|+4=3y+5\cdot 0^2+3a\\ 0^2+y^2=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}3+4=3y+3a\\ y^2=1\end{cases}$$

Тогда при $y=1$ получаем:

$$7=3\cdot 1+3a$$

$$a=\frac{4}{3}$$

При $y=-1$ получаем:

$$7=3\cdot(-1)+3a$$

$$a=\frac{10}{3}$$

Необходимо понять, действительно ли при данных значениях параметра a система будет иметь единственное решение. Подставим $a=\dfrac{10}{3}$ в первое уравнение системы. Пусть $x\in(0;1]$, тогда $|x|=x$. Получим:

$$3\cdot 2^x+5x+4=3y+5x^2+10$$

$$3\cdot 2^x+5x=3y+5x^2+6$$

Заметим, что при $x=1$ получаем:

$$6+5=3y+5+6$$

$$3y=0$$

$$y=0$$

Значит, при $a=\dfrac{10}{3}$ первому уравнению системы удовлетворяет точка $(1;0)$, которая, в свою очередь, лежит на окружности. Следовательно, решением системы также будет являться точка $(-1;0)$. Значит, при $a=\dfrac{10}{3}$ система имеет более одного решения.

Подставим $a=\dfrac{4}{3}$ в первое уравнение системы. Пусть $x\in(0;1]$, тогда

$$3\cdot 2^x+5x+4=3y+5x^2+4$$

$$y=\frac{3\cdot 2^x+5x-5x^2}{3}=2^x+\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}x^2$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Так как $x \in (0;1]$, то $\frac{5}{3}x \geqslant \frac{5}{3}x^2$, следовательно, $\frac{5}{3}x - \frac{5}{3}x^2 \geqslant 0$. При этом $2^x > 1$. Тогда

$$y = 2^x + \frac{5}{3}x - \frac{5}{3}x^2 > 1$$

Значит, у графика первого уравнения есть единственная точка пересечения с окружностью — точка $(0;1)$. Следовательно, $a = \frac{4}{3}$ является ответом.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№18.4 (Москва)

Найдите все значения параметра a, при каждом их которых система

$$\begin{cases} 6\cdot 2^{|x|}+7|x|+1=6y+7x^2+a, \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a\in\{1\}$.

Решение. Заметим, что второе уравнение системы задает окружность, которая симметрична относительно оси ординат, так как при замене x на $-x$ уравнение не меняется. При этом данная окружность имеет радиус 1, следовательно, она определена при $x\in[-1;1]$.

Рассмотрим первое уравнение системы. Заметим, что график этого уравнения также симметричен относительно оси ординат, так как при замене x на $-x$ уравнение не меняется.

Из вышесказанного получаем, что если график первого уравнения имеет точку пересечения с окружностью при $x\in(0;1]$, то будет существовать еще одна точка пересечения при $x\in[-1;0)$. Значит, существует единственный случай, когда система может иметь единственное решение: если точка пересечения графиков имеет абсциссу $x=0$.

Подставим данное значение в систему:

$$\begin{cases} 6\cdot 2^{|0|}+7\cdot|0|+1=6y+7\cdot 0^2+a \\ 0^2+y^2=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6+1=6y+a \\ y^2=1 \end{cases}$$

Тогда при $y=1$ получаем:

$$7=6\cdot 1+a$$
$$a=1$$

При $y=-1$ получаем:

$$7=6\cdot(-1)+a$$
$$a=13$$

Необходимо понять, действительно ли при данных значениях параметра a система будет иметь единственное решение. Подставим $a=13$ в первое уравнение системы. Пусть $x\in(0;1]$, тогда $|x|=x$. Получим:

$$6\cdot 2^x+7x+1=6y+7x^2+13$$
$$6\cdot 2^x+7x=6y+7x^2+12$$

Заметим, что при $x=1$ получаем:

$$12+7=6y+7+12$$
$$6y=0$$
$$y=0$$

Значит, при $a=13$ первому уравнению системы удовлетворяет точка $(1;0)$, которая, в свою очередь, лежит на окружности. Следовательно, решением системы также будет являться точка $(-1;0)$. Значит, при $a=13$ система имеет более одного решения.

Подставим $a=1$ в первое уравнение системы. Пусть $x\in(0;1]$, тогда

$$6\cdot 2^x+7x+1=6y+7x^2+1$$
$$y=\frac{6\cdot 2^x+7x-7x^2}{6}=2^x+\frac{7}{6}x-\frac{7}{6}x^2$$

Так как $x\in(0;1]$, то $\frac{7}{6}x\geqslant\frac{7}{6}x^2$, следовательно, $\frac{7}{6}x-\frac{7}{6}x^2\geqslant 0$. При этом $2^x>1$. Тогда

$$y=2^x+\frac{7}{6}x-\frac{7}{6}x^2>1$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Значит, у графика первого уравнения есть единственная точка пересечения с окружностью — точка $(0; 1)$. Следовательно, $a = 1$ является ответом.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№18.5 (Москва)

Найдите все значения параметра a, при каждом их которых система

$$\begin{cases} 2^{|x|+3} + 7|x| + 1 = 8y + 7x^2 + a, \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

имеет ровно одно решение.

Ответ: $a \in \{1\}$.

Решение. Заметим, что второе уравнение системы задает окружность, которая симметрична относительно оси ординат, так как при замене x на $-x$ уравнение не меняется. При этом данная окружность имеет радиус 1, следовательно, она определена при $x \in [-1; 1]$.

Рассмотрим первое уравнение системы. Заметим, что график этого уравнения также симметричен относительно оси ординат, так как при замене x на $-x$ уравнение не меняется.

Из вышесказанного получаем, что если график первого уравнения имеет точку пересечения с окружностью при $x \in (0; 1]$, то будет существовать еще одна точка пересечения при $x \in [-1; 0)$. Значит, существует единственный случай, когда система может иметь единственное решение: если точка пересечения графиков имеет абсциссу $x = 0$.

Подставим данное значение в систему:

$$\begin{cases} 8 \cdot 2^{|0|} + 7 \cdot |0| + 1 = 8y + 7 \cdot 0^2 + a \\ 0^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 8 + 1 = 8y + a \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

Тогда при $y = 1$ получаем:

$$9 = 8 \cdot 1 + a$$
$$a = 1$$

При $y = -1$ получаем:

$$9 = 8 \cdot (-1) + a$$
$$a = 17$$

Необходимо понять, действительно ли при данных значениях параметра a система будет иметь единственное решение. Подставим $a = 17$ в первое уравнение системы. Пусть $x \in (0; 1]$, тогда $|x| = x$. Получим:

$$8 \cdot 2^x + 7x + 1 = 8y + 7x^2 + 17$$
$$8 \cdot 2^x + 7x = 8y + 7x^2 + 16$$

Заметим, что при $x = 1$ получаем:

$$16 + 7 = 8y + 7 + 16$$
$$8y = 0$$
$$y = 0$$

Значит, при $a = 17$ первому уравнению системы удовлетворяет точка $(1; 0)$, которая, в свою очередь, лежит на окружности. Следовательно, решением системы также будет являться точка $(-1; 0)$. Значит, при $a = 17$ система имеет более одного решения.

Подставим $a = 1$ в первое уравнение системы. Пусть $x \in (0; 1]$, тогда

$$8 \cdot 2^x + 7x + 1 = 8y + 7x^2 + 1$$
$$y = \frac{8 \cdot 2^x + 7x - 7x^2}{8} = 2^x + \frac{7}{8}x - \frac{7}{8}x^2$$

Так как $x \in (0; 1]$, то $\frac{7}{8}x \geqslant \frac{7}{8}x^2$, следовательно, $\frac{7}{8}x - \frac{7}{8}x^2 \geqslant 0$. При этом $2^x > 1$. Тогда

$$y = 2^x + \frac{7}{8}x - \frac{7}{8}x^2 > 1$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Значит, у графика первого уравнения есть единственная точка пересечения с окружностью — точка $(0;1)$. Следовательно, $a = 1$ является ответом.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

Задачи №19. Решения

№19.1 (Сибирь)

Восемь различных натуральных чисел таковы, что никакие два не имеют общего делителя, большего 1.

а) Может ли сумма всех восьми чисел быть равна 65?

б) Может ли сумма всех восьми чисел быть равна 62?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех восьми чисел?

Ответ: а) Да, может

б) Нет, не может

в) 59.

Решение. а) Да, может, например, если среди 8 чисел будет 1, а остальные 7 чисел будут простыми:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 23 = 65.$$

б) Заметим, что среди данных чисел может быть максимум одно четное число.

Если оно есть, то остальные 7 чисел нечетны. В этом случае сумма всех 8 чисел будет нечетна. Противоречие.

Значит, четного числа нет. Тогда все 8 чисел нечетны. Рассмотрим сумму 8 наименьших нечетных чисел:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 = 64 > 62.$$

Значит, сумма 8 различных натуральных чисел, не имеющих общего делителя, большего 1, не может быть равна 62.

в) Мы уже знаем, что среди данных чисел может быть максимум одно четное число. При этом оно точно должно быть, так как в любом примере из 8 нечетных чисел мы можем заменить наибольшее нечетное число на 2 и получить сумму меньше. Если же четное число есть и оно больше 2, то мы можем заменить его на 2 и получить сумму меньше.

Среди данных чисел может быть максимум одно число, кратное 3. При этом оно точно должно быть, так как в любом примере мы можем заменить наибольшее нечетное число на 3 и получить сумму меньше. Если же число, кратное 3, есть, и оно больше 3, то мы можем заменить его на 3 и получить сумму меньше.

Пусть наименьшее значение достигается в наборе чисел

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7 < a_8.$$

Тогда $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

Далее $a_4 \geqslant 5$, так как четные числа брать в набор уже нельзя. Аналогично $a_5 \geqslant 7$.

Далее $a_6 \geqslant 11$, $a_7 \geqslant 13$, $a_8 \geqslant 17$, так как в набор нельзя брать четные числа и числа, кратные 3, то есть 8, 9, 10, 12, 14, 15 и 16.

Тогда наименьшая сумма достигается в наборе из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и равна

$$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 + 17 = 59.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№19.2 (Сибирь)

Семь различных натуральных чисел таковы, что никакие два не имеют общего делителя, большего 1.

а) Может ли сумма всех семи чисел быть равна 50?

б) Может ли сумма всех семи чисел быть равна 47?

в) Какое наименьшее значение может принимать сумма всех семи чисел?

Ответ: а) Да, может

б) Нет, не может

в) 42.

Решение. а) Да, может, например, если среди 7 чисел будет 1, а остальные 6 чисел будут простыми:

$$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 13 + 19 = 50.$$

б) Заметим, что среди данных чисел может быть максимум одно четное число.
Если оно есть, то остальные 6 чисел нечетны. В этом случае сумма всех 7 чисел будет четна. Противоречие.
Значит, четного числа нет. Тогда все 7 чисел нечетны. Рассмотрим сумму 7 наименьших нечетных чисел:

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 = 49 > 47.$$

Значит, сумма 7 различных натуральных чисел, не имеющих общего делителя, большего 1, не может быть равна 47.

в) Мы уже знаем, что среди данных чисел может быть максимум одно четное число. При этом оно точно должно быть, так как в любом примере из 7 нечетных чисел мы можем заменить наибольшее нечетное число на 2 и получить сумму меньше. Если же четное число есть и оно больше 2, то мы можем заменить его на 2 и получить сумму меньше.

Среди данных чисел может быть максимум одно число, кратное 3. При этом оно точно должно быть, так как в любом примере мы можем заменить наибольшее нечетное число на 3 и получить сумму меньше. Если же число, кратное 3, есть и оно больше 3, то мы можем заменить его на 3 и получить сумму меньше.

Пусть наименьшее значение достигается в наборе чисел

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < a_5 < a_6 < a_7.$$

Тогда $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$.

Далее, $a_4 \geqslant 5$, так как четные числа брать в набор уже нельзя. Аналогично $a_5 \geqslant 7$.

Далее, $a_6 \geqslant 11$, $a_7 \geqslant 13$, так как в набор нельзя брать четные числа и числа, кратные 3, то есть 8, 9, 10 и 12.

Тогда наименьшая сумма достигается в наборе из чисел 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13 и равна

$$1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 11 + 13 = 42.$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№19.3 (Центр)

а) Можно ли представить число 2043 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?

б) Можно ли представить число 599 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?

в) Найдите наименьшее число, которое можно представить в виде суммы семи различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова.

Ответ: а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 231.

Решение. а) Возьмем числа 2034 и 9. Сумма цифр обоих чисел равна 9, при этом $2034 + 9 = 2043$.

б) Предположим, что существуют числа A и B, такие, что $A + B = 599$ и сумма цифр числа A равна сумме цифр числа B. Если сложить эти числа в столбик, то получим:

$$\begin{array}{r} \ldots \\ + \ \ldots \\ \hline 599 \end{array}$$

Заметим, что тогда сумма последних цифр этих чисел должна заканчиваться на 9. Но сумма цифр не может быть больше 18, поэтому она в точности равна 9. То есть при сложении последних цифр перехода по разряду не будет. Тогда сумма цифр в разряде десятков также равна 9, так как не превосходит 18 и заканчивается на 9 (если какое-то из чисел A или B однозначное, то можем считать, что в разряде десятков стоит 0). То есть при сложении цифр десятков перехода по разряду также не будет.

Это означает, что сумма цифр в разряде сотен равна 5 (если какое-то из чисел A или B не трехзначное, то можем считать, что в разряде сотен стоит 0).

Тогда сумма всех цифр в числах A и B равна $5 + 9 + 9 = 23$. Но 23 — нечетно, поэтому A и B не могут иметь одинаковую сумму цифр.

в) Пусть эти семь чисел: $x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_7$. Тогда так как суммы цифр у этих чисел равны, то равны и остатки при делении на 9, то есть:

$$x_1 \equiv_9 x_2 \equiv_9 \ldots \equiv_9 x_7$$

Так как все числа различны, а отличаться должны на числа, кратные 9, то имеем:

$$x_2 \geqslant x_1 + 9$$
$$x_3 \geqslant x_2 + 9 \geqslant x_1 + 18$$
$$\ldots$$
$$x_7 \geqslant x_1 + 54$$

Тогда для суммы всех чисел получаем:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 \geqslant x_1 + (x_1 + 9) + \ldots + (x_1 + 54) = 7x_1 + 189$$

Выполним перебор снизу по наименьшему из чисел:

- Пусть $x_1 = 1$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 1.

$$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 + 1000000 = 1111111$$

- Пусть $x_1 = 2$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 2.

$$2 + 11 + 20 + 101 + 110 + 200 + 1001 = 1445$$

- Пусть $x_1 = 3$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 3.

$$3 + 12 + 21 + 30 + 102 + 111 + 201 = 480$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

- Пусть $x_1 = 4$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 4.

$$4 + 13 + 22 + 31 + 40 + 103 + 112 = 325$$

- Пусть $x_1 = 5$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 5.

$$5 + 14 + 23 + 32 + 41 + 50 + 104 = 269$$

- Пусть $x_1 = 6$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 6.

$$6 + 15 + 24 + 33 + 42 + 51 + 60 = 231$$

- Пусть $x_1 \geqslant 7$. Тогда из ранее полученной оценки имеем:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_7 \geqslant 7x_1 + 189 = 49 + 189 = 238$$

  А значит, значение суммы не меньше 238.

Таким образом, получаем, что наименьшее значение суммы равно 231.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№19.4 (Центр)

а) Можно ли представить число 2032 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?

б) Можно ли представить число 799 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?

в) Найдите наименьшую число, которое можно представить в виде суммы пяти различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова.

Ответ: а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 110.

Решение. а) Возьмем числа 2024 и 8. Сумма цифр обоих чисел равна 8, при этом $2024 + 8 = 2032$.

б) Предположим, что существуют числа A и B, такие, что $A + B = 799$ и сумма цифр числа A равна сумме цифр числа B. Если сложить эти числа в столбик, то получим:

$$\begin{array}{r} \ldots \\ + \\ \ldots \\ \hline 799 \end{array}$$

Заметим, что тогда сумма последних цифр этих чисел должна заканчиваться на 9. Но сумма цифр не может быть больше 18, поэтому она в точности равна 9. То есть при сложении последних цифр перехода по разряду не будет. Тогда сумма цифр в разряде десятков также равна 9, так как не превосходит 18 и заканчивается на 9 (если какое-то из чисел A или B однозначное, то можем считать, что в разряде десятков стоит 0). То есть при сложении цифр десятков перехода по разряду также не будет.

Это означает, что сумма цифр в разряде сотен равна 7 (если какое-то из чисел A или B не трехзначное, то можем считать, что в разряде сотен стоит 0).

Тогда сумма всех цифр в числах A и B равна $7 + 9 + 9 = 25$. Но 25 — нечетно, поэтому A и B не могут иметь одинаковую сумму цифр.

в) Пусть эти пять чисел: $x_1 < x_2 < x_3 < x_4 < x_5$. Тогда так как суммы цифр у этих чисел равны, то равны и остатки при делении на 9, то есть:

$$x_1 \equiv_9 x_2 \equiv_9 \ldots \equiv_9 x_5$$

Так как все числа различны, а отличаться должны на числа, кратные 9, то имеем:

$$x_2 \geqslant x_1 + 9$$
$$x_3 \geqslant x_2 + 9 \geqslant x_1 + 18$$
$$\ldots$$
$$x_5 \geqslant x_1 + 36$$

Тогда для суммы всех чисел получаем:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 \geqslant x_1 + x_1 + 9 + \ldots + x_1 + 36 = 5x_1 + 90$$

Выполним перебор снизу по наименьшему из чисел:

- Пусть $x_1 = 1$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 1.

$$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 = 11111$$

- Пусть $x_1 = 2$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 2.

$$2 + 11 + 20 + 101 + 110 = 244$$

- Пусть $x_1 = 3$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 3.

$$3 + 12 + 21 + 30 + 102 = 168$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

- Пусть $x_1 = 4$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 4.

$$4 + 13 + 22 + 31 + 40 = 110$$

- Пусть $x_1 \geqslant 5$. Тогда из ранее полученной оценки имеем:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 \geqslant 5x_1 + 90 \geqslant 25 + 90 = 115$$

  А значит, значение суммы не меньше 115.

Таким образом, получаем, что наименьшее значение суммы равно 110.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

№19.5 (Центр)

а) Можно ли представить число 2014 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?

б) Можно ли представить число 199 в виде суммы двух различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова?

в) Найдите наименьшую число, которое можно представить в виде суммы шести различных натуральных чисел, сумма цифр которых одинакова.

Ответ: а) Да, можно

б) Нет, нельзя

в) 165.

Решение. а) Возьмем числа 2006 и 8. Сумма цифр обоих чисел равна 8, при этом $2006 + 8 = 2014$.

б) Предположим, что существуют числа A и B, такие, что $A + B = 199$ и сумма цифр числа A равна сумме цифр числа B. Если сложить эти числа в столбик, то получим:

$$\begin{array}{r} + \begin{array}{r} \dots \\ \dots \end{array} \\ \hline 199 \end{array}$$

Заметим, что тогда сумма последних цифр этих чисел должна заканчиваться на 9. Но сумма цифр не может быть больше 18, поэтому она в точности равна 9. То есть при сложении последних цифр перехода по разряду не будет. Тогда сумма цифр в разряде десятков также равна 9, так как не превосходит 18 и заканчивается на 9 (если какое-то из чисел A или B однозначное, то можем считать, что в разряде десятков стоит 0). То есть при сложении цифр десятков перехода по разряду также не будет.

Это означает, что сумма цифр в разряде сотен равна 1 (если какое-то из чисел A или B не трехзначное, то можем считать, что в разряде сотен стоит 0).

Тогда сумма всех цифр в числах A и B равна $1 + 9 + 9 = 19$. Но 19 — нечетно, поэтому A и B не могут иметь одинаковую сумму цифр.

в) Пусть эти шесть чисел: $x_1 < x_2 < \ldots < x_6$. Тогда так как суммы цифр у этих чисел равны, то равны и остатки при делении на 9, то есть:

$$x_1 \equiv_9 x_2 \equiv_9 \ldots \equiv_9 x_6$$

Так как все числа различны, а отличаться должны на числа, кратные 9, то имеем:

$$x_2 \geqslant x_1 + 9$$
$$x_3 \geqslant x_2 + 9 \geqslant x_1 + 18$$
$$\ldots$$
$$x_6 \geqslant x_1 + 45$$

Тогда для суммы всех чисел получаем:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_5 \geqslant x_1 + x_1 + 9 + \ldots + x_1 + 45 = 6x_1 + 135$$

Выполним перебор снизу по наименьшему из чисел:

- Пусть $x_1 = 1$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 1.

$$1 + 10 + 100 + 1000 + 10000 + 100000 = 111111$$

- Пусть $x_1 = 2$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 2.

$$2 + 11 + 20 + 101 + 110 + 200 = 444$$

- Пусть $x_1 = 3$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 3.

$$3 + 12 + 21 + 30 + 102 + 111 = 279$$

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ

- Пусть $x_1 = 4$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 4.

$$4 + 13 + 22 + 31 + 40 + 103 = 213$$

- Пусть $x_1 = 5$. Рассмотрим сумму наименьших чисел с суммой цифр, равной 5.

$$5 + 14 + 23 + 32 + 41 + 50 = 165$$

- Пусть $x_1 \geqslant 6$. Тогда из ранее полученной оценки имеем:

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_6 \geqslant 6x_1 + 135 \geqslant 36 + 135 = 171$$

  А значит, значение суммы не меньше 171.

Таким образом, получаем, что наименьшее значение суммы равно 165.

Сайт 100ballnik.com - варианты формата ОГЭ и ЕГЭ