

**Тренировочный единый государственный экзамен  
по МАТЕМАТИКЕ**

**Вариант 21111**

**Инструкция по выполнению работы**

Экзаменационная работа состоит из двух частей, включающих в себя 19 заданий. Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом базового и повышенного уровней сложности. Часть 2 содержит 7 заданий с развёрнутым ответом повышенного и высокого уровней сложности.

На выполнение экзаменационной работы по математике отводится 3 часа 55 минут (235 минут).

Ответы к заданиям 1–12 записываются по приведённому ниже образцу в виде целого числа или конечной десятичной дроби. Числа запишите в поля ответов в тексте работы, а затем перенесите их в бланк ответов № 1.

КИМ Ответ: -0,8

-	0	,	8																
---	---	---	---	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

 Бланк

При выполнении заданий 13–19 требуется записать полное решение и ответ в бланке ответов № 2.

Все бланки ЕГЭ заполняются яркими чёрными чернилами. Допускается использование гелевой или капиллярной ручки.

При выполнении заданий можно пользоваться черновиком. **Записи в черновике, а также в тексте контрольных измерительных материалов не учитываются при оценивании работы.**

Баллы, полученные Вами за выполненные задания, суммируются. Постарайтесь выполнить как можно больше заданий и набрать наибольшее количество баллов.

После завершения работы проверьте, чтобы ответ на каждое задание в бланках ответов № 1 и № 2 был записан под правильным номером.

**Желаем успеха!**

**Справочные материалы**

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$$

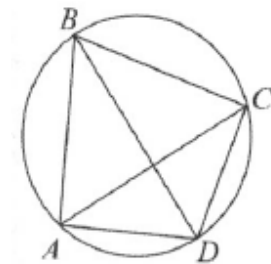
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta$$

**Часть 1**

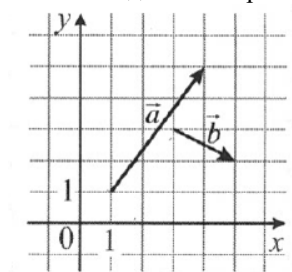
Ответом к заданиям 1 – 12 является целое число или конечная десятичная дробь. Во всех заданиях числа предполагаются действительными, если отдельно не указано иное. Запишите число в поле ответа в тексте работы, затем перенесите его в **БЛАНК ОТВЕТОВ № 1** справа от номера соответствующего задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак «минус» и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведёнными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

- 1** Четырёхугольник  $ABCD$  вписан в окружность. Угол  $ABC$  равен  $56^\circ$ , угол  $ABD$  равен  $34^\circ$ . Найдите величину угла  $CAD$ . Ответ дайте в градусах.



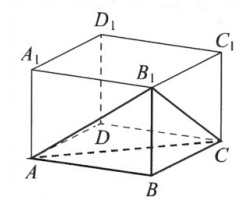
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 2** На координатной плоскости изображены векторы  $\vec{a}, \vec{b}$ , координатами которых являются целые числа. Найдите скалярное произведение  $\vec{a} \cdot \vec{b}$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 3** В прямоугольном параллелепипеде  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  известно, что  $AB = 7$ ,  $BC = 6$ ,  $AA_1 = 5$ . Найдите объём многогранника, вершинами которого являются точки  $A, B, C, B_1$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 4 Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А верно решит больше пяти задач, равна 0,62. Вероятность того, что А верно решит больше четырёх задач, равна 0,74. Найдите вероятность того, что учащийся А верно решит ровно 5 задач.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 В коробке 12 синих, 6 красных и 7 зелёных фломастеров. Случайным образом выбираются два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер.

Ответ: \_\_\_\_\_.

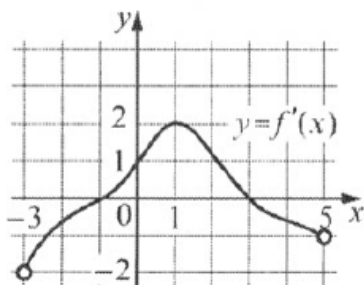
- 6 Найдите корень уравнения  $\frac{1}{3x-17} = \frac{1}{2x-5}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения  $\frac{(6\sqrt{2})^2}{24}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-3; 5)$ . Найдите точку максимума функции  $f(x)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 9 Водолазный колокол, содержащий  $\nu = 3$  моль воздуха при давлении  $p_1 = 1,9$  атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изометрическое сжатие воздуха до конечного давления  $p_2$  (в атмосферах). Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле  $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ , где  $\alpha = 17,1 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – постоянная,  $T = 300\text{K}$  – температура воздуха. Найдите, какое давление  $p_2$  будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 30 780 Дж. Ответ дайте в атмосферах.

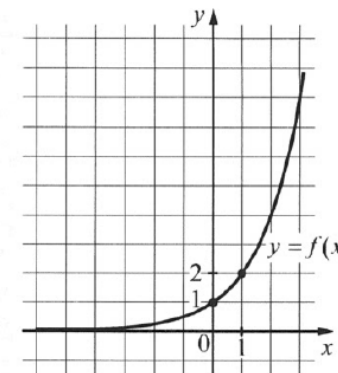
Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Имеется два сосуда. Первый содержит 50 кг, а второй – 20 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 46% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 49% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = a^x$ . Найдите значение  $f(6)$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.



- 12 Найдите точку максимума функции  $y = \frac{144}{x} + x + 21$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

- 13 а) Решите уравнение
- $$4 \cos^3 x + 3 \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$
- б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[-2\pi; -\pi]$ .
- 14 В кубе  $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$  через вершину  $B$  провели плоскость  $\alpha$  параллельно прямым  $A_1 M$  и  $B_1 K$ , где точки  $M$  и  $K$  – середины рёбер  $AB$  и  $BC$  соответственно.
- а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через вершину  $D$ .
- б) Найдите площадь сечения куба плоскостью  $\alpha$ , если ребро куба равно 1.
- 15 Решите неравенство  $\frac{1,5^x - 3,375}{0,25^x - 0,5^{x-3,5} + 32} \leq 0$ .
- 16 В июле 2026 года Николай планирует открыть накопительный счёт на три года. Условия по этому счёту таковы:
- 1 июля 2026 года Николай помещает на счёт некоторую сумму денег;
  - 30 июня каждого года сумма на счёте увеличивается на 25 % по сравнению с суммой, находящейся на счёте 29 июня;
  - 1 июля 2027, 2028 и 2029 годов Николай снимет со счёта одну и ту же фиксированную сумму;
  - 1 июля 2029 на счёте не должно остаться денег.
- Известно, что общая сумма снятых со счёта денег окажется равной 375 000 рублям. Найдите сумму, которую должен будет поместить на счёт Николай в 2026 году.
- 17 В прямоугольнике  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  в три раза длиннее стороны  $AD$ . На сторонах  $AD$  и  $CD$  отметили точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AM = MD$ ,  $CN = 2ND$ . Точка  $K$  – середина отрезка  $CM$ .
- а) Докажите, что прямая  $BN$  проходит через точку  $K$ .
- б) Найдите длину отрезка  $KN$ , если  $AD = 4\sqrt{5}$

- 18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение  $\ln(3a - x) \cdot \ln(2x + 2a - 5) = \ln(3a - x) \cdot \ln(x - a)$  имеет на отрезке  $[0; 2]$  ровно один корень.

- 19 На доске написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых не превосходит 40. Вместо некоторых чисел (возможно, одного) на доске написали числа, большие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 41, с доски стёрли, но на доске осталось хотя бы одно число.
- а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске уменьшилось?
- б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 14. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 7?
- в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 14. Найдите наименьшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.



- 4 Вероятность того, что на тестировании по математике учащийся А верно решит больше пяти задач, равна 0,71. Вероятность того, что А верно решит больше четырёх задач, равна 0,78. Найдите вероятность того, что учащийся А верно решит ровно 5 задач.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 5 В коробке 11 синих, 6 красных и 8 зелёных фломастеров. Случайным образом выбираются два фломастера. Найдите вероятность того, что окажутся выбраны один синий и один красный фломастер.

Ответ: \_\_\_\_\_.

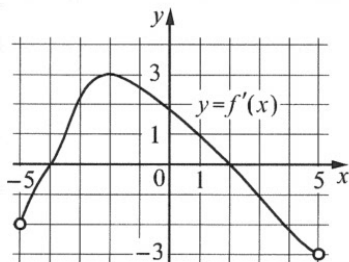
- 6 Найдите корень уравнения  $\frac{1}{5x-14} = \frac{1}{4x-3} \cdot \%$

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 7 Найдите значение выражения  $\frac{(4\sqrt{5})^2}{8}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 8 На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  – производной функции  $f(x)$ , определённой на интервале  $(-5; 5)$ . Найдите точку максимума функции  $f(x)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

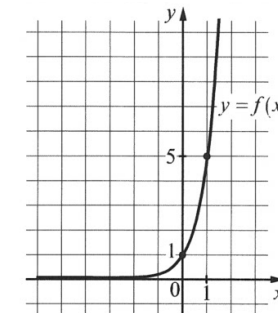
- 9 Водолазный колокол, содержащий  $\nu = 4$  моль воздуха при давлении  $p_1 = 2,3$  атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изометрическое сжатие воздуха до конечного давления  $p_2$  (в атмосферах). Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, вычисляется по формуле  $A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1}$ , где  $\alpha = 11,6 \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$  – постоянная,  $T = 300\text{К}$  – температура воздуха. Найдите, какое давление  $p_2$  будет иметь воздух в колоколе, если при сжатии воздуха была совершена работа в 27840 Дж. Ответ дайте в атмосферах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 10 Имеется два сосуда. Первый содержит 90 кг, а второй – 30 кг растворов кислоты различной концентрации. Если эти растворы смешать, то получится раствор, содержащий 61% кислоты. Если же смешать равные массы этих растворов, то получится раствор, содержащий 72% кислоты. Сколько процентов кислоты содержится в первом сосуде?

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11 На рисунке изображён график функции вида  $f(x) = a^x$ . Найдите значение  $f(2)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12 Найдите точку максимума функции  $y = \frac{196}{x} + x + 7$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.**

## Часть 2

Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т.д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.

13

а) Решите уравнение

$$4 \cos^3 x + \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[\pi; 2\pi]$ .

14

В кубе  $ABCD_1B_1C_1D_1$  через вершину  $B$  провели плоскость  $\alpha$  параллельно прямым  $A_1M$  и  $B_1K$ , где точки  $M$  и  $K$  – середины рёбер  $AB$  и  $BC$  соответственно.

а) Докажите, что плоскость  $\alpha$  проходит через вершину  $D$ .б) Найдите площадь сечения куба плоскостью  $\alpha$ , если ребро куба равно 2.

15

Решите неравенство  $\frac{2,5^x - 0,16}{0,25^x - 0,5^{x-4,5} + 128} \leq 0$ .

16

В июле 2026 года Николай планирует открыть накопительный счёт при на три года. Условия по этому счёту таковы:

- 1 июля 2026 года Николай помещает на счёт некоторую сумму денег;
- 30 июня каждого года сумма на счёте увеличивается на 20 % по сравнению с суммой, находящейся на счёте 29 июня;
- 1 июля 2027, 2028 и 2029 годов Николай снимет со счёта одну и ту же фиксированную сумму;
- 1 июля 2029 на счёте не должно остаться денег.

Известно, что общая сумма снятых со счёта денег окажется равной 518 400 рублям. Найдите сумму, которую должен будет поместить на счёт Николай в 2026 году.

17

В прямоугольнике  $ABCD$  боковая сторона  $CD$  в три раза длиннее стороны  $AD$ . На сторонах  $AD$  и  $CD$  отметили точки  $M$  и  $N$  соответственно, причём  $AM = MD$ ,  $CN = 2ND$ . Точка  $K$  – середина отрезка  $CM$ .

а) Докажите, что прямая  $BK$  проходит через точку  $K$ .б) Найдите длину отрезка  $KN$ , если  $AD = 4$ .

18

Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$\ln(6a - x) \cdot \ln(2x + 2a - 2) = \ln(6a - x) \cdot \ln(x - a)$$

имеет на отрезке  $[0; 1]$  ровно один корень.

19

На доске написано 20 натуральных чисел (необязательно различных), каждое из которых больше 10, но не превосходит 50. Вместо некоторых чисел (возможно, одного) на доске написали числа, большие первоначальных на единицу. Числа, которые после этого оказались равными 51, с доски стёрли.

а) Могло ли оказаться так, что среднее арифметическое чисел на доске уменьшилось?

б) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 24. Могло ли среднее арифметическое оставшихся на доске чисел оказаться равным 17?

в) Среднее арифметическое первоначально написанных чисел равнялось 24. Найдите наименьшее возможное значение среднего арифметического чисел, которые остались на доске.

Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.