Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ Профильный уровень

Инструкция по выполнению работы

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, что ответ на каждое задание в бланках ответов №1 и №2 записан под правильным номером.

Желаем успеха!

Справочные материалы

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cdot \cos\beta - \sin\alpha \cdot \sin\beta$$

Составитель: Школа Пифагора

Часть 1

Ответом к заданиям* 1–12 *является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в БЛАНК ОТВЕТОВ №* 1 *справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

1 Площадь параллелограмма $ABCD$ равна 155. Точка E — середина стороны CD. Найдите площадь треугольника ADE.

Ответ: ___________________________.

2 Даны векторы $\vec{a}\,(14; -2)$ и $\vec{b}\,(5; -8)$. Найдите скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$.

Ответ: ___________________________.

3 В куб с ребром 3 вписан шар. Найдите объём этого шара, делённый на π.

Ответ: ___________________________.

4 Фабрика выпускает сумки. В среднем 19 сумок из 160 имеют скрытые дефекты. Найдите вероятность того, что купленная сумка окажется без дефектов. Результат округлите до сотых.

Ответ: ___________________________.

5 В городе 48% взрослого населения – мужчины. Пенсионеры составляют 12,6% взрослого населения, причём доля пенсионеров среди женщин равна 15%. Для социологического опроса выбран случайным образом мужчина, проживающий в этом городе. Найдите вероятность события «выбранный мужчина является пенсионером».

Ответ: ___________________________.

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 23

6 Найдите корень уравнения

$\lg(4 - x) = 2.$

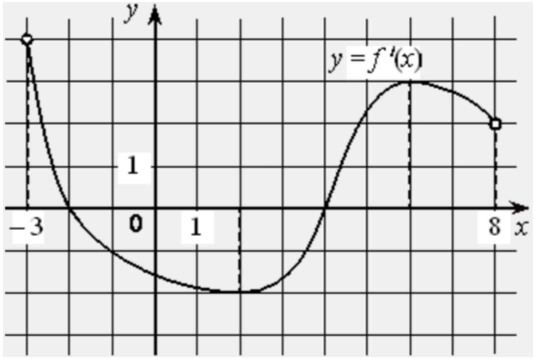
Ответ: ____________________________.

7 Найдите значение выражения

$\log_2 7 \cdot \log_7 4.$

Ответ: ____________________________.

8 На рисунке изображён график функции $y = f'(x)$ – производной функции $f(x)$, определённой на интервале $(-3; 8)$. Найдите точку минимума функции $f(x)$.



Ответ: ____________________________.

9 Для нагревательного элемента некоторого прибора экспериментально была получена зависимость температуры (в К) от времени работы:

$T(t) = T_0 + bt + at^2,$

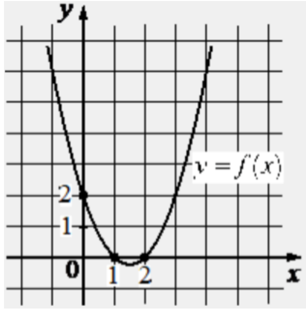
где t – время (в мин.), $T_0 = 680$ К, $a = -16\ \frac{\text{К}}{\text{мин}^2}$, $b = 224$К/мин. Известно, что при температуре нагревательного элемента свыше 1400 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Найдите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ дайте в минутах.

Ответ: ____________________________.

10 На изготовлении 60 деталей первый рабочий тратит на 4 часа меньше, чем второй рабочий на изготовление 80 таких же деталей. Известно, что первый рабочий за час делает на 2 детали больше, чем второй. Сколько деталей за час делает второй рабочий?

Ответ: ____________________________.

11 На рисунке изображён график функции вида $f(x) = ax^2 + bx + c$. Найдите значение $f(-2)$.



Ответ: ____________________________.

12 Найдите наименьшее значение функции

$y = \dfrac{x^2 + 441}{x}$ на отрезке $[2; 32]$.

Ответ: ____________________________.

Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы.
Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13 а) Решите уравнение

$$2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\cos 2x=\sqrt{2}\cos x+1.$$

б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi;\frac{5\pi}{2}\right]$.

14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.
б) Найдите объём B_1KLM.

15 Решите неравенство

$$\frac{2\cdot 3^{2x+1}-7\cdot 6^x+2\cdot 4^x}{3\cdot 9^x-3^x\cdot 2^{x+1}}\le 1.$$

16 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

17 Высоты тупоугольного треугольника ABC с тупым углом ABC пересекаются в точке H. Угол AHC равен 60°.

а) Докажите, что угол ABC равен 120°.
б) Найдите BH, если $AB=6$, $BC=10$.

18 Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$$

имеет ровно 4 решения.

19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию ($n\ge 3$).

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?
б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?
в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.

СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:	
ФИО:	Евгений Пифагор
Предмет:	Математика
Стаж:	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
Регалии:	Набрал 100 баллов на ЕГЭ по математике профиль Результаты моих учеников Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
ВК:	https://vk.com/shkolapifagora
Ютуб:	https://www.youtube.com/c/pifagor1

Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	38,75	
2	86	
3	4,5	
4	0,88	
5	0,1	
6	-96	
7	2	
8	4	
9	5	
10	8	
11	12	
12	42	
13	а) $\pi n, \frac{\pi}{4} + 2\pi n, \frac{3\pi}{4} + 2\pi n; n \in Z$ б) $\pi;\ 2\pi;\ \frac{9\pi}{4}$	
14	18	
15	$(-\infty; -1) \cup (-1; 0]$	
16	7 млн	
17	$\frac{14}{\sqrt{3}}$	
18	$(-\infty; -2) \cup (2; 3) \cup (3; 3{,}5) \cup (5{,}5; +\infty)$	
19	а) да б) 44 в) 3 и 6	

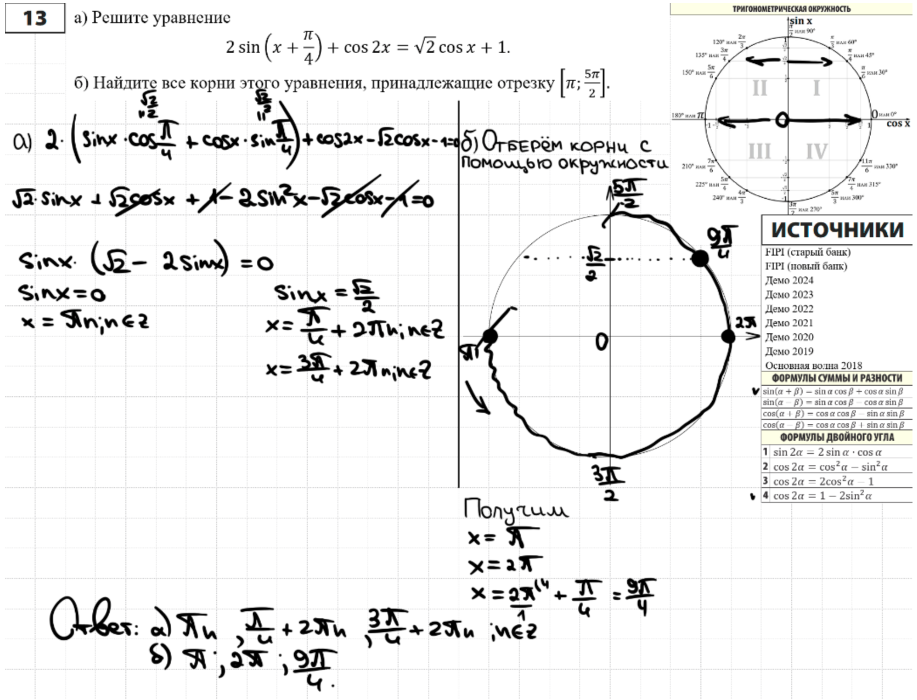
Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта *а* и пункта *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

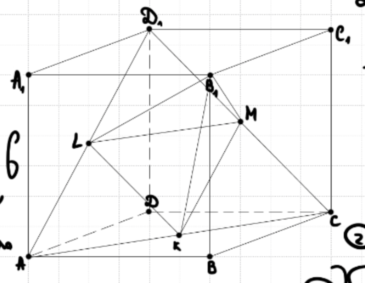
14 Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 6. Точки K, L и M — центры граней $ABCD$, AA_1D_1D и CC_1D_1D соответственно.

а) Докажите, что B_1KLM — правильная пирамида.

б) Найдите объём B_1KLM.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна 2017

а) ① $\triangle ACD_1$ — р/с (т.к. $AD_1 = CD_1 = AC$ как диагонали равных квадратов)



$\triangle LKM$ — р/с (т.к. LM, LK, MK — ср. линии, равные половинам сторон равностороннего тр. $\triangle ACD_1$)

② Рассмотрим B_1ACD_1 — прав. пир.
B_1L, B_1M и B_1K — апофемы в прав. пир.

$\begin{cases} B_1L = B_1M = B_1K & \text{(равны как апофемы)} \\ LM = LK = MK & \text{(равны, т.к. } \triangle LKM - \text{р/с)} \end{cases}$

значит B_1KLM — прав. пир. ∎

б) ① $V_{куба} = 6^3 = 216$

$V_{ACDD_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 36$

$V_{ABCB_1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{6 \cdot 6}{2} \cdot 6 = 36$

$V_{CC_1D_1B_1} = 36$

$V_{AA_1B_1D_1} = 36$

② $V_{B_1ACD_1} = 216 - 4 \cdot 36 = 72$

③ $V_{B_1KLM} = \frac{1}{4} \cdot V_{B_1ACD_1} = 18$

(т.к. $S_{KLM} = \frac{1}{4} S_{ACD_1}$)

Ответ: 18.

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3

15 Решите неравенство

$$\frac{2 \cdot 3^{2x+1} - 7 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x}{3 \cdot 9^x - 3^x \cdot 2^{x+1}} \le 1.$$

ИСТОЧНИКИ
Пересдача 2024
Досрочная волна 2018

СТЕПЕНИ	
1	$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2	$a^n : a^m = a^{n-m}$
3	$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$
✔4	$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6	$a^0 = 1$
7	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
8	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

$$\frac{2 \cdot 3^{2x} \cdot 3 - 7 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x}{3 \cdot 9^x - 3^x \cdot 2^x \cdot 2} - \frac{1}{1}^{(3 \cdot 9^x - 2 \cdot 6^x)} \le 0$$

$$\frac{6 \cdot 9^x - 7 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x - 3 \cdot 9^x + 2 \cdot 6^x}{3 \cdot 9^x - 2 \cdot 6^x} \le 0$$

$$\frac{3 \cdot 9^x - 5 \cdot 6^x + 2 \cdot 4^x}{3 \cdot 9^x - 2 \cdot 6^x} \le 0 \quad \begin{vmatrix} :4^x \\ :6^x \end{vmatrix}$$

$$\frac{3 \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^x - 5 \cdot \left(\frac{6^3}{4^2}\right)^x + 2}{3 \cdot \left(\frac{9^3}{6^2}\right)^x - 2} \le 0$$

Пусть $\left(\frac{3}{2}\right)^x = t$

$$\frac{3t^2 - 5t + 2}{3t - 2} \le 0$$

$-$, $-$, $+$; $\frac{2}{3}$, 1, t

$\left[\begin{array}{l} t < \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} < t \le 1 \end{array}\right.$

$\left(\frac{3}{2}\right)^x < \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$ $\qquad$ $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1} < \left(\frac{3}{2}\right)^x \le \left(\frac{3}{2}\right)^0$

$x < -1$ $\qquad$ $-1 < x \le 0$

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 23

16 Вклад в размере 10 млн рублей планируется открыть на четыре года. В конце каждого года вклад увеличивается на 10% по сравнению с его размером в начале года, а, кроме этого, в начале третьего года и четвёртого годов вклад ежегодно пополняется на одну и ту же фиксированную сумму, равную целому числу миллионов рублей. Найдите наименьший возможный размер такой суммы, при котором через четыре года вклад станет не меньше 30 млн рублей.

ИСТОЧНИКИ
Ященко 2018 (36 вар)
Основная волна (Резерв) 2023
Досрочная волна 2016
Основная волна (Резерв) 2016

Пусть x – сумма пополнения вклада в начале 3, а также 4-го годов

янв 21 – месяц откр. вкл.
дек – месяц начисл. %
янв. – месяц. пополнения вклада

Дата	Сумма вклада
1 г. Я21	10 млн
Д21	$10\cdot 1{,}1$
2 г. Я22	ничего не происходит
Д22	$10\cdot 1{,}1^2$
3 г. Я23	$10\cdot 1{,}1^2 + x$
Д23	$10\cdot 1{,}1^3 + 1{,}1\cdot x$
4 г. Я24	$10\cdot 1{,}1^3 + 1{,}1\cdot x + x$
Д24	$10\cdot 1{,}1^4 + 1{,}1^2\cdot x + 1{,}1x \geq 30$

$\cancel{10}\cdot\frac{11^4}{10^{4}} + \frac{121}{100}x + \frac{11x}{10} - \frac{30}{1} \geq 0$

$\frac{231}{100}x \geq \frac{30}{1} - \frac{14641}{1000}$

$\frac{231}{100}\cdot x \geq \frac{15359}{1000} \quad \Big| : \frac{231}{100}$

$x \geq \frac{15359\cdot\cancel{100}}{231\cdot 10\cancel{00}}$

$x \geq \frac{15359}{2310}$

$x \geq 6\frac{1499}{2310}$

$15359 : 2310 = 6$ (ост. 1499); $15359 - 13860 = 1499$

$X_{\text{наим. цел}} = 7$ млн.

Ответ: 7 млн.

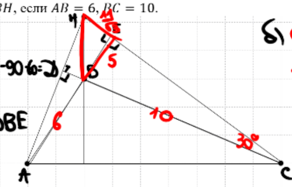
Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

17 Высоты тупоугольного треугольника ABC с тупым углом ABC пересекаются в точке H. Угол AHC равен $60°$.

а) Докажите, что угол ABC равен $120°$.

б) Найдите BH, если $AB = 6$, $BC = 10$.

ИСТОЧНИКИ
FIPI (новый банк)
Досрочная волна 2018

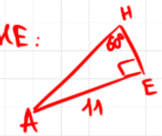


а) HEBD:
$\angle DBE = 360° - 90 - 90 - 60 = 120$
$\angle ABC = 120 = \angle DBE$ вертик.

б) ① $\triangle CDH$:
$\angle DCH = 180 - 90 - 60 = 30$
(по т. о сумме углов тр.)

② $\triangle BCE$:
$BE = \frac{1}{2}\cdot BC = 5$
(т.к. катет напротив $30°$ равен пол. гип.)

③ $\triangle AHE$:



$\operatorname{tg} 60° = \frac{AE}{HE}$

$\sqrt{3} = \frac{11}{HE} \qquad HE = \frac{11}{\sqrt{3}}$

④ $\triangle BEH$: по т. Пиф.

$BH = \sqrt{5^2 + \left(\frac{11}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{14}{\sqrt{3}}$

Ответ: $\frac{14}{\sqrt{3}}$.

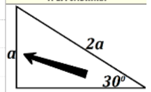
СУММА УГЛОВ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА
360°

ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

Равны

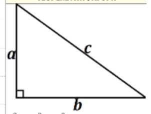
СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА
180°

СВОЙСТВО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



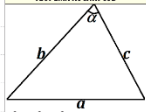
Катет, лежащий напротив угла 30°, равен половине гипотенузы

ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$c^2 = a^2 + b^2$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cdot\cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и обоснованно получен верный ответ в пункте *б*	3
Получен обоснованный ответ в пункте *б* ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, и при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта *а*, ИЛИ при обоснованном решении пункта *б* получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *б* с использованием утверждения пункта *а*, при этом пункт *а* не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

18 Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\left(x+\frac{1}{x-a}\right)^2-(a+9)\left(x+\frac{1}{x-a}\right)+2a(9-a)=0$$

имеет ровно 4 решения.

ИСТОЧНИКИ
Основная волна (Резерв) 2014

Пусть $\left(x+\frac{1}{x-a}\right)=t$

$t^2-(a+9)\cdot t+2a\cdot(9-a)=0$

$\left[\begin{array}{l} t_1=2a \\ t_2=9-a \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} x+\frac{1}{x-a}=2a \\ x+\frac{1}{x-a}=9-a \end{array}\right.$

$\boxed{\text{1 случай}}$ Когда два уравнения сводятся к одному

$2a=9-a$

$3a=9$

$a=3$

При $a=3$ $\frac{x}{1}+\frac{1}{x-3}=\frac{6}{1}$

$\frac{x^2-3x+1-6x+18}{x-3}=0$

Это уравнение может иметь максимум 2 корня

$\Rightarrow a\neq 3$

$\boxed{\text{2 случай}}$ У нас два разных ур-я

$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-ax+1-2ax+2a^2}{x-a}=0 \\ \frac{x^2-\cancel{ax}+1-9x+9a+\cancel{ax}-a^2}{x-a}=0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \frac{x^2-3ax+2a^2+1}{x-a}=0 \\ \frac{x^2-9x-a^2+9a+1}{x-a}=0 \end{array}\right.$

Чтобы у исходного уравнения было 4 решения нужно, чтобы

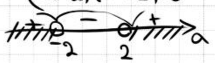
$\begin{cases} D_1>0 \\ a^2-3a\cdot a+2a^2+1\neq 0 \\ D_2>0 \\ a^2-9\cdot a-a^2+9a+1\neq 0 \end{cases}$, где D_1 и D_2 – это дискриминанты уравнений $x^2-3ax+2a^2+1=0$, $x^2-9x-a^2+9a+1=0$

$\begin{cases} (-3a)^2-4\cdot 1\cdot(2a^2+1)>0 & (1) \\ \cancel{a^2}-\cancel{3a^2}+\cancel{2a^2}+1\neq 0 \\ (-9)^2-4\cdot 1\cdot(-a^2+9a+1)>0 & (2) \\ \cancel{a^2}-\cancel{9a}-\cancel{a^2}+\cancel{9a}+1\neq 0 \end{cases}$

(1) $9a^2-8a^2-4>0$

$a^2-4>0$

$(a-2)(a+2)>0$

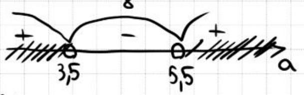


(2) $81+4a^2-36a-4>0$

$4a^2-36a+77>0$

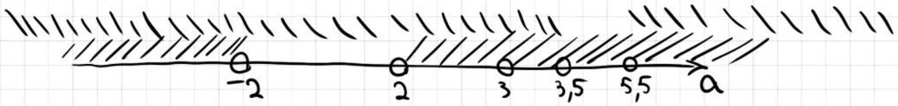
$D=1296-1232=64$

$a=\frac{36\pm 8}{8}$



$a\neq 3$ (см. 1 случай)

Найдём пересечение:



Ответ: $(-\infty;-2)\cup(2;3)\cup(3;3{,}5)\cup(5{,}5;+\infty)$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений a, отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений a	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений a	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

ТРЕНИРОВОЧНЫЙ КИМ № 23

19 Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

B103EF

ИСТОЧНИКИ

ФИПИ (старый банк)
Пробный ЕГЭ 2013
Досрочная волна 2013

а) Если $n=3$, то

$$a_1 + a_1+d + a_1+2d \neq 10$$

$$3a_1 + 3d = 10$$

Если $n=4$, то

$$a_1 + a_1+d + a_1+2d + a_1+3d = 10$$

$$4a_1 + 6d = 10$$

При $a_1 = 1$
$d = 1$

1 2 3 4

Ответ: а) да, пример 1, 2; 3; 4.

б) $S < 1000$

$$\frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n < 1000 \quad | \cdot 2$$

$$(a_1 + a_1 + d\cdot(n-1)) \cdot n < 2000$$

Для нахождения наибольшего n возьмём наименьшие возм. a_1 и d

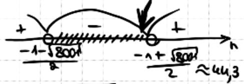
$a_1 = 1$ и $d = 1$

$$(1+1+1\cdot(n-1))\cdot n < 2000$$

$$(2+n-1)\cdot n < 2000$$

$$n^2 + n - 2000 < 0$$

$$D = 1 + 8000 = 8001$$



$$\frac{-1+\sqrt{8001}}{2} \approx 44{,}3$$

$$89 < \sqrt{8001} < 90$$

$$88 < -1 + \sqrt{8001} < 89 \quad | \cdot \frac{1}{2}$$

$$44 < \frac{-1+\sqrt{8001}}{2} < 44{,}5$$

$$n \leq 44$$

Покажем, что $n = 44$ может быть

$a_1 = 1$
$d = 1$
$n = 44$

1 2 3 … 43 44 $S = 990$.

Ответ: б) 44.

Даны n различных натуральных чисел, составляющих арифметическую прогрессию $(n \geq 3)$.

а) Может ли сумма всех данных чисел быть равной 10?

б) Каково наибольшее значение n, если сумма всех данных чисел меньше 1000?

в) Найдите все возможные значения n, если сумма всех данных чисел равна 129.

B103EF

АРИФМЕТИЧЕСКАЯ ПРОГРЕСС

$a_n = a_1 + d\cdot(n-1)$

$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n$

$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$

в) $S_n = 129$

$$\frac{a_1 + a_1 + d\cdot(n-1)}{2} \cdot n = 129 \quad | \cdot 2$$

$$(2a_1 + d(n-1)) \cdot n = 258$$

$\Rightarrow n$ является делителем 258

Разложим 258 на простые мн.

$$\begin{array}{r|l} 258 & 2 \\ 129 & 3 \\ 43 & 43 \\ 1 & \end{array}$$

Если $n=3$, то $2a_1 + 2d = 86 \quad | :2$

$a_1 + d = 43$

Пусть $a_1 = 1$ $d = 42$

1 43 85

Если $n=6$, то $2a_1 + 5d = 43$

Пусть $a_1 = 19$ $d = 1$

19 20 21 22 23 24

Если $n = 43$, то $2a_1 + 42d = 6$

$a_1 + 21d = 3$

Нет реш. в нат. ч.

Если $n = 86$, то $2a_1 + 85d = 3$

Нет реш в нат ч.

Если $n = 129$, то $2a_1 + 128d = 2$

$a_1 + 64d = 1$

Нет реш. в нат. ч.

Если $n = 258$, то $2a_1 + 257d = 1$

Нет реш. в нат. ч.

Ответ: в) 3 и 6.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а*, *б* и *в*	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте *в* и обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах *а* и *б* ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте *в*	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте *а* или *б*	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4