XVIII МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА ИМЕНИ ЛЕОНАРДА ЭЙЛЕРА

Решения заданий регионального этапа, 1 день

1. *В каждом столбце таблицы 10×10 записаны сверху вниз в порядке возрастания степени двойки: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512. Как пройти из какой-либо клетки верхней строки таблицы в какую-либо клетку нижней, сдвигаясь на каждом ходу на клетку вправо или на клетку вниз, чтобы сумма чисел во всех пройденных клетках равнялась 2026? Достаточно найти один пример.* (И. Рубанов)

1	**1**	1	1	1	1	1	1	1	1
2	**2**	**2**	2	2	2	2	2	2	2
4	4	**4**	**4**	**4**	4	4	4	4	4
8	8	8	8	**8**	8	8	8	8	8
16	16	16	16	**16**	16	16	16	16	16
32	32	32	32	**32**	**32**	32	32	32	32
64	64	64	64	64	**64**	**64**	64	64	64
128	128	128	128	128	128	**128**	**128**	128	128
256	256	256	256	256	256	256	**256**	**256**	256
512	512	512	512	512	512	512	512	**512**	**512**

Решение. Возможный путь показан на рисунке крупными жирными цифрами. Его поиски облегчаются, если предварительно представить число 2026 в виде суммы степеней двойки: 2026 = 2+8+32+64+128+256+512+1024.

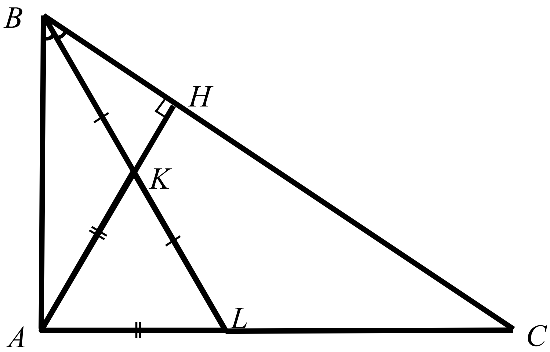
Критерии оценки. Есть верный пример — *7 баллов*, нет верного примера — *0 баллов*.

2. *Числа a, b, c таковы, что $a^2+b^2 > (a+b)^2$ и $b^2+c^2 > (b+c)^2$. Что больше: c^4+a^4 или $(a+c)^4$?* (А. Кузнецов, И. Рубанов)

Ответ. $(a+c)^4$. **Решение**. $a^2+b^2 > (a+b)^2 = a^2+2ab+b^2 \Leftrightarrow ab < 0$. Аналогично $bc < 0$. Таким образом, числа a и b имеют разные знаки, числа c и b — тоже. Значит, числа a и c имеют один знак, то есть $ac > 0$. Следовательно, $(a+c)^4 - (a^4+c^4) = 4a^3c+6a^2c^2+4ac^3 = ac(4a^2+6ac+4c^2) > 0$, откуда $(a+c)^4 > a^4+c^4$.

Критерии оценки. Найден знак хотя бы одного из произведений ab или bc без дальнейшего содержательного продвижения — *2 балла*. Любые алгебраические преобразования, не приведшие к продвижению в сравнении $(a+c)^4$ и a^4+c^4, *не оцениваются*.

3. *В треугольнике ABC точка K — середина биссектрисы BL. Известно, что AK = AL и AK ⊥ BC. Найдите величину угла ABC.* (П. Кожевников)



Ответ. 60°. **Решение**. Положим $\angle ABC = 2\beta$, $\angle ACB = 2\gamma$. Пусть прямые AK и BC пересекаются в точке H. Из треугольника ABH $\angle BAH = 90°-2\beta$. Из треугольника AKB

$$\angle AKB = 180°-\angle ABK-\angle BAH = 90°+\beta.$$

Далее,

$$\angle ALK = \angle ALB = \angle LCB+\angle LBC = \beta+2\gamma$$

и $\angle AKL = 180°-\angle AKB = 90°-\beta$. Так как по условию $AK = AL$, углы ALK и AKL равны, то есть $\beta+2\gamma = 90°-\beta$, откуда $2\beta+2\gamma = 90°$ и $\angle BAC = 180°-(2\beta+2\gamma) = 90°$. Таким образом, AK — медиана треугольника BAL, проведенная из вершины его прямого угла, откуда $AL = AK = KL$. Значит, $\angle ALB = 60°$, откуда $\beta = \angle ABL = 30°$ и $\angle ABC = 2\beta = 60°$.

Критерии оценки. Только ответ — *0 баллов*. Доказано, что угол A — прямой, дальнейшего содержательного продвижения нет — *3 балла*. Любые вычисления с углами, не приведшие к нахождению числового значения величины никакого угла, *не оцениваются*.

4. *В электронную таблицу, где две строки и n столбцов, в произвольном порядке записаны все натуральные числа от 1 до 2n (в каждой клетке — одно число). В полдень каждого дня компьютер случайным образом выбирает столбец, где число из верхней строки больше числа из нижней, и меняет эти два числа местами, а затем случайным образом переставляет числа в верхней строке. В момент, когда в каждом столбце верхнее число оказывается меньше нижнего, процесс заканчивается. Докажите, что такой процесс не может происходить дольше, чем n^2 дней.* (Р. Баринов, М. Магин)

Первое решение. Заметим, что разность суммы чисел в верхней строке таблицы и суммы чисел в ее нижней строке не больше, чем $(2n+(2n-1)+\ldots+(n+1))-(n+(n-1)+\ldots+1) = n^2$ и не меньше, чем $-n^2$. Каждая перемена компьютером мест двух чисел в столбце уменьшает эту разность минимум на 2. Поэтому таких перемен не может произойти больше, чем $(n^2-(-n^2))/2 = n^2$. **Второе решение**. Назовем пару чисел (a, b) *плохой*, если число a стоит в верхнем ряду, число b — в нижнем (не обязательно в той же колонке, что и a), и $a > b$. Пусть компьютер поменял в какой-то колонке местами числа x и y, где $x > y$. После этого исчезнет плохая пара (x, y). Так как вниз пошло большее число, там, где образовалась плохая пара с x снизу, была плохая пара и с y снизу, а там, где образовалась плохая пара с y сверху, была и плохая пара с x сверху. Значит, число плохих пар за одну перестановку чисел в столбце уменьшается хотя бы на 1. От перестановки чисел в строке оно не меняется. Так как число плохих пар изначально не больше общего количества пар (a, b), где число a стоит в верхнем ряду, а число b — в нижнем, равного n^2, перестановок чисел в столбцах будет сделано не более, чем n^2.

Критерии оценки. Предварительных критериев нет.

5. *Существует ли такое натуральное число n, что для каких-то трёх его делителей a, b, c, больших 1, произведение $(a-1)(b-1)(c-1)$ делится на n^2?* (Р. Ишкуватов)

Ответ. Не существует. **Решение**. Допустим, такое n существует. Так как числа a и $a-1$ взаимно просты, произведение $(b-1)(c-1)$ должно делиться на a^2, откуда $a^2 \le (b-1)(c-1)$. Аналогично $b^2 \le (a-1)(c-1)$, $c^2 \le (a-1)(b-1)$. Перемножив три полученных неравенства, получаем невозможное неравенство $a^2b^2c^2 \le (a-1)^2(b-1)^2(c-1)^2$.

Критерии оценки. Предварительных критериев нет.

Решения заданий регионального этапа, 2 день

6. *Как разрезать квадрат на 12 треугольников, площади которых относятся как 1 : 2 : 3 :...: 11 : 12?* (И. Рубанов)

Решение. Заметим, что числа от 1 до 12 можно сгруппировать в 6 пар, сумма чисел в каждой из которых равна 13: 1, 12; 2, 11; 3, 10; 4, 9; 5, 8; 6, 7. Возьмем квадрат $ABCD$ со стороной $13\times3 = 39$ и разделим его сторону AB на отрезки длиной 1, 12, 2, 11, 3, 10, а сторону AD — на отрезки длиной 4, 9, 5, 8, 6, 7. Соединив вершину C с вершиной A и точками деления на сторонах AB и AD, получим искомые треугольники: их высоты, опущенные из вершины C, равны стороне квадрата, поэтому их площади относятся как длины отрезков, на которые разделены отрезки AB и AD.

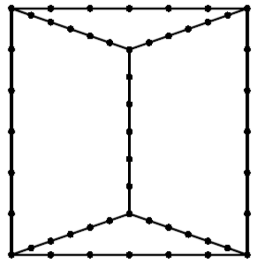
Критерии оценки. Схемы разрезания без пояснений, достаточных для проверки правильности разрезания, *не засчитываются*.

7. *У Васи есть банки с синей, жёлтой и зелёной красками. Он хочет покрасить каждое натуральное число от 100 до 1000000 включительно одной из этих красок так, чтобы каждые три попарно взаимно простых числа были одного цвета. Докажите, что Васе придётся покрасить все числа одним цветом. Напомним, что три числа* попарно взаимно просты*, если у каждых двух из них наибольший общий делитель равен 1.* (С. Берлов, в редакции А. Голованова)

Первое решение. Будем для краткости называть числа, большие 100 и меньшие 1000000, *хорошими*. Возьмем хорошие простые числа 101, 103 и 107. Так как они попарно взаимно просты, то должны быть покрашены в один цвет (пусть синий). Заменяя одно из них на всевозможные другие хорошие простые числа, убеждаемся, что все хорошие простые числа покрашены в синий цвет. Возьмем произвольное хорошее число n. Оно не делится хотя бы на одно из чисел 101, 103 и 107 (обозначим его через k), так как $101\times103\times107 > 1000000$ и, по той же причине, хотя бы на одно из трех следующих за ними хороших простых чисел (обозначим его через m). Тогда числа n, k, m попарно взаимно просты, и так как числа k и m синие, число n тоже должно быть синим. **Второе решение**. Любая тройка вида $(2n–1, 2n, 2n+1)$ состоит из попрано взаимно простых чисел. Поэтому в любой такой тройке все числа должны быть одного цвета. Покроем все числа от 101 до 999999 тройками такого вида: (101, 102, 103), (103, 104, 105), …, (999997, 999998, 999999). Так как любые две соседние тройки имеют общий элемент, все эти числа должны быть одного цвета (пусть синего). Числа 100 и 1000000 тоже синие, так как они входят в тройки (100, 101, 103) и (1000000, 101, 103), в которых есть синие числа.

Критерии оценки. *Не требуем*: доказательства простоты используемых в решениях простых чисел; доказательства существования трех простых чисел, больших 103. Но если одно из чисел, используемых как простые, на самом деле составное — *снимается 1 балл*. Доказано только, что все простые числа покрашены в один цвет — *2 балла*. Без доказательства используется утверждение, что любые *два* взаимно простых числа одноцветны — *не более 2 баллов*.

8. *На рисунке изображён автодром; точки — это перекрёстки, отрезки — дороги. Каждый отрезок между соседними точками машина проезжает ровно за минуту. Приехав на перекрёсток, машина немедленно уезжает с него по любой дороге, кроме той, по которой она приехала. Сначала несколько машин расположены на перекрёстках, затем они одновременно начинают двигаться по указанным правилам. При каком наибольшем количестве машин может случиться, что они смогут неограниченно долго ездить, никогда не встречаясь (ни на перекрёстках, ни на дорогах)?* (И. Богданов)



Ответ. 36 машин. **Решение**. Пример. Запустим одностороннее движение 36 машин по верхнему и нижнему треугольникам. Оценка. Каждая машина не реже одного раза в 6 минут будет оказываться на одном из шести перекрестков, где сходятся три дороги. Значит, за любые 6 минут подряд каждая машина побывает на одном из таких перекрестков, и потому машин не больше, чем $6\cdot6 = 36$.

Критерии оценки. Только ответ — *0 баллов*. Только ответ с примером — *1 балл*.

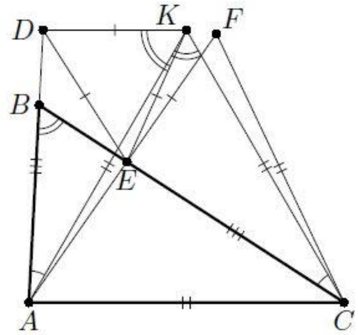
9. *Для каких натуральных n найдутся такие целые числа a, b, c, d, большие, чем* 10^{2026}, *что* $a^2+b^2 = c^2+d^2$ *и* $a+b–c–d = n$? (С. Суровцев)

Ответ. Для всех четных n, и только для них. **Решение**. Так как для любого целого k числа $–k$ и k^2 имеют ту же четность, что и k, число $a+b–c–d$ имеет ту же четность, что и $a^2+b^2 + c^2+d^2 = 2(a^2+b^2)$. Значит, число n должно быть четным.

Пусть n четно. Положив $x = a–c$, $y=a+c$, $z = d–b$, $t = d+b$, перепишем условие в виде $xy = zt$ и $x–z = n$. Примем за x любое четное число, большее, чем $2n+10^{2026}$, и положим $z = x–n$, $y = 2z$, $t = 2x$. Легко видеть, что все условия задачи выполнены.

Критерии оценки. Только ответ — *0 баллов*. Только доказана четность числа n — *1 балл*. Выражение условия задачи через разности (см. решение выше) без дальнейшего содержательного продвижения — *2 балла*. Баллы по двум предыдущим критериям *суммируются*.

10. *Дан треугольник ABC, в котором ∠B = 60°. На продолжении стороны AB за точку B отмечена точка D, а на стороне BC — точка E, причем AD = CE. На продолжении отрезка AE за точку E нашлась такая точка F, что AC = CF и DE = EF. Найдите углы треугольника DEF (укажите все возможные варианты).* (М. Федотова, в редакции А. Кузнецова)



Ответ. Все углы по 60°. **Решение**. Из условия следует, что $AB < AD = CE < CB$. Значит, $\angle ACB < \angle CAB$. Поэтому $\angle ACB < 60°$ — иначе сумма углов треугольника ABC была бы больше 180°. Построим на отрезке AC равносторонний треугольник ACK так, что точки K и B лежат с одной стороны от прямой AC. Так как $\angle ACB < 60°$, точки F и K лежат с одной стороны от прямой BC.

Поскольку $\angle KCA+\angle KAC = 120° = \angle BCA+\angle BAC$, получаем, что

$$\angle KCE = \angle KCA–\angle BCA = \angle BAC–\angle KAC = \angle DAK.$$

Поскольку $KA = KC$ и $DA = EC$, треугольники KCE и KAD равны по двум сторонам и углу между ними, откуда $KE = KD$ и $\angle EKC = \angle DKA$. Значит,

$$\angle DKE = \angle DKC–\angle EKC = \angle DKC–\angle DKA = \angle AKC = 60°,$$

и треугольник DEK также равносторонний. Но тогда $EK = ED = EF$ и $CK = CA = CF$, то есть треугольники ECF и ECK равны по трём сторонам. Поскольку K и F лежат по одну сторону от BC, отсюда следует, что точки K и F совпадают, и треугольник DEF равносторонний, то есть его углы равны 60°.

Замечание. Ради наглядности на чертеже не соблюдены некоторые пропорции.

Критерии оценки. Введена точка K, дальнейшего содержательного продвижения нет — *2 балла*. Решение требует разбора двух аналогичных случаев, из которых разобран только один — *минус 1 балл*.