МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -1, а $f(0) = 11$. (Сами числа a, b и c не даны.)

2. [4 балла] Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по два раза, а каждая из остальных цифр — не более одного раза?

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(5y - x) \cdot \log_y(5x - y) = 4, \\ \log_x(5x - y) + \log_y(5y - x) = 4. \end{cases}$$

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 24$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 13.

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left(1 - \cos x \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 - \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{8} + \left(2 \sin 2x - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant 0.$$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = 5$, $SB = 2\sqrt{5}$, $SA = SC = 3\sqrt{5}$, $SD = 2\sqrt{10}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 2(x - a) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -7, а $f(0) = 5$. (Сами числа a, b и c не даны.)

2. [4 балла] Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по три раза, а остальные цифры — не более одного раза?

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(4y-x)\cdot\log_y(4x-y)=4, \\ \log_x(4x-y)+\log_y(4y-x)=4. \end{cases}$$

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 30$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 17.

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$-\left(1-\sin x\sin\frac{\pi}{8}\right)^2+\cos^2 x\cos^2\frac{\pi}{8}-\left(2\cos 2x-\sqrt{2}\right)^2\geqslant 0.$$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{14}$, $SB = 2$, $SA = SC = 3\sqrt{2}$, $SD = 2\sqrt{2}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+14y+42=0, \\ (|x|-|x-a|-a)y=6(a-x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -1, а $f(0) = 26$. (Сами числа a, b и c не даны.)

2. [4 балла] Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 4, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по два раза, а остальные цифры — не более одного раза?

3. [4 балла] Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \log_x(7y - x) \cdot \log_y(7x - y) = 4, \\ \log_x(7x - y) + \log_y(7y - x) = 4. \end{cases}$$

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 80$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 41.

5. [5 баллов] Решите неравенство
$$\left(1 - \cos x \cos \frac{\pi}{6}\right)^2 - \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{6} + (2 \cos 2x - 1)^2 \leqslant 0.$$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{5}$, $SB = 2$, $SA = SC = 3$, $SD = 2\sqrt{2}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x - 10y + 20 = 0, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 4(x - a) \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -4, а $f(0) = 23$. (Сами числа a, b и c не даны.)

2. [4 балла] Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по три раза, а остальные цифры — не более одного раза?

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(6y - x) \cdot \log_y(6x - y) = 4, \\ \log_x(6x - y) + \log_y(6y - x) = 4. \end{cases}$$

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 48$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 25.

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$-\left(1 - \sin x \sin \frac{\pi}{6}\right)^2 + \cos^2 x \cos^2 \frac{\pi}{6} - \left(2 \sin 2x - \sqrt{3}\right)^2 \geqslant 0.$$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{7}$, $SB = \sqrt{2}$, $SA = SC = 3$, $SD = 2$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 2(a - x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Известно, что если уменьшить каждый из корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на 3, полученные числа будут корнями уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Каждый из четырёх корней этих двух уравнений увеличили на 1. Найдите произведение полученных четырёх чисел. (Сами числа b и c не даны.)

2. [4 балла] Назовем число *забавным*, если в нем чередуются чётные и нечётные цифры. Сколькими способами можно заменить звёздочки на цифры в равенстве $2{*}{*}{*} + 3{*}{*}{*} = {*}{*}{*}{*}$ так, чтобы получилось верное равенство с тремя забавными четырёхзначными числами?

3. [5 баллов] Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2 - x) + \log_{(x-1)^2}(x^2 - x) \geqslant \dfrac{9}{4}$.

4. [4 балла] В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC, угол ACD прямой. Сфера с диаметром BD пересекает повторно рёбра AD, AB и CD в точках E, F и C соответственно. Найдите объём пирамиды $EACF$, если $AB = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{3}$.

5. [5 баллов] Решите уравнение
$$\cos 4x - 6\sqrt{2}\sin x - 4\sin 2x + 6\sqrt{2}\cos x = 15.$$

6. [6 баллов] В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, а точки D, E и F лежат на сторонах CA, AB и BC соответственно, причем $BE = ED = DF = FB = 10$. Отрезки AF и CE пересекаются в точке X. Найдите длину XA, если $XF = 4$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x + \dfrac{y^2}{x} = \min\left(6 + \dfrac{8y}{x}; 8 - \dfrac{6y}{x}\right), \\ y = ax - 7a + 1 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Известно, что если увеличить каждый из корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на 4, полученные числа будут корнями уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Каждый из четырёх корней этих двух уравнений увеличили на 1. Найдите произведение полученных четырёх чисел. (Сами числа b и c не даны.)

2. [4 балла] Назовем число *забавным*, если в нем чередуются чётные и нечётные цифры. Сколькими способами можно заменить звёздочки на цифры в равенстве $2{*}{*}{*} + 4{*}{*}{*} = {*}{*}{*}{*}$ так, чтобы получилось верное равенство с тремя забавными четырёхзначными числами?

3. [5 баллов] Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2+2x) + \log_{(x+2)^2}(x^2+2x) \geqslant \dfrac{9}{4}$.

4. [4 балла] В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC, углы ACD и BCD прямые. Сфера с диаметром BD пересекает повторно рёбра AD и AB в точках E и F соответственно. Найдите объём пирамиды $EACF$, если $AB = 2\sqrt{2}$, $CD = 2\sqrt{3}$.

5. [5 баллов] Решите уравнение
$$9 - \cos 4x + 3\sqrt{2}\sin x - 4\sin 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0.$$

6. [6 баллов] В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, а точки D, E и F лежат на сторонах CA, AB и BC соответственно, причем $BE = ED = DF = FB = 30$. Отрезки AF и CE пересекаются в точке X. Найдите длину XA, если $XF = 18$.

7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} x + \dfrac{y^2}{x} = \min\left(10 + \dfrac{24y}{x}; 24 - \dfrac{10y}{x}\right), \\ y = ax - 17a + 7 \end{cases}$$
имеет ровно два решения.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 1

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -1, а $f(0) = 11$. (Сами числа a, b и c не даны.)

Ответ: 14.

Решение. По условию

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) =$$
$$= 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca).$$

Наименьшее значение трёхчлена равно $f(x_0)$, где $x_0 = \dfrac{a+b+c}{3}$. Имеем:

$$f(x_0) = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - 2(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + (ab+bc+ca) =$$
$$= -\frac{1}{3}(a+b+c)^2 + (ab+bc+ca) = -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) + ab+bc+ca =$$
$$= -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{3}(ab+bc+ca) = -1.$$

С другой стороны, $f(0) = ab+bc+ca = 11$. Значит, $a^2+b^2+c^2 = 11 - 3\cdot(-1) = 14$.

2. [4 балла] Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по два раза, а каждая из остальных цифр — не более одного раза?

Ответ: $C_7^4 C_4^2 \dfrac{6!}{(2!)^2} - C_6^3 C_3^2 \dfrac{5!}{(2!)^2} - C_6^3 C_3^1 \dfrac{5!}{2!} = 32400$.

Решение. Искомое количество чисел равно

$$N = N_1 - N_2 - N_3,$$

где

- N_1 — количество таких чисел без учёта того, что цифра 0 не может стоять в начале;
- N_2 — количество таких чисел с учётом, что цифра 0 содержится в числе ровно один раз и стоит на первом месте;
- N_3 — количество таких чисел с учётом, что цифра 0 содержится в числе ровно два раза и одна из них стоит на первом месте.

Вычислим N_1. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, равно C_7^4, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из четырех выбранных — C_4^2, количество способов расставить выбранные цифры по шести местам — $\dfrac{6!}{2!\,2!}$, поэтому

$$N_1 = C_7^4 \cdot C_4^2 \cdot \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{6!}{2!\,2!} = 37800.$$

Вычислим N_2. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, помимо нуля, равно C_6^3, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из трёх выбранных — C_3^2, количество способов расставить выбранные цифры по пяти местам (места для цифр в шестизначном числе, кроме первого места, где стоит 0) — это $\frac{5!}{2!\,2!}$, следовательно,

$$N_2 = C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot \frac{5!}{2!\,2!} = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{2!\,2!} = 1800.$$

Аналогично вычисляется N_3:

$$N_3 = C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot \frac{5!}{2!} = 3600.$$

Окончательно получаем:

$$N = 37800 - 1800 - 3600 = 32400.$$

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(5y-x)\cdot\log_y(5x-y) = 4, \\ \log_x(5x-y)+\log_y(5y-x) = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(3+\sqrt{3}; 3-\sqrt{3}\right)$, $\left(3-\sqrt{3}; 3+\sqrt{3}\right)$, $(4;4)$.

Решение. ОДЗ исходной системы есть $x>0, x\neq 1, y>0, y\neq 1, 5y-x>0, 5x-y>0$.

Воспользуемся формулой $\log_a c\cdot\log_b d = \log_a d\cdot\log_b c$ и перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} \log_x(5x-y)\cdot\log_y(5y-x) = 4, \\ \log_x(5x-y)+\log_y(5y-x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_x(5x-y) = 2, \\ \log_y(5y-x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 5x-y, \\ y^2 = 5y-x. \end{cases}$$

Последняя система имеет четыре решения: $(0;0)$, $\left(3+\sqrt{3}; 3-\sqrt{3}\right)$, $\left(3-\sqrt{3}; 3+\sqrt{3}\right)$, $(4;4)$. Пара $(0;0)$ не лежит в ОДЗ исходной системы.

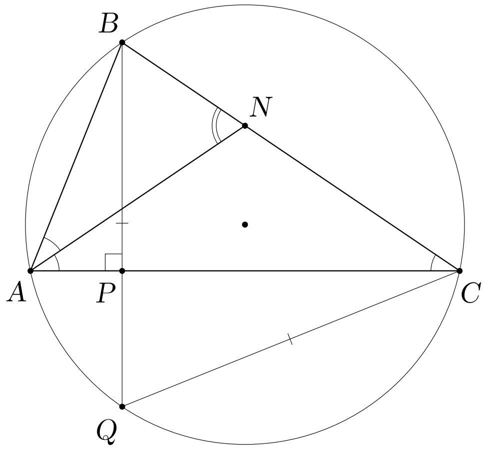
4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC=24$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 13.

Ответ: 216.

Решение. Поскольку продолжение высоты BP за точку P пересекает описанную окружность, углы A и C — острые. Обозначим $\angle BAN = \alpha$. По условию $\angle ANB = 2\alpha$. Данный угол является внешним для треугольника ANC, причём $\angle NAC = \alpha$, поэтому $\angle NCA = \angle ANB - \angle NAC = \alpha$. Из прямоугольного треугольника BPC находим $\angle CBP = 90^\circ - \angle BCP = 90^\circ - \alpha$. Вписанные углы QCA и QBA опираются на одну дугу, а $\angle QBA = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 2\alpha$, поэтому

$$\angle QCB = \angle QCA + \angle ACB = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha = \angle QBC.$$

Итак, треугольник BCQ — равнобедренный, а $\angle BQC = 2\alpha$. Пусть R — радиус окружности. По теореме синусов



$$\sin 2\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{12}{13},$$

откуда $\cos 2\alpha = \dfrac{5}{13}$. Площадь треугольника BQC равна

$$S_{BQC} = \frac{1}{2}BQ^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2\cos\angle CBQ}\right)^2 \sin 2\alpha =$$

$$= BC^2 \frac{\sin 2\alpha}{8\sin^2\alpha} = BC^2 \frac{\sin 2\alpha}{4(1-\cos 2\alpha)} = 216.$$

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left(1 - \cos x \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 - \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{8} + \left(2\sin 2x - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant 0.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выражение

$$\left(1 - \cos x \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 - \sin^2 x \sin^2 \frac{\pi}{8}$$

приводится к полному квадрату $\left(\cos x - \cos \dfrac{\pi}{8}\right)^2$, поэтому неравенство принимает вид

$$\left(\cos x - \cos \frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(2\sin 2x - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant 0.$$

В силу неотрицательности обоих слагаемых в левой части данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = \cos \dfrac{\pi}{8}, \\ \sin 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

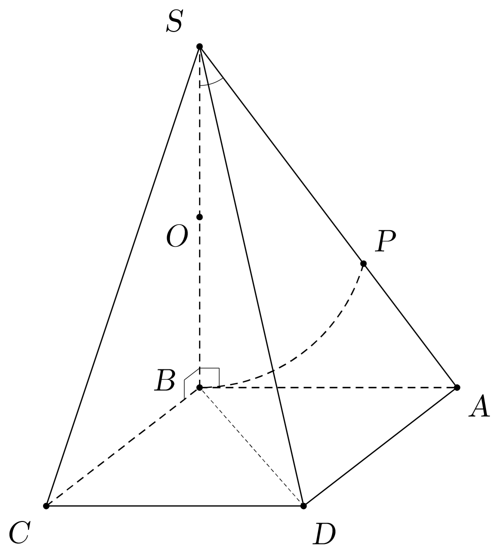
откуда $x = \dfrac{\pi}{8} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = 5$, $SB = 2\sqrt{5}$, $SA = SC = 3\sqrt{5}$, $SD = 2\sqrt{10}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

Ответ: $4\sqrt{5}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{5}{3}\pi$.

Решение. Заметим, что треугольники SBC и SBA — прямоугольные с прямым углом B, поэтому ребро SB есть высота пирамиды. А в прямоугольном треугольнике SBD гипотенуза SD в $\sqrt{2}$

больше катета SB, поэтому этот треугольник равнобедренный, и $SB = BD$. Сфера ω пересекает грани пирамиды по дугам окружностей. В силу симметрии относительно плоскости SBD дуги в гранях SBA и SBC равны между собой. Аналогично равны и дуги в гранях SAD и SCD. Рассмотрим сначала грань SBA.



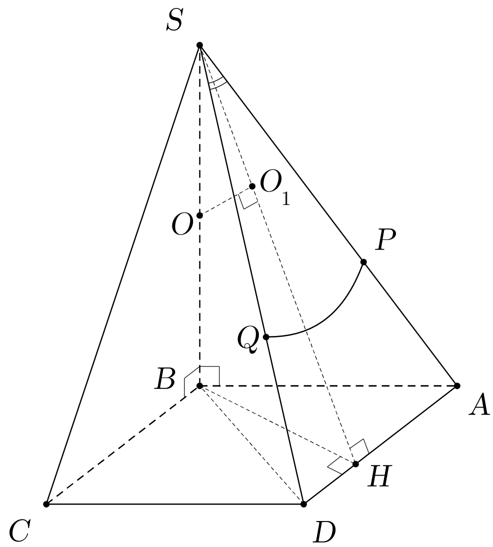
Грань SBA проходит через центр ω, а AB касается этой сферы, поэтому искомая дуга BP есть дуга окружности, построенной на SB как на диаметре, попадающая внутрь прямоугольного треугольника SBA. Её длина (обозначим её через L_1) равна произведению радиуса $r_1 = \dfrac{SB}{2}$ на удвоенную (поскольку этот угол является вписанным) радианную меру $\angle BSA$:

$$L_1 = r_1 \cdot 2\angle BSA = \frac{SB}{2} \cdot 2\,\mathrm{arctg}\,\frac{AB}{SB} = 2\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Теперь рассмотрим грань SAD и дугу PQ, по которой сфера ω пересекает эту грань. Обозначим её длину через L_2.

Величина L_2 равна произведению радиуса r_2 окружности, лежащей в пересечении сферы ω с плоскостью SAD, на удвоенную радианную меру вписанного $\angle ASD$, опирающегося на дугу PQ. Найдем этот угол с помощью теоремы косинусов:

$$\cos\angle ASD = \frac{SA^2 + SD^2 - AD^2}{2SA \cdot SD} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$



Значит, $\angle ASD = \dfrac{\pi}{4}$.
Теперь вычислим радиус r_2, найдя расстояние от центра сферы O до плоскости SAD. Пусть BH — высота треугольника BAD. Поскольку $SB \perp (ABD)$, по теореме о трёх перпендикулярах $SH \perp AD$. Значит, плоскость SBH перпендикулярна прямой AD. Поэтому плоскости SBH и SAD перпендикулярны. Пусть O_1 — точка на отрезке SH такая, что $OO_1 \perp SH$. Поскольку прямая OO_1 лежит в плоскости SBH, $OO_1 \perp AD$. Значит, $OO_1 \perp (SAD)$. Следовательно, длина отрезка OO_1 равна расстоянию от точки O до плоскости SAD. Радиус r_2 равен

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - OO_1^2} = \sqrt{OS^2 - OO_1^2} = SO_1.$$

Из подобных прямоугольных треугольников SOO_1 и SHB находим $SO_1 = SO \cdot \dfrac{SB}{SH}$. Выражая двумя способами площадь треугольника SAD, получаем

$$SH \cdot AD = SA \cdot SD \cdot \sin\frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; SH = 6.$$

Итак, $r_2 = SO_1 = SO \cdot \dfrac{SB}{SH} = \dfrac{2\sqrt{5}}{2} \cdot \dfrac{2\sqrt{5}}{6} = \dfrac{5}{3}$. Поэтому

$$L_2 = r_2 \cdot 2\angle ASD = \frac{5}{3} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно находим искомую длину линии

$$L = 2L_1 + 2L_2 = 4\sqrt{5}\,\mathrm{arctg}\,\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{5}{3}\pi.$$

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2x - 6y + 6 = 0, \\ (|x| - |x-a| - a)y = 2(x-a) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \left(\frac{3}{4}; 1\right] \cup \{3\}$.

Решение.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x-1)^2 + (y-3)^2 = 4. \qquad (1)$$

Это уравнение окружности с центром $(1;3)$ и радиусом 2.

Рассмотрим второе уравнение системы.

- При $x \geqslant a$ уравнение

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(x-a) \quad \Longleftrightarrow \quad (x - (x-a) - a)y = 2(x-a) \quad \Longleftrightarrow \quad x = a \qquad (2)$$

  задаёт вертикальную прямую. Эта прямая пересекает окружность (1) в двух точках при $a \in (0;3)$, касается данной окружности в одной точке при $a = 3$ и не пересекает её при $a > 3$.

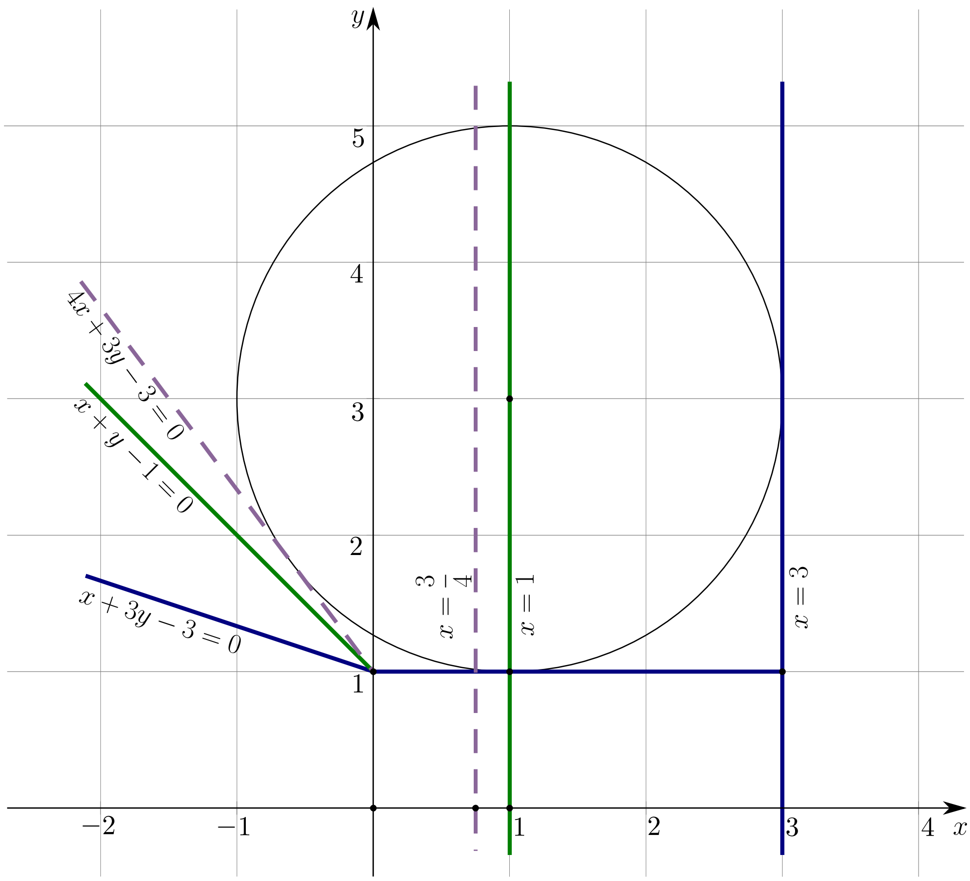
- При $x \in [0;a)$ уравнение

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(x-a) \quad \Longleftrightarrow \quad (x + (x-a) - a)y = 2(x-a) \quad \Longleftrightarrow \quad y = 1$$

  с учётом ограничений на x задаёт полуинтервал

$$\{(x;y) \mid x \in [0;a),\ y = 1\}. \qquad (3)$$

  Этот полуинтервал имеет с окружностью (1) ровно одну общую точку при $a > 1$, и не пересекает её при $0 < a \leqslant 1$.



- При $x < 0$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 2(x-a) \quad \Longleftrightarrow \quad (-x + (x-a) - a)y = 2(x-a) \quad \Longleftrightarrow \quad x + ay - a = 0.$$

Полученное уравнение с учётом ограничений на x задаёт луч

$$\{(x;y) \mid x < 0,\, x + ay - a = 0\}. \tag{4}$$

Этот луч касается окружности (1) при

$$\frac{|1 + 3a - a|}{\sqrt{1+a^2}} = 2 \quad \Longleftrightarrow \quad 4a^2 + 4a + 1 = 4 + 4a^2 \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{3}{4}.$$

Значит, при $a = \dfrac{3}{4}$ луч касается окружности, при $a \in \left(0; \dfrac{3}{4}\right)$ — пересекает её в двух точках, а при $a > \dfrac{3}{4}$ — не имеет с ней общих точек.

Итак, исходная система имеет ровно два решения в двух случаях:

1) окружность (1) пересекает имеет две общие точки с одним из множеств: прямой (2), полуинтервалом (3), лучом (4), и не пересекается с двумя другими;

2) окружность (1) имеет по одной общей точке с двумя из трёх множеств, а с оставшимся третьим — не пересекается.

Первый случай реализуется при $a \in \left(\dfrac{3}{4}, 1\right]$, а второй — при $a = 3$. Получаем искомое множество значений параметра $a \in \left(\dfrac{3}{4}; 1\right] \cup \{3\}$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 2

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -7, а $f(0) = 5$. (Сами числа a, b и c не даны.)

Ответ: 26.

Решение. По условию

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) =$$
$$= 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca).$$

Наименьшее значение трёхчлена равно $f(x_0)$, где $x_0 = \dfrac{a+b+c}{3}$. Имеем:

$$f(x_0) = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - 2(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + (ab+bc+ca) =$$
$$= -\frac{1}{3}(a+b+c)^2 + (ab+bc+ca) = -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) + ab+bc+ca =$$
$$= -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{3}(ab+bc+ca) = -7.$$

С другой стороны, $f(0) = ab+bc+ca = 5$. Значит, $a^2+b^2+c^2 = 5 - 3\cdot(-7) = 26$.

2. [4 балла] Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по три раза, а остальные цифры — не более одного раза?

Ответ: $C_9^3 C_3^2 \dfrac{7!}{(3!)^2} - C_8^2 C_2^2 \dfrac{6!}{(3!)^2} - C_8^2 C_2^1 \dfrac{6!}{3!2!} = 31360.$

Решение. Искомое количество чисел равно

$$N = N_1 - N_2 - N_3,$$

где

- N_1 — количество таких чисел без учёта того, что цифра 0 не может стоять в начале;
- N_2 — количество таких чисел с учётом, что цифра 0 содержится в числе ровно один раз и стоит на первом месте;
- N_3 — количество таких чисел с учётом, что цифра 0 содержится в числе ровно три раза и одна из них стоит на первом месте.

Вычислим N_1. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, равно C_9^3, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из трех выбранных — C_3^2, количество способов расставить выбранные цифры по семи местам — $\dfrac{7!}{3!\,3!}$, поэтому

$$N_1 = C_9^3 \cdot C_3^2 \cdot \frac{7!}{3!\,3!} = \frac{9!}{3!\,6!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{7!}{3!\,3!} = 35280.$$

Вычислим N_2. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, помимо нуля, равно C_8^2, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из двух выбранных — C_2^2, количество способов расставить выбранные цифры по шести местам (места для цифр в семизначном числе, кроме первого места, где стоит 0) — это $\frac{6!}{3!\,3!}$, следовательно,

$$N_2 = C_8^2 \cdot C_2^2 \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{8!}{2!\,6!} \cdot \frac{2!}{2!} \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = 560.$$

Аналогично вычисляется N_3:

$$N_3 = C_8^2 \cdot C_2^1 \cdot \frac{6!}{3!\,2!} = 3360.$$

Окончательно получаем:

$$N = 35280 - 560 - 3360 = 31360.$$

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(4y - x) \cdot \log_y(4x - y) = 4, \\ \log_x(4x - y) + \log_y(4y - x) = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$, $(3; 3)$.

Решение. ОДЗ исходной системы есть $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1, 4y - x > 0, 4x - y > 0$.

Воспользуемся формулой $\log_a c \cdot \log_b d = \log_a d \cdot \log_b c$ и перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} \log_x(4x - y) \cdot \log_y(4y - x) = 4, \\ \log_x(4x - y) + \log_y(4y - x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_x(4x - y) = 2, \\ \log_y(4y - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 4x - y, \\ y^2 = 4y - x. \end{cases}$$

Последняя система имеет четыре решения: $(0; 0)$, $\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}; \frac{5-\sqrt{5}}{2}\right)$, $\left(\frac{5-\sqrt{5}}{2}; \frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)$, $(3; 3)$. Пара $(0; 0)$ не лежит в ОДЗ исходной системы.

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 30$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 17.

Ответ: 375.

Решение. Поскольку продолжение высоты BP за точку P пересекает описанную окружность, углы A и C — острые. Обозначим $\angle BAN = \alpha$. По условию $\angle ANB = 2\alpha$. Данный угол является внешним для треугольника ANC, причём $\angle NAC = \alpha$, поэтому $\angle NCA = \angle ANB - \angle NAC = \alpha$. Из прямоугольного треугольника BPC находим $\angle CBP = 90^\circ - \angle BCP = 90^\circ - \alpha$. Вписанные углы QCA и QBA опираются на одну дугу, а $\angle QBA = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 2\alpha$, поэтому

$$\angle QCB = \angle QCA + \angle ACB = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha = \angle QBC.$$

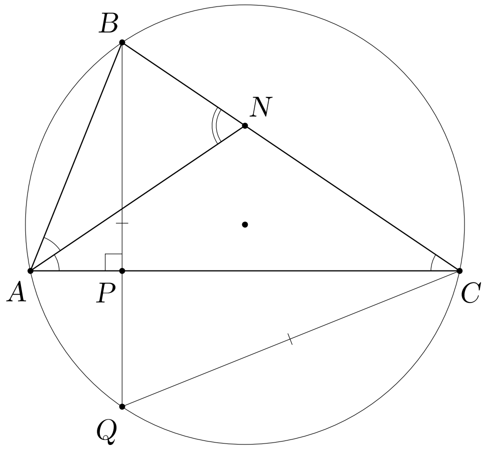
Итак, треугольник BCQ — равнобедренный, а $\angle BQC = 2\alpha$. Пусть R — радиус окружности. По теореме синусов

$$\sin 2\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{15}{17},$$

откуда $\cos 2\alpha = \dfrac{8}{17}$. Площадь треугольника BQC равна

$$S_{BQC} = \frac{1}{2}BQ^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2\cos\angle CBQ}\right)^2 \sin 2\alpha =$$

$$= BC^2 \frac{\sin 2\alpha}{8\sin^2\alpha} = BC^2 \frac{\sin 2\alpha}{4(1-\cos 2\alpha)} = 375.$$



5. [5 баллов] Решите неравенство

$$-\left(1 - \sin x \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 + \cos^2 x \cos^2\frac{\pi}{8} - \left(2\cos 2x - \sqrt{2}\right)^2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{8} + 2\pi k,\ x = \dfrac{7\pi}{8} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Решение. Выражение

$$-\left(1 - \sin x \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 + \cos^2 x \cos^2\frac{\pi}{8}$$

приводится к полному квадрату $-\left(\sin x - \sin\dfrac{\pi}{8}\right)^2$, поэтому неравенство принимает вид

$$\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{8}\right)^2 + \left(2\cos 2x - \sqrt{2}\right)^2 \leqslant 0.$$

В силу неотрицательности обоих слагаемых в левой части данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{8}, \\ \cos 2x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \end{cases}$$

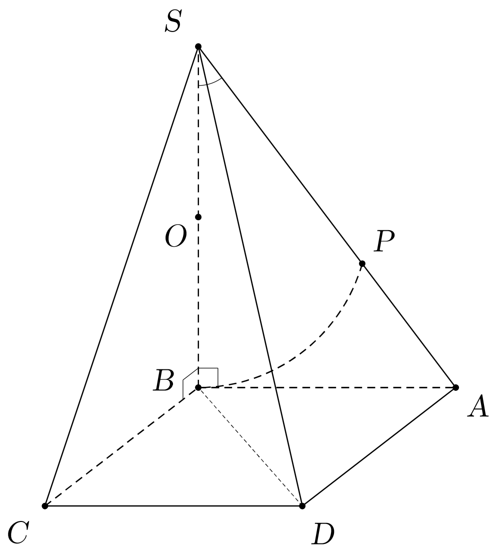
откуда $x = \dfrac{\pi}{8} + 2\pi k,\ x = \dfrac{7\pi}{8} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{14}$, $SB = 2$, $SA = SC = 3\sqrt{2}$, $SD = 2\sqrt{2}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

Ответ: $4\operatorname{arctg}\sqrt{\dfrac{7}{2}} + \dfrac{4}{9}\sqrt{\dfrac{14}{3}}\pi.$

Решение. Заметим, что треугольники SBC и SBA — прямоугольные с прямым углом B, поэтому ребро SB есть высота пирамиды. А в прямоугольном треугольнике SBD гипотенуза SD в $\sqrt{2}$ раз

больше катета SB, поэтому этот треугольник равнобедренный, и $SB = BD$. Сфера ω пересекает грани пирамиды по дугам окружностей. В силу симметрии относительно плоскости SBD дуги в гранях SBA и SBC равны между собой. Аналогично равны и дуги в гранях SAD и SCD. Рассмотрим сначала грань SBA.

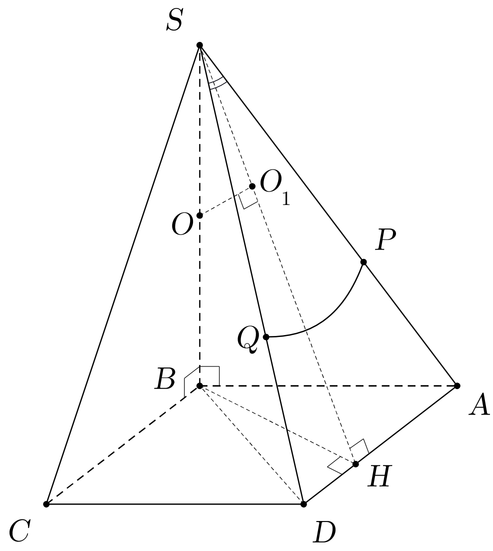


Грань SBA проходит через центр ω, а AB касается этой сферы, поэтому искомая дуга BP есть дуга окружности, построенной на SB как на диаметре, попадающая внутрь прямоугольного треугольника SBA. Её длина (обозначим её через L_1) равна произведению радиуса $r_1 = \dfrac{SB}{2}$ на удвоенную (поскольку этот угол является вписанным) радианную меру $\angle BSA$:

$$L_1 = r_1 \cdot 2\angle BSA = \frac{SB}{2} \cdot 2\operatorname{arctg}\frac{AB}{SB} = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{14}}{2} = 2\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{2}}.$$

Теперь рассмотрим грань SAD и дугу PQ, по которой сфера ω пересекает эту грань. Обозначим её длину через L_2.

Величина L_2 равна произведению радиуса r_2 окружности, лежащей в пересечении сферы ω с плоскостью SAD, на удвоенную радианную меру вписанного $\angle ASD$, опирающегося на дугу PQ. Найдем этот угол с помощью теоремы косинусов:



$$\cos\angle ASD = \frac{SA^2 + SD^2 - AD^2}{2SA \cdot SD} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\angle ASD = \dfrac{\pi}{3}$.

Теперь вычислим радиус r_2, найдя расстояние от центра сферы O до плоскости SAD. Пусть BH — высота треугольника BAD. Поскольку $SB \perp (ABD)$, по теореме о трёх перпендикулярах $SH \perp AD$. Значит, плоскость SBH перпендикулярна прямой AD. Поэтому плоскости SBH и SAD перпендикулярны. Пусть O_1 — точка на отрезке SH такая, что $OO_1 \perp SH$. Поскольку прямая OO_1 лежит в плоскости SBH, $OO_1 \perp AD$. Значит, $OO_1 \perp (SAD)$. Следовательно, длина отрезка OO_1 равна расстоянию от точки O до плоскости SAD. Радиус r_2 равен

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - OO_1^2} = \sqrt{OS^2 - OO_1^2} = SO_1.$$

Из подобных прямоугольных треугольников SOO_1 и SHB находим $SO_1 = SO \cdot \dfrac{SB}{SH}$. Выражая двумя способами площадь треугольника SAD, получаем

$$SH \cdot AD = SA \cdot SD \cdot \sin\frac{\pi}{3} \;\Rightarrow\; SH = 6\sqrt{\frac{3}{14}}.$$

Итак, $r_2 = SO_1 = SO \cdot \dfrac{SB}{SH} = \dfrac{2}{2} \cdot \dfrac{2}{6\sqrt{3/14}} = \dfrac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}}$. Поэтому

$$L_2 = r_2 \cdot 2\angle ASD = \frac{\sqrt{14}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9}\sqrt{\frac{14}{3}}.$$

Окончательно находим искомую длину линии

$$L = 2L_1 + 2L_2 = 4\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{7}{2}} + \frac{4}{9}\sqrt{\frac{14}{3}}\pi.$$

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 14y + 42 = 0, \\ (|x| - |x-a| - a)y = 6(a-x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $\left(\frac{7}{8}, 3\right] \cup \{7\}$.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x-3)^2 + (y+7)^2 = 16. \qquad (5)$$

Это уравнение окружности с центром $(3; -7)$ и радиусом 4.

Рассмотрим второе уравнение системы.

- При $x \geqslant a$ уравнение

$$(|x| - |x-a| - a)y = 6(a-x) \iff (x - (x-a) - a)y = 6(a-x) \iff x = a \qquad (6)$$

задаёт вертикальную прямую. Эта прямая пересекает окружность (5) в двух точках при $a \in (0; 7)$, касается данной окружности в одной точке при $a = 7$ и не пересекает её при $a > 7$.

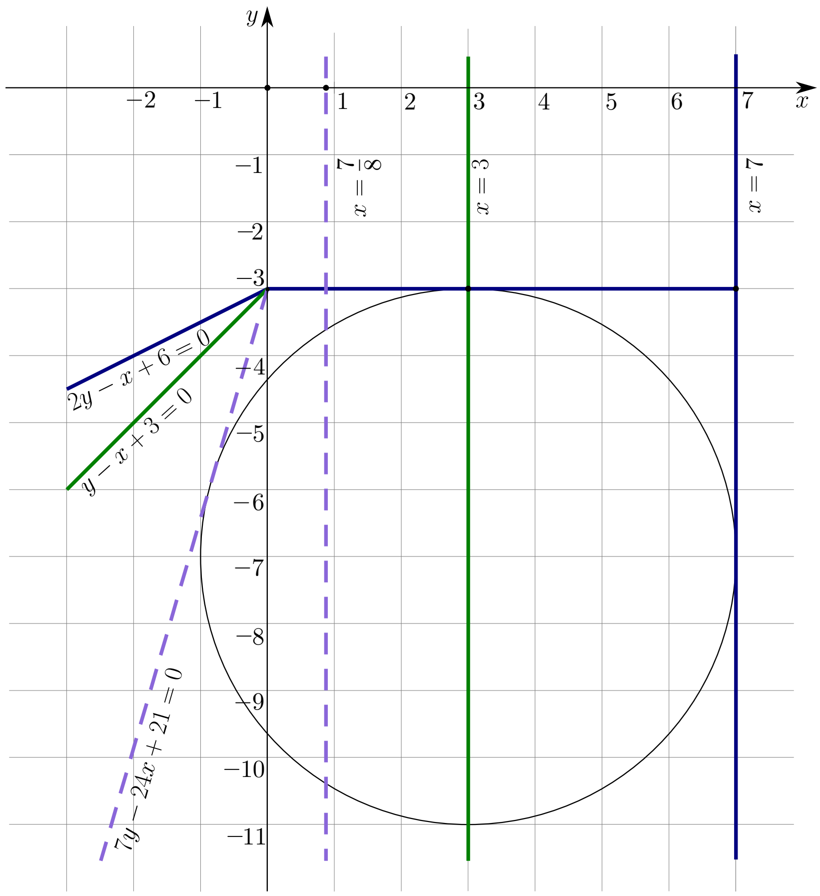
- При $x \in [0; a)$ уравнение

$$(|x| - |x-a| - a)y = 6(a-x) \iff (x + (x-a) - a)y = -6(x-a) \iff y = -3$$

с учётом ограничений на x задаёт полуинтервал

$$\{(x; y) \mid x \in [0; a),\ y = -3\}. \qquad (7)$$

Этот полуинтервал имеет с окружностью (5) ровно одну общую точку при $a > 3$, и не пересекает её при $0 < a \leqslant 3$.



- При $x < 0$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 6(a-x) \quad \Longleftrightarrow \quad (-x + (x-a) - a)y = 6(a-x) \quad \Longleftrightarrow \quad 3x - ay - 3a = 0.$$

  Полученное уравнение с учётом ограничений на x задаёт луч

$$\{(x;y) \mid x < 0,\, 3x - ay - 3a = 0\}. \tag{8}$$

  Этот луч касается окружности (5) при

$$\frac{|9 + 7a - 3a|}{\sqrt{9+a^2}} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad 16a^2 + 72a + 81 = 16(9+a^2) \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{7}{8}.$$

  Значит, при $a = \dfrac{7}{8}$ луч касается окружности, при $a \in \left(0; \dfrac{7}{8}\right)$ — пересекает её в двух точках, а при $a > \dfrac{7}{8}$ — не имеет с ней общих точек.

Итак, исходная система имеет ровно два решения в двух случаях:

1) окружность (5) пересекает имеет две общие точки с одним из множеств: прямой (6), полуинтервалом (7), лучом (8), и не пересекается с двумя другими;

2) окружность (5) имеет по одной общей точке с двумя из трёх множеств, а с оставшимся третьим — не пересекается.

Первый случай реализуется при $a \in \left(\dfrac{7}{8}, 3\right]$, а второй — при $a = 7$. Получаем искомое множество значений параметра $a \in \left(\dfrac{7}{8}; 3\right] \cup \{7\}$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 3

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -1, а $f(0) = 26$. (Сами числа a, b и c не даны.)

Ответ: 29.

Решение. По условию

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) =$$
$$= 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca).$$

Наименьшее значение трёхчлена равно $f(x_0)$, где $x_0 = \dfrac{a+b+c}{3}$. Имеем:

$$f(x_0) = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - 2(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + (ab+bc+ca) =$$
$$= -\frac{1}{3}(a+b+c)^2 + (ab+bc+ca) = -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) + ab+bc+ca =$$
$$= -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{3}(ab+bc+ca) = -1.$$

С другой стороны, $f(0) = ab+bc+ca = 26$. Значит, $a^2+b^2+c^2 = 26 - 3\cdot(-1) = 29$.

2. [4 балла] Сколько шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 2, 3, 4, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по два раза, а остальные цифры — не более одного раза?

Ответ: $C_7^4 C_4^2 \dfrac{6!}{(2!)^2} - C_6^3 C_3^2 \dfrac{5!}{(2!)^2} - C_6^3 C_3^1 \dfrac{5!}{2!} = 32400$.

Решение. Искомое количество чисел равно

$$N = N_1 - N_2 - N_3,$$

где

- N_1 — количество таких чисел без учёта того, что цифра 0 не может стоять в начале;
- N_2 — количество таких чисел с учётом, что цифра 0 содержится в числе ровно один раз и стоит на первом месте;
- N_3 — количество таких чисел с учётом, что цифра 0 содержится в числе ровно два раза и одна из них стоит на первом месте.

Вычислим N_1. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, равно C_7^4, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из четырех выбранных — C_4^2, количество способов расставить выбранные цифры по шести местам — $\dfrac{6!}{2!\,2!}$, поэтому

$$N_1 = C_7^4 \cdot C_4^2 \cdot \frac{6!}{2!\,2!} = \frac{7!}{4!\,3!} \cdot \frac{4!}{2!\,2!} \cdot \frac{6!}{2!\,2!} = 37800.$$

Вычислим N_2. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, помимо нуля, равно C_6^3, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из трёх выбранных — C_3^2, количество способов расставить выбранные цифры по пяти местам (места для цифр в шестизначном числе, кроме первого места, где стоит 0) — это $\frac{5!}{2!\,2!}$, следовательно,

$$N_2 = C_6^3 \cdot C_3^2 \cdot \frac{5!}{2!\,2!} = \frac{6!}{3!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!} \cdot \frac{5!}{2!\,2!} = 1800.$$

Аналогично вычисляется N_3:

$$N_3 = C_6^3 \cdot C_3^1 \cdot \frac{5!}{2!} = 3600.$$

Окончательно получаем:

$$N = 37800 - 1800 - 3600 = 32400.$$

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(7y - x) \cdot \log_y(7x - y) = 4, \\ \log_x(7x - y) + \log_y(7y - x) = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(4 + 2\sqrt{2}; 4 - 2\sqrt{2}\right)$, $\left(4 - 2\sqrt{2}; 4 + 2\sqrt{2}\right)$, $(6; 6)$.

Решение. ОДЗ исходной системы есть $x > 0, x \neq 1, y > 0, y \neq 1, 7y - x > 0, 7x - y > 0$.

Воспользуемся формулой $\log_a c \cdot \log_b d = \log_a d \cdot \log_b c$ и перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} \log_x(7x - y) \cdot \log_y(7y - x) = 4, \\ \log_x(7x - y) + \log_y(7y - x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_x(7x - y) = 2, \\ \log_y(7y - x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 7x - y, \\ y^2 = 7y - x. \end{cases}$$

Последняя система имеет четыре решения: $(0; 0)$, $\left(4 + 2\sqrt{2}; 4 - 2\sqrt{2}\right)$, $\left(4 - 2\sqrt{2}; 4 + 2\sqrt{2}\right)$, $(6; 6)$. Пара $(0; 0)$ не лежит в ОДЗ исходной системы.

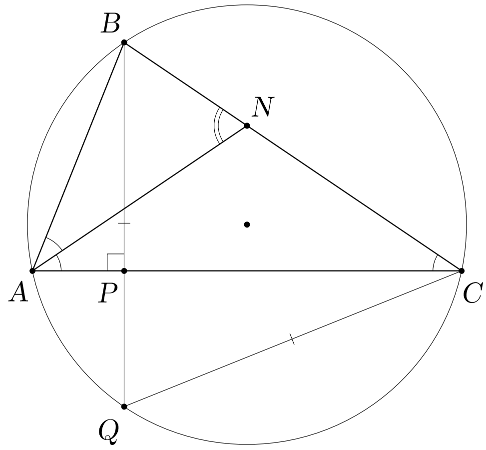
4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC = 80$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 41.

Ответ: 2000.

Решение. Поскольку продолжение высоты BP за точку P пересекает описанную окружность, углы A и C — острые. Обозначим $\angle BAN = \alpha$. По условию $\angle ANB = 2\alpha$. Данный угол является внешним для треугольника ANC, причём $\angle NAC = \alpha$, поэтому $\angle NCA = \angle ANB - \angle NAC = \alpha$. Из прямоугольного треугольника BPC находим $\angle CBP = 90^\circ - \angle BCP = 90^\circ - \alpha$. Вписанные углы QCA и QBA опираются на одну дугу, а $\angle QBA = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 2\alpha$, поэтому

$$\angle QCB = \angle QCA + \angle ACB = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha = \angle QBC.$$

Итак, треугольник BCQ — равнобедренный, а $\angle BQC = 2\alpha$. Пусть R — радиус окружности. По теореме синусов



$$\sin 2\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{40}{41},$$

откуда $\cos 2\alpha = \dfrac{9}{41}$. Площадь треугольника BQC равна

$$S_{BQC} = \frac{1}{2}BQ^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2\cos\angle CBQ}\right)^2 \sin 2\alpha =$$

$$= BC^2 \frac{\sin 2\alpha}{8\sin^2\alpha} = BC^2 \frac{\sin 2\alpha}{4(1-\cos 2\alpha)} = 2000.$$

5. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left(1 - \cos x \cos\frac{\pi}{6}\right)^2 - \sin^2 x \sin^2\frac{\pi}{6} + (2\cos 2x - 1)^2 \leqslant 0.$$

Ответ: $\pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выражение

$$\left(1 - \cos x \cos\frac{\pi}{6}\right)^2 - \sin^2 x \sin^2\frac{\pi}{6}$$

приводится к полному квадрату $\left(\cos x - \cos\dfrac{\pi}{6}\right)^2$, поэтому неравенство принимает вид

$$\left(\cos x - \cos\frac{\pi}{6}\right)^2 + (2\cos 2x - 1)^2 \leqslant 0.$$

В силу неотрицательности обоих слагаемых в левой части данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x = \cos\dfrac{\pi}{6}, \\ \cos 2x = \dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

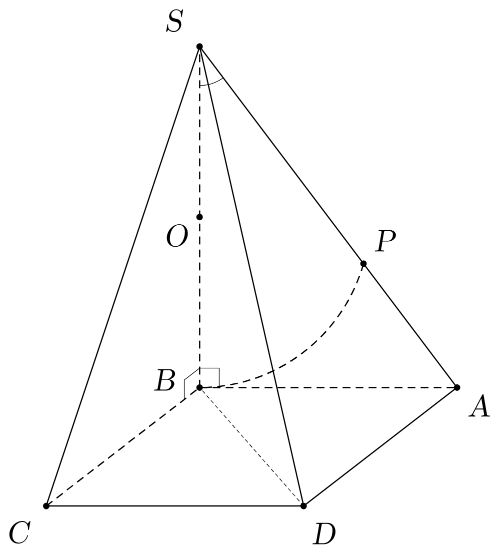
откуда $x = \pm\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{5}$, $SB = 2$, $SA = SC = 3$, $SD = 2\sqrt{2}$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

Ответ: $4\,\mathrm{arctg}\,\dfrac{\sqrt{5}}{2} + \dfrac{\sqrt{5}}{3}\pi$.

Решение. Заметим, что треугольники SBC и SBA — прямоугольные с прямым углом B, поэтому ребро SB есть высота пирамиды. А в прямоугольном треугольнике SBD гипотенуза SD в $\sqrt{2}$

больше катета SB, поэтому этот треугольник равнобедренный, и $SB = BD$. Сфера ω пересекает грани пирамиды по дугам окружностей. В силу симметрии относительно плоскости SBD дуги в гранях SBA и SBC равны между собой. Аналогично равны и дуги в гранях SAD и SCD. Рассмотрим сначала грань SBA.

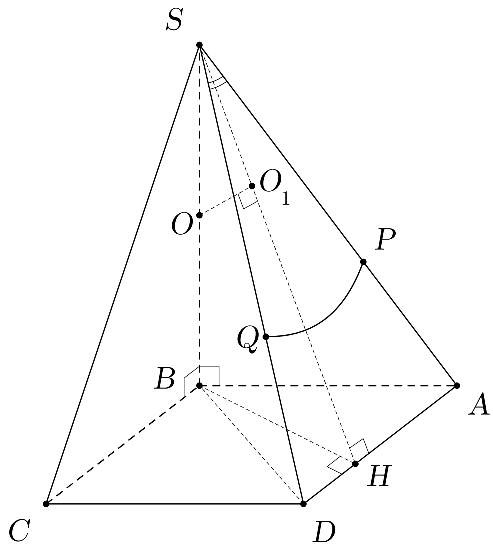


Грань SBA проходит через центр ω, а AB касается этой сферы, поэтому искомая дуга BP есть дуга окружности, построенной на SB как на диаметре, попадающая внутрь прямоугольного треугольника SBA. Её длина (обозначим её через L_1) равна произведению радиуса $r_1 = \dfrac{SB}{2}$ на удвоенную (поскольку этот угол является вписанным) радианную меру $\angle BSA$:

$$L_1 = r_1 \cdot 2\angle BSA = \frac{SB}{2} \cdot 2\operatorname{arctg}\frac{AB}{SB} = 2\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Теперь рассмотрим грань SAD и дугу PQ, по которой сфера ω пересекает эту грань. Обозначим её длину через L_2.

Величина L_2 равна произведению радиуса r_2 окружности, лежащей в пересечении сферы ω с плоскостью SAD, на удвоенную радианную меру вписанного $\angle ASD$, опирающегося на дугу PQ. Найдем этот угол с помощью теоремы косинусов:



$$\cos\angle ASD = \frac{SA^2 + SD^2 - AD^2}{2SA \cdot SD} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Значит, $\angle ASD = \dfrac{\pi}{4}$.

Теперь вычислим радиус r_2, найдя расстояние от центра сферы O до плоскости SAD. Пусть BH — высота треугольника BAD. Поскольку $SB \perp (ABD)$, по теореме о трёх перпендикулярах $SH \perp AD$. Значит, плоскость SBH перпендикулярна прямой AD. Поэтому плоскости SBH и SAD перпендикулярны. Пусть O_1 — точка на отрезке SH такая, что $OO_1 \perp SH$. Поскольку прямая OO_1 лежит в плоскости SBH, $OO_1 \perp AD$. Значит, $OO_1 \perp (SAD)$. Следовательно, длина отрезка OO_1 равна расстоянию от точки O до плоскости SAD. Радиус r_2 равен

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - OO_1^2} = \sqrt{OS^2 - OO_1^2} = SO_1.$$

Из подобных прямоугольных треугольников SOO_1 и SHB находим $SO_1 = SO \cdot \dfrac{SB}{SH}$. Выражая двумя способами площадь треугольника SAD, получаем

$$SH \cdot AD = SA \cdot SD \cdot \sin\frac{\pi}{4} \;\Rightarrow\; SH = \frac{6}{\sqrt{5}}.$$

Итак, $r_2 = SO_1 = SO \cdot \dfrac{SB}{SH} = 1 \cdot \dfrac{2}{6/\sqrt{5}} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Поэтому

$$L_2 = r_2 \cdot 2\angle ASD = \frac{\sqrt{5}}{3} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Окончательно находим искомую длину линии

$$L = 2L_1 + 2L_2 = 4\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}}{3}\pi.$$

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2+y^2-4x-10y+20=0, \\ (|x|-|x-a|-a)y=4(x-a) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $\left(\dfrac{5}{6}, 2\right] \cup \{5\}$.

Решение. Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x-2)^2+(y-5)^2=9. \tag{9}$$

Это уравнение окружности с центром $(2;5)$ и радиусом 3.

Рассмотрим второе уравнение системы.

- При $x \geqslant a$ уравнение

$$(|x|-|x-a|-a)y=4(x-a) \iff (x-(x-a)-a)y=4(x-a) \iff x=a \tag{10}$$

задаёт вертикальную прямую. Эта прямая пересекает окружность (9) в двух точках при $a \in (0;5)$, касается данной окружности в одной точке при $a=5$ и не пересекает её при $a>5$.

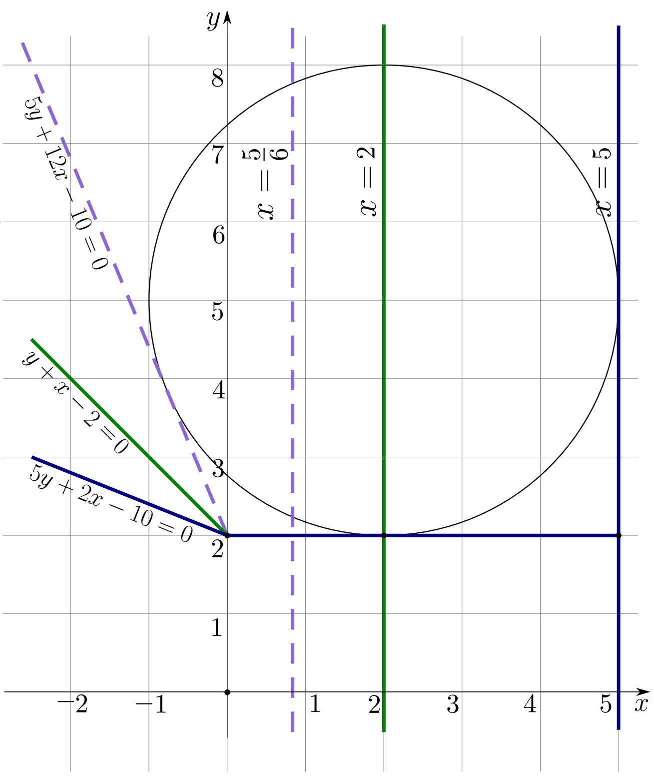
- При $x \in [0;a)$ уравнение

$$(|x|-|x-a|-a)y=4(x-a) \iff (x+(x-a)-a)y=4(x-a) \iff y=2$$

с учётом ограничений на x задаёт полуинтервал

$$\{(x;y) \mid x \in [0;a),\ y=2\}. \tag{11}$$

Этот полуинтервал имеет с окружностью (9) ровно одну общую точку при $a>2$, и не пересекает её при $0<a \leqslant 2$.



- При $x < 0$

$$(|x| - |x-a| - a)y = 4(x-a) \quad \iff \quad (-x + (x-a) - a)y = 4(x-a) \quad \iff \quad 2x + ay - 2a = 0.$$

Полученное уравнение с учётом ограничений на x задаёт луч

$$\{(x;y) \mid x < 0,\, 2x + ay - 2a = 0\}. \tag{12}$$

Этот луч касается окружности (9) при

$$\frac{|4 + 5a - 2a|}{\sqrt{4 + a^2}} = 3 \quad \iff \quad (3a+4)^2 = 9(4+a^2) \quad \iff \quad a = \frac{5}{6}.$$

Значит, при $a = \dfrac{5}{6}$ луч касается окружности, при $a \in \left(0; \dfrac{5}{6}\right)$ — пересекает её в двух точках, а при $a > \dfrac{5}{6}$ — не имеет с ней общих точек.

Итак, исходная система имеет ровно два решения в двух случаях:

1) окружность (9) пересекает имеет две общие точки с одним из множеств: прямой (10), полуинтервалом (11), лучом (12), и не пересекается с двумя другими;

2) окружность (9) имеет по одной общей точке с двумя из трёх множеств, а с оставшимся третьим — не пересекается.

Первый случай реализуется при $a \in \left(\dfrac{5}{6}, 2\right]$, а второй — при $a = 5$. Получаем искомое множество значений параметра $a \in \left(\dfrac{5}{6}; 2\right] \cup \{5\}$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 4

1. [3 балла] Пусть a, b, c — три попарно различных числа. Для каждой пары из чисел a, b и c выписывается приведённый квадратный трёхчлен, корнями которого является эта пара чисел. Обозначим полученные трёхчлены f_1, f_2, f_3. Найдите сумму $S = a^2 + b^2 + c^2$, если наименьшее значение трёхчлена $f = f_1 + f_2 + f_3$ равно -4, а $f(0) = 23$. (Сами числа a, b и c не даны.)

Ответ: 35.

Решение. По условию

$$f(x) = (x-a)(x-b) + (x-b)(x-c) + (x-c)(x-a) =$$
$$= 3x^2 - 2(a+b+c)x + (ab+bc+ca).$$

Наименьшее значение трёхчлена равно $f(x_0)$, где $x_0 = \dfrac{a+b+c}{3}$. Имеем:

$$f(x_0) = 3\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^2 - 2(a+b+c)\left(\frac{a+b+c}{3}\right) + (ab+bc+ca) =$$
$$= -\frac{1}{3}(a+b+c)^2 + (ab+bc+ca) = -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc) + ab+bc+ca =$$
$$= -\frac{1}{3}(a^2+b^2+c^2) + \frac{1}{3}(ab+bc+ca) = -4.$$

С другой стороны, $f(0) = ab+bc+ca = 23$. Значит, $a^2+b^2+c^2 = 23 - 3\cdot(-4) = 35$.

2. [4 балла] Сколько семизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8 и 9, чтобы две из этих цифр использовались в записи числа ровно по три раза, а остальные цифры — не более одного раза?

Ответ: $C_9^3 C_3^2 \dfrac{7!}{(3!)^2} - C_8^2 C_2^2 \dfrac{6!}{(3!)^2} - C_8^2 C_2^1 \dfrac{6!}{3!2!} = 31360.$

Решение. Искомое количество чисел равно

$$N = N_1 - N_2 - N_3,$$

где

- N_1 — количество таких чисел без учёта того, что цифра 0 не может стоять в начале;
- N_2 — количество таких чисел с учётом, что цифра 0 содержится в числе ровно один раз и стоит на первом месте;
- N_3 — количество таких чисел с учётом, что цифра 0 содержится в числе ровно три раза и одна из них стоит на первом месте.

Вычислим N_1. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, равно C_9^3, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из трех выбранных — C_3^2, количество способов расставить выбранные цифры по семи местам — $\dfrac{7!}{3!\,3!}$, поэтому

$$N_1 = C_9^3 \cdot C_3^2 \cdot \frac{7!}{3!\,3!} = \frac{9!}{6!\,3!} \cdot \frac{3!}{2!\,1!} \cdot \frac{7!}{3!\,3!} = 35280.$$

Вычислим N_2. Количество способов выбрать цифры, которые используются в числе, помимо нуля, равно C_8^2, количество способов выделить две повторяющиеся цифры из двух выбранных — C_2^2, количество способов расставить выбранные цифры по шести местам (места для цифр в семизначном числе, кроме первого места, где стоит 0) — это $\frac{6!}{3!\,3!}$, следовательно,

$$N_2 = C_8^2 \cdot C_2^2 \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = \frac{8!}{6!\,2!} \cdot 1 \cdot \frac{6!}{3!\,3!} = 560.$$

Аналогично вычисляется N_3:

$$N_3 = C_8^2 \cdot C_2^1 \cdot \frac{6!}{3!\,2!} = 3360.$$

Окончательно получаем:

$$N = 35280 - 560 - 3360 = 31360.$$

3. [4 балла] Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} \log_x(6y-x)\cdot\log_y(6x-y) = 4, \\ \log_x(6x-y)+\log_y(6y-x) = 4. \end{cases}$$

Ответ: $\left(\frac{7+\sqrt{21}}{2}; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{7-\sqrt{21}}{2}; \frac{7+\sqrt{21}}{2}\right)$, $(5;5)$.

Решение. ОДЗ исходной системы есть $x>0, x\neq 1, y>0, y\neq 1, 6y-x>0, 6x-y>0$.

Воспользуемся формулой $\log_a c\cdot\log_b d = \log_a d\cdot\log_b c$ и перейдем к равносильной системе:

$$\begin{cases} \log_x(6x-y)\cdot\log_y(6y-x) = 4, \\ \log_x(6x-y)+\log_y(6y-x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \log_x(6x-y) = 2, \\ \log_y(6y-x) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2 = 6x-y, \\ y^2 = 6y-x. \end{cases}$$

Последняя система имеет четыре решения: $(0;0)$, $\left(\frac{7+\sqrt{21}}{2}; \frac{7-\sqrt{21}}{2}\right)$, $\left(\frac{7-\sqrt{21}}{2}; \frac{7+\sqrt{21}}{2}\right)$, $(5;5)$.

Пара $(0;0)$ не лежит в ОДЗ исходной системы.

4. [5 баллов] В треугольнике ABC проведена биссектриса AN. Обозначим через Q точку пересечения продолжения высоты BP треугольника ABC за точку P с описанной около этого треугольника окружностью ω. Найдите площадь треугольника BCQ, если $BC=48$, углы $\angle BNA$ и $\angle BAC$ равны, а радиус окружности ω равен 25.

Ответ: 768.

Решение. Поскольку продолжение высоты BP за точку P пересекает описанную окружность, углы A и C — острые. Обозначим $\angle BAN = \alpha$. По условию $\angle ANB = 2\alpha$. Данный угол является внешним для треугольника ANC, причём $\angle NAC = \alpha$, поэтому $\angle NCA = \angle ANB - \angle NAC = \alpha$. Из прямоугольного треугольника BPC находим $\angle CBP = 90^\circ - \angle BCP = 90^\circ - \alpha$. Вписанные углы QCA и QBA опираются на одну дугу, а $\angle QBA = 90^\circ - \angle BAC = 90^\circ - 2\alpha$, поэтому

$$\angle QCB = \angle QCA + \angle ACB = 90^\circ - 2\alpha + \alpha = 90^\circ - \alpha = \angle QBC.$$

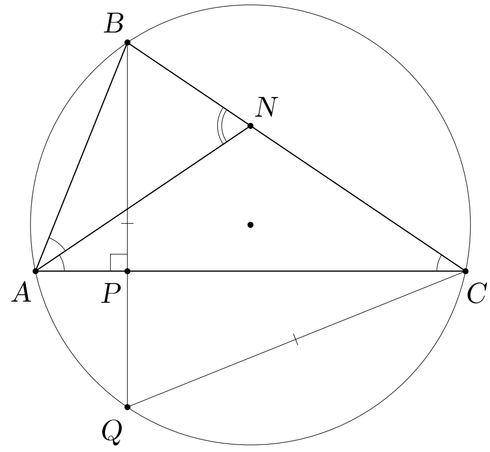
Итак, треугольник BCQ — равнобедренный, а $\angle BQC = 2\alpha$. Пусть R — радиус окружности. По теореме синусов

$$\sin 2\alpha = \frac{BC}{2R} = \frac{24}{25},$$

откуда $\cos 2\alpha = \dfrac{7}{25}$. Площадь треугольника BQC равна

$$S_{BQC} = \frac{1}{2}BQ^2 \sin 2\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{BC}{2\cos\angle CBQ}\right)^2 \sin 2\alpha =$$

$$= BC^2 \frac{\sin 2\alpha}{8\sin^2\alpha} = BC^2 \frac{\sin 2\alpha}{4(1-\cos 2\alpha)} = 768.$$



5. [5 баллов] Решите неравенство

$$-\left(1 - \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + \cos^2 x \cos^2\frac{\pi}{6} - \left(2\sin 2x - \sqrt{3}\right)^2 \geqslant 0.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Выражение

$$-\left(1 - \sin x \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + \cos^2 x \cos^2\frac{\pi}{6}$$

приводится к полному квадрату $-\left(\sin x - \sin\dfrac{\pi}{6}\right)^2$, поэтому неравенство принимает вид

$$\left(\sin x - \sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(2\sin 2x - \sqrt{3}\right)^2 \leqslant 0.$$

В силу неотрицательности обоих слагаемых в левой части данное неравенство равносильно системе

$$\begin{cases} \sin x = \sin\dfrac{\pi}{6}, \\ \sin 2x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}, \end{cases}$$

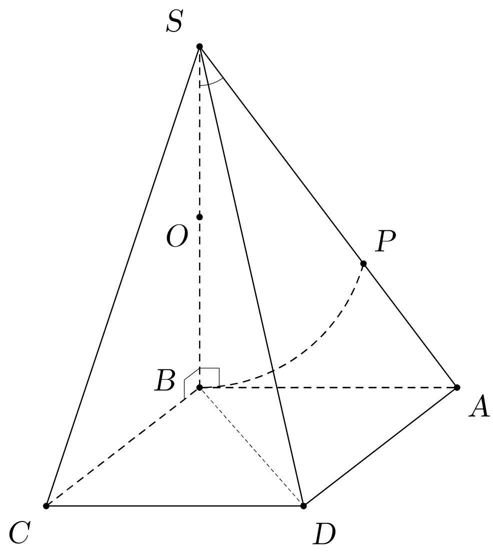
откуда $x = \dfrac{\pi}{6} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

6. [6 баллов] В четырёхугольной пирамиде $SABCD$ известны длины всех рёбер: $AB = BC = CD = DA = \sqrt{7}$, $SB = \sqrt{2}$, $SA = SC = 3$, $SD = 2$. Сфера ω с диаметром SB пересекает грани пирамиды по множеству, состоящему из точки S и линии L, не содержащей точку S. Найдите длину линии L.

Ответ: $2\sqrt{2}\,\mathrm{arctg}\sqrt{\dfrac{7}{2}} + \dfrac{4}{9}\sqrt{\dfrac{7}{3}}\pi$.

Решение. Заметим, что треугольники SBC и SBA — прямоугольные с прямым углом B, поэтому ребро SB есть высота пирамиды. А в прямоугольном треугольнике SBD гипотенуза SD в $\sqrt{2}$

больше катета SB, поэтому этот треугольник равнобедренный, и $SB = BD$. Сфера ω пересекает грани пирамиды по дугам окружностей. В силу симметрии относительно плоскости SBD дуги в гранях SBA и SBC равны между собой. Аналогично равны и дуги в гранях SAD и SCD. Рассмотрим сначала грань SBA.

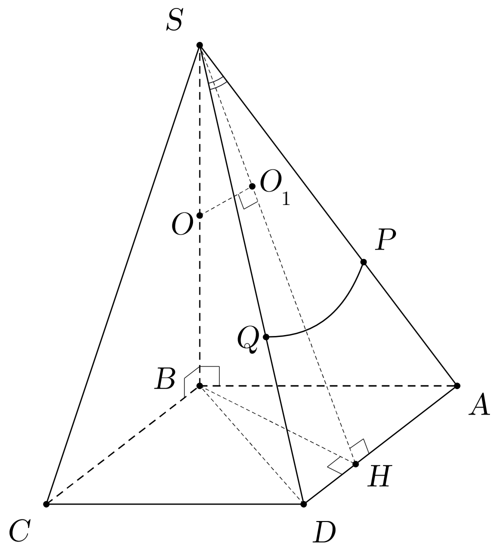


Грань SBA проходит через центр ω, а AB касается этой сферы, поэтому искомая дуга BP есть дуга окружности, построенной на SB как на диаметре, попадающая внутрь прямоугольного треугольника SBA. Её длина (обозначим её через L_1) равна произведению радиуса $r_1 = \dfrac{SB}{2}$ на удвоенную (поскольку этот угол является вписанным) радианную меру $\angle BSA$:

$$L_1 = r_1 \cdot 2\angle BSA = \frac{SB}{2} \cdot 2 \operatorname{arctg} \frac{AB}{SB} = \sqrt{2} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}.$$

Теперь рассмотрим грань SAD и дугу PQ, по которой сфера ω пересекает эту грань. Обозначим её длину через L_2.

Величина L_2 равна произведению радиуса r_2 окружности, лежащей в пересечении сферы ω с плоскостью SAD, на удвоенную радианную меру вписанного $\angle ASD$, опирающегося на дугу PQ. Найдем этот угол с помощью теоремы косинусов:



$$\cos \angle ASD = \frac{SA^2 + SD^2 - AD^2}{2SA \cdot SD} = \frac{1}{2}.$$

Значит, $\angle ASD = \dfrac{\pi}{3}$.

Теперь вычислим радиус r_2, найдя расстояние от центра сферы O до плоскости SAD. Пусть BH — высота треугольника BAD. Поскольку $SB \perp (ABD)$, по теореме о трёх перпендикулярах $SH \perp AD$. Значит, плоскость SBH перпендикулярна прямой AD. Поэтому плоскости SBH и SAD перпендикулярны. Пусть O_1 — точка на отрезке SH такая, что $OO_1 \perp SH$. Поскольку прямая OO_1 лежит в плоскости SBH, $OO_1 \perp AD$. Значит, $OO_1 \perp (SAD)$. Следовательно, длина отрезка OO_1 равна расстоянию от точки O до плоскости SAD. Радиус r_2 равен

$$r_2 = \sqrt{r_1^2 - OO_1^2} = \sqrt{OS^2 - OO_1^2} = SO_1.$$

Из подобных прямоугольных треугольников SOO_1 и SHB находим $SO_1 = SO \cdot \dfrac{SB}{SH}$. Выражая двумя способами площадь треугольника SAD, получаем

$$SH \cdot AD = SA \cdot SD \cdot \sin \frac{\pi}{3} \ \Rightarrow \ SH = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}.$$

Итак, $r_2 = SO_1 = SO \cdot \dfrac{SB}{SH} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}/\sqrt{7}} = \dfrac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}}$. Поэтому

$$L_2 = r_2 \cdot 2\angle ASD = \frac{\sqrt{7}}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{2\pi}{3} = \frac{2\pi}{9}\sqrt{\frac{7}{3}}.$$

Окончательно находим искомую длину линии

$$L = 2L_1 + 2L_2 = 2\sqrt{2} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{7}{2}} + \frac{4}{9}\sqrt{\frac{7}{3}}\pi.$$

7. [6 баллов] Найдите все *положительные* значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0, \\ (|x| - |x - a| - a)y = 2(a - x) \end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \left(\frac{7}{24}, 3\right] \cup \{7\}$.

Решение.

Преобразуем первое уравнение системы:

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16. \tag{13}$$

Это уравнение окружности с центром $(3; -5)$ и радиусом 4.

Рассмотрим второе уравнение системы.

- При $x \geqslant a$ уравнение

$$(|x| - |x - a| - a)y = 2(a - x) \iff (x - (x - a) - a)y = 2(a - x) \iff x = a \tag{14}$$

задаёт вертикальную прямую. Эта прямая пересекает окружность (13) в двух точках при $a \in (0; 7)$, касается данной окружности в одной точке при $a = 7$ и не пересекает её при $a > 7$.

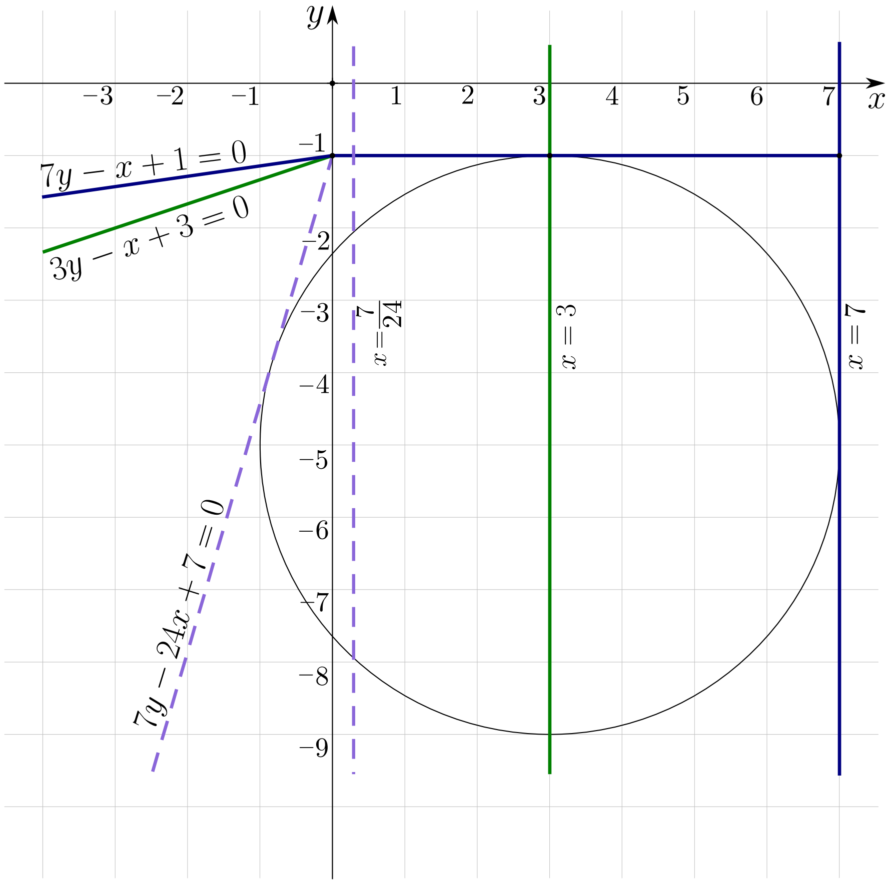
- При $x \in [0; a)$ уравнение

$$(|x| - |x - a| - a)y = 2(a - x) \iff (x + (x - a) - a)y = -2(x - a) \iff y = -1$$

с учётом ограничений на x задаёт полуинтервал

$$\{(x; y) \mid x \in [0; a), y = -1\}. \tag{15}$$

Этот полуинтервал имеет с окружностью (13) ровно одну общую точку при $a > 3$, и не пересекает её при $0 < a \leqslant 3$.



- При $x < 0$

$$(|x| - |x - a| - a)y = 2(a - x) \quad \Longleftrightarrow \quad (-x + (x - a) - a)y = 2(a - x) \quad \Longleftrightarrow \quad x - ay - a = 0.$$

Полученное уравнение с учётом ограничений на x задаёт луч

$$\{(x; y) \mid x < 0, x - ay - a = 0\}. \tag{16}$$

Этот луч касается окружности (13) при

$$\frac{|3 + 5a - a|}{\sqrt{1 + a^2}} = 4 \quad \Longleftrightarrow \quad (4a + 3)^2 = 16(1 + a^2) \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{7}{24}.$$

Значит, при $a = \dfrac{7}{24}$ луч касается окружности, при $a \in \left(0; \dfrac{7}{24}\right)$ — пересекает её в двух точках, а при $a > \dfrac{7}{24}$ — не имеет с ней общих точек.

Итак, исходная система имеет ровно два решения в двух случаях:

1) окружность (13) пересекает имеет две общие точки с одним из множеств: прямой (14), полуинтервалом (15), лучом (16), и не пересекается с двумя другими;

2) окружность (13) имеет по одной общей точке с двумя из трёх множеств, а с оставшимся третьим — не пересекается.

Первый случай реализуется при $a \in \left(\dfrac{7}{24}, 3\right]$, а второй — при $a = 7$. Получаем искомое множество значений параметра $a \in \left(\dfrac{7}{24}; 3\right] \cup \{7\}$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 11

1. [3 балла] Известно, что если уменьшить каждый из корней уравнения $x^2+bx+c=0$ на 3, полученные числа будут корнями уравнения $x^2+cx+b=0$. Каждый из четырёх корней этих двух уравнений увеличили на 1. Найдите произведение полученных четырёх чисел. (Сами числа b и c не даны.)

   Ответ: -35.

   Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2+bx+c=0$, x_3 и x_4 — уравнения $x^2+cx+b=0$. Тогда $x_1+x_2=-b, x_1x_2=c, x_3+x_4=-c, x_3x_4=b$. По условию $(x_1+x_2)-(x_3+x_4)=6=c-b$. Тогда искомое произведение есть:

$$(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot(x_3+1)\cdot(x_4+1)=\big((x_1+1)\cdot(x_2+1)\big)\cdot\big((x_3+1)\cdot(x_4+1)\big)=$$
$$=(x_1x_2+(x_1+x_2)+1)\cdot(x_3x_4+(x_3+x_4)+1)=$$
$$=(c-b+1)(b-c+1)=(1+6)(1-6)=-35.$$

   Замечание. Можно показать, что $c=1, b=-5$.

2. [4 балла] Назовем число *забавным*, если в нем чередуются чётные и нечётные цифры. Сколькими способами можно заменить звёздочки на цифры в равенстве $2{*}{*}{*}+3{*}{*}{*}={*}{*}{*}{*}$ так, чтобы получилось верное равенство с тремя забавными четырёхзначными числами?

   Ответ: 1000.

   Решение. Так как числа забавные, получаем равенство $2ЧНЧ+3НЧН={*}{*}{*}{*}$. В последнем разряде складывается нечётная и чётная цифра, поэтому сумма оканчивается на нечётную цифру. Поэтому имеем равенство $2НЧН+3ЧНЧ=ЧНЧН$. Теперь видно, что при сложении в первом и третьем разрядах происходит переход через десяток, а во втором разряде перехода нет. При этом первая цифра суммы будет равна 6.

   Если складывается нечётная и чётная цифра и при этом есть переход через десяток (в 1 и 3 разрядах), то возможны 10 вариантов: $9+2, 9+4, 9+6, 9+8, 7+4, 7+6, 7+8, 5+6, 5+8, 3+8$.

   Если складывается чётная и нечётная цифра и при этом нет перехода через десяток (во 2 разряде), то возможны 10 вариантов: $6+1, 4+1, 4+3, 2+1, 2+3, 2+5, 0+1, 0+3, 0+5, 0+7$.

   Таким образом, количество вариантов равно $10\cdot10\cdot10=1000$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2-x)+\log_{(x-1)^2}(x^2-x)\geqslant\dfrac{9}{4}$.

   Ответ: $x\in\left[\dfrac{-1-\sqrt5}{2};-1\right)\cup\left(2;\dfrac{3+\sqrt5}{2}\right]$.

   Решение. ОДЗ данного неравенства есть $x^2-x>0, x^2>0, x\neq\pm1, (x-1)^2>0, x-1\neq\pm1$, откуда $x\in(-\infty,-1)\cup(-1,0)\cup(1,2)\cup(2,+\infty)$.

Заметим, что на ОДЗ $x^2 - x = x(x-1) = |x(x-1)| = |x| \cdot |x-1|$. Поэтому неравенство можно преобразовать к виду $\frac{1}{2}\log_{|x|}(|x| \cdot |x-1|) + \frac{1}{2}\log_{|x-1|}(|x| \cdot |x-1|) \geqslant \frac{9}{4}$, откуда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_{|x|}|x-1| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_{|x-1|}|x| \geqslant \frac{9}{4} \iff \log_{|x|}|x-1| + \log_{|x-1|}|x| \geqslant \frac{5}{2}.$$

Обозначая $t = \log_{|x|}|x-1|$, получаем

$$t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} \geqslant 0 \iff \frac{(2t-1)(t-2)}{t} \geqslant 0,$$

следовательно $t \in (0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$. То есть $0 < \log_{|x|}|x-1| \leqslant \frac{1}{2}$ или $\log_{|x|}|x-1| \geqslant 2$.

Пусть $x \in (1,2) \cup (2,+\infty)$, тогда $\log_{|x|}|x-1| = \log_x(x-1)$.

Если $0 < \log_x(x-1) \leqslant \frac{1}{2}$, то $1 < x-1 \leqslant \sqrt{x}$. Решая $x - 1 \leqslant \sqrt{x}$, находим $x \in \left(2, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Если $\log_x(x-1) \geqslant 2$, то $x - 1 \geqslant x^2$. Это неравенство не имеет решений.

Пусть $x \in (-\infty,-1)\cup(-1,0)$, тогда $\log_{|x|}|x-1| = \log_{-x}(1-x)$. При этом если $x \in (-1,0)$, то $\log_{-x}(1-x) < 0$, поэтому этот интервал не подходит, и $x < -1$.

Если $0 < \log_{-x}(1-x) \leqslant \frac{1}{2}$, то $1 < 1-x \leqslant \sqrt{-x}$. Неравенство $1-x \leqslant \sqrt{-x}$ не имеет решений.

Если $\log_{-x}(1-x) \geqslant 2$, то $1-x \geqslant (-x)^2 = x^2$, откуда $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$. Учитывая, что $x < -1$, получаем: $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, -1\right)$.

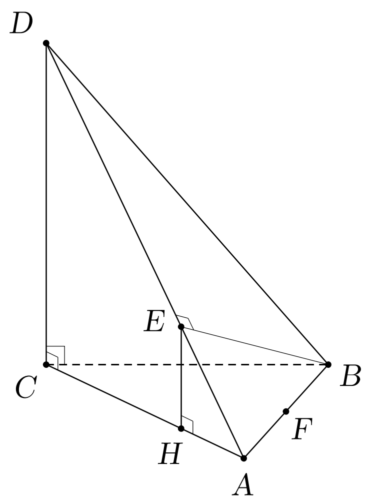
Объединяя решения, получаем ответ: $x \in \left[\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; -1\right) \cup \left(2; \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right]$.

4. [4 балла] В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC, угол ACD прямой. Сфера с диаметром BD пересекает повторно рёбра AD, AB и CD в точках E, F и C соответственно. Найдите объём пирамиды $EACF$, если $AB = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{1}{20}$.

Решение. Пусть $AB = a$, $CD = b$. Сечением сферы плоскостью BCD является окружность, описанная около треугольника BCD, центр которой лежит на BD, поэтому угол BCD прямой. Прямоугольные треугольники ACD и BCD равны по двум сторонам и углу, следовательно $AD = BD = \sqrt{a^2+b^2}$.

Так как BD — диаметр окружности (сечение сферы плоскостью ABD) углы BFD и BED прямые. Треугольник ADB равнобедренный и DF его высота, следовательно F — середина AB.



$$AE = AB\cos\angle BAE = AB \cdot \frac{AF}{AD} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Пусть H — проекция точки E на плоскость ABC. Точка H лежит на AC, так как плоскость ADC перпендикулярна плоскости основания ABC. Тогда отношение объёмов пирамид $EACF$ и $DABC$ равно

$$\frac{V_{EACF}}{V_{DABC}} = \frac{EH}{DC} \cdot \frac{S_{ACF}}{S_{ABC}} = \frac{EA}{DA} \cdot \frac{AF}{AB} = \frac{a^2}{2\left(a^2+b^2\right)} \cdot \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$V_{EACF} = \frac{a^2}{4\left(a^2+b^2\right)} V_{DABC} = \frac{a^2}{4\left(a^2+b^2\right)} \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^4 b}{48\left(a^2+b^2\right)} = \frac{1}{20}.$$

5. [5 баллов] Решите уравнение

$$\cos 4x - 6\sqrt{2}\sin x - 4\sin 2x + 6\sqrt{2}\cos x = 15.$$

Ответ: $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}.$

Решение. Заметим, что

$$\cos 4x - 6\sqrt{2}\sin x - 4\sin 2x + 6\sqrt{2}\cos x = -2(\sin 2x + 1)^2 - 12\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 3 \leqslant 0 + 12 + 3 = 15.$$

Равенство достигается только в том случае, когда $\sin 2x + 1 = 0$ и $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$. Этим равенствам одновременно удовлетворяет только $x = -\dfrac{\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

6. [6 баллов] В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, а точки D, E и F лежат на сторонах CA, AB и BC соответственно, причем $BE = ED = DF = FB = 10$. Отрезки AF и CE пересекаются в точке X. Найдите длину XA, если $XF = 4$.

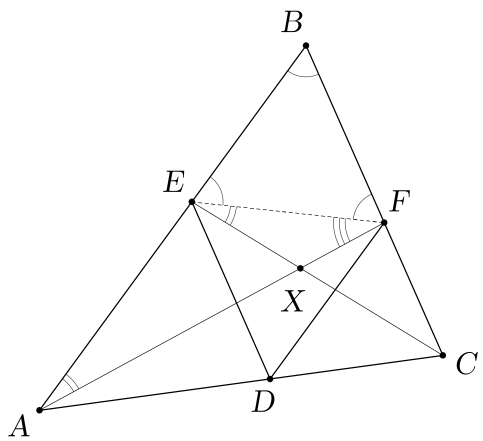
Ответ: $XA = 21$.

Решение. Треугольник EBF равнобедренный с углом при вершине 60°, поэтому он правильный и $EF = 30$. По теореме о пропорциональных отрезках, с учётом того, что $EB = EF = BF$, получаем:

$$\frac{AE}{EB} = \frac{AD}{DC} = \frac{BF}{FC} \quad\Longrightarrow\quad \frac{AE}{EF} = \frac{EF}{FC}.$$

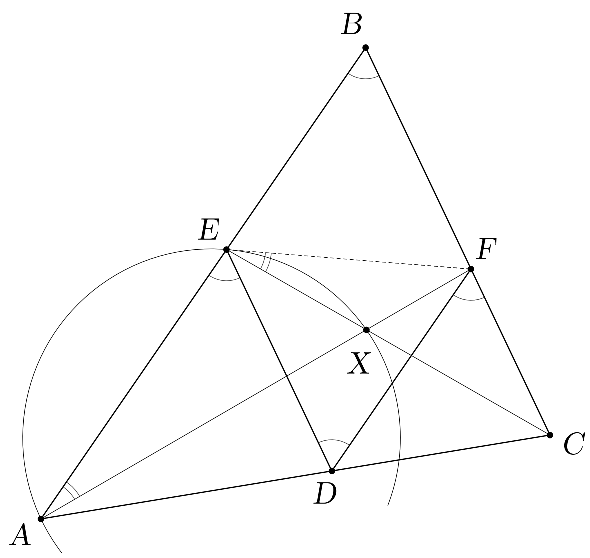
Отсюда, а также из условия $\angle AEF = \angle EFC = 120^\circ$ следует, что треугольники AEF и EFC подобны и $\angle EAF = \angle FEC$. Значит, треугольники AEF и EXF подобны по двум углам и

$$\frac{AF}{EF} = \frac{EF}{XF} \Leftrightarrow \frac{AX + FX}{EF} = \frac{EF}{FX} \Rightarrow AX = \frac{EF^2}{FX} - FX = 21.$$



Решение. Пусть $EF = p$, $FX = q$. По условию треугольники BEF и DEF равносторонние, поэтому $\angle BED = \angle BFD = 120^\circ$, откуда $\angle AED = \angle DFC = 60^\circ$. Пусть $\angle FCD = \alpha$.

Тогда из суммы углов треугольника DFC находим $\angle CDF = 120^\circ - \alpha$. Поскольку $\angle EDF = 60^\circ$, получаем $\angle EDA = 180^\circ - \angle EDF = \angle FDC = \alpha$. Значит, треугольники AED и DFC подобны по двум углам. Поэтому $\dfrac{AE}{ED} = \dfrac{DF}{FC}$. Но $\angle AEF = \angle EFC = 2 \cdot 60^\circ$, а $ED = DF = EF$, то есть $\dfrac{AE}{EF} = \dfrac{EF}{FC}$. Поэтому треугольники AEF и CEF подобны по углу и двум парам прилежащих пропорциональных сторон. Отсюда следует, что $\angle EAF = \angle FEC$, поэтому, согласно обратной теореме об угле между касательной и хордой, прямая EF касается описанной окружности треугольника EAX. Значит, произведение $FX \cdot FA$ равно квадрату отрезка касательной EF^2, то есть $p^2 = FX \cdot (FX + XA)$. Итак, $XA = \dfrac{EF^2}{FX} - FX = 21$.



7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x+\dfrac{y^2}{x}=\min\left(6+\dfrac{8y}{x};8-\dfrac{6y}{x}\right), \\ y=ax-7a+1 \end{cases}$$

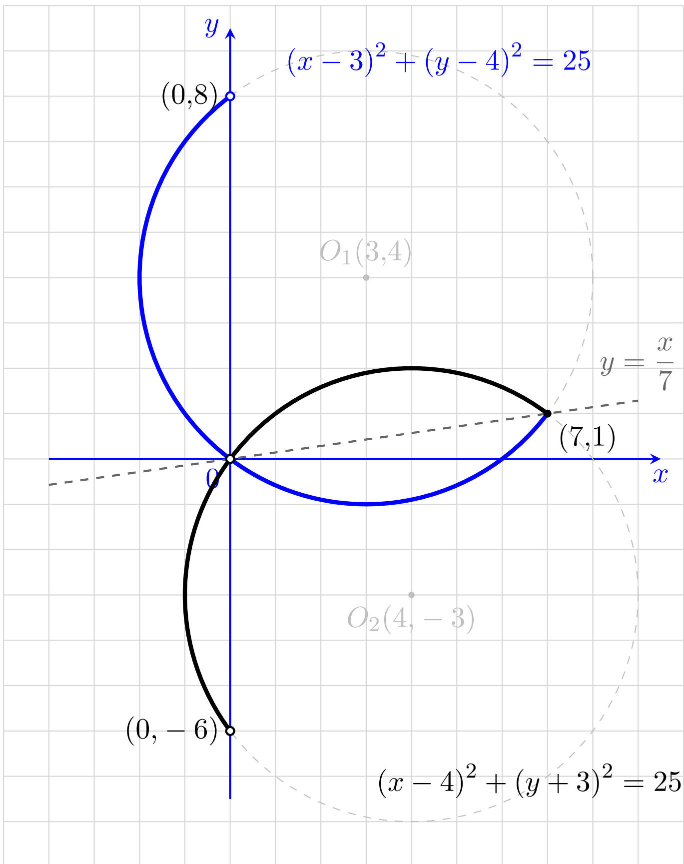
имеет ровно два решения.

Ответ: $a \in \left(-1;-\dfrac{3}{4}\right] \cup \left[1;\dfrac{4}{3}\right)$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть M — множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих этому уравнению. Правая часть данного уравнения принимает различный вид в зависимости от того, какое из выражений $6+\dfrac{8y}{x}$ и $8-\dfrac{6y}{x}$ меньше. Заметим, что

$$6+\frac{8y}{x} \leqslant 8-\frac{6y}{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{7y-x}{x} \leqslant 0.$$

При $x>0$ это неравенство выполняется во всех точках, лежащих на прямой $y=\dfrac{x}{7}$ и ниже неё, а при $x<0$ — во всех точках, лежащих на прямой $y=\dfrac{x}{7}$ и выше неё.



При $\dfrac{7y-x}{x} \leqslant 0$ первое уравнение системы принимает вид

$$x+\frac{y^2}{x}=6+\frac{8y}{x} \;\Leftrightarrow\; (x-3)^2+(y-4)^2=25. \;(1)$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(3;4)$ и радиусом 5. Прямую $y=\dfrac{x}{7}$ окружность (3) пересекает в точках $(0;0)$ и $(7;1)$, а прямую $x=0$ — в точках $(0;0)$ и $(0;8)$. Значит, часть множества M, точки которой удовлетворяют неравенству $\dfrac{7y-x}{x} \leqslant 0$, есть дуга окружности (3) с концами $(0;8)$ и $(7;1)$ за исключением точки $(0;0)$.

При $\dfrac{7y-x}{x} > 0$ первое уравнение системы принимает вид

$$x+\frac{y^2}{x}=8-\frac{6y}{x} \;\Leftrightarrow\; (x-4)^2+(y+3)^2=25. \;(2)$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(4;-3)$ и радиусом 5. Прямую $y=\dfrac{x}{7}$ эта окружность пересекает в точках $(0;0)$ и $(7;1)$, а прямую $x=0$ — в точках $(0;0)$ и $(0;-6)$. Поэтому часть множества M, точки которой удовлетворяют условию $\dfrac{7y-x}{x}>0$, есть дуга окружности (4) с концами $(0;-6)$ и $(7;1)$ за исключением точки $(0;0)$.

Итак, множество M имеет вид объединения двух указанных дуг за исключением точки $(0;0)$.

Перепишем второе уравнение системы в виде $y-1=a(x-7)$. При различных значениях параметра a данное уравнение задаёт прямые с угловым коэффициентом a, проходящие через точку $(7;1)$. Отметим, что любая прямая, проходящая через эту точку, кроме вертикальной, может быть задана данным уравнением с помощью выбора значения a.

Найдем значения a, при которых окружность (3) касается прямой $ax-y-7a+1=0$:

$$\frac{|3a-4-7a+1|}{\sqrt{a^2+1}}=5 \;\Leftrightarrow\; |3+4a|=5\sqrt{a^2+1} \;\Leftrightarrow\; 9a^2-24a+16=0 \;\Leftrightarrow\; (3a-4)^2=0 \;\Leftrightarrow\; a=\frac{4}{3}.$$

Теперь определим значения a, при которых окружность (4) касается данной прямой:

$$\frac{|4a+3-7a+1|}{\sqrt{a^2+1}} = 5 \;\Leftrightarrow\; |4-3a| = 5\sqrt{a^2+1} \;\Leftrightarrow\; 16a^2+24a+9=0 \;\Leftrightarrow\; a=-\frac{3}{4}.$$

Найдём количество точек пересечения прямой $y = a(x-7)+1$ со множеством M:

1) при $a \in (-\infty; -1]$ — 1 общая точка;
2) при $a \in \left(-1; -\frac{3}{4}\right]$ — 2 общие точки;
3) при $a \in \left(-\frac{3}{4}; \frac{1}{7}\right)$ — 3 общие точки;
4) при $a = \frac{1}{7}$ — 1 общая точка;
5) при $a \in \left(\frac{1}{7}; 1\right)$ — 3 общие точки;
6) при $a \in \left[1; \frac{4}{3}\right)$ — 2 общие точки;
7) при $a \in \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$ — 1 общая точка.

Следовательно, искомое множество значений параметра есть $a \in \left(-1; -\frac{3}{4}\right] \cup \left[1; \frac{4}{3}\right)$.

МОСКОВСКИЙ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ
ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ"
ПО МАТЕМАТИКЕ

11 КЛАСС. Вариант 12

1. [3 балла] Известно, что если увеличить каждый из корней уравнения $x^2 + bx + c = 0$ на 4, полученные числа будут корнями уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Каждый из четырёх корней этих двух уравнений увеличили на 1. Найдите произведение полученных четырёх чисел. (Сами числа b и c не даны.)

Ответ: -63.

Решение. Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$, x_3 и x_4 — уравнения $x^2 + cx + b = 0$. Тогда $x_1 + x_2 = -b, x_1x_2 = c, x_3 + x_4 = -c, x_3x_4 = b$. По условию $(x_1 + x_2) - (x_3 + x_4) = -8 = c - b$. Тогда искомое произведение есть:

$$(x_1+1)\cdot(x_2+1)\cdot(x_3+1)\cdot(x_4+1) = \big((x_1+1)\cdot(x_2+1)\big)\cdot\big((x_3+1)\cdot(x_4+1)\big) =$$
$$= (x_1x_2 + (x_1+x_2)+1)\cdot(x_3x_4+(x_3+x_4)+1) =$$
$$= (c-b+1)(b-c+1) = (1-8)(1+8) = -63.$$

Замечание. Можно показать, что $c = -6, b = 2$.

2. [4 балла] Назовем число *забавным*, если в нем чередуются чётные и нечётные цифры. Сколькими способами можно заменить звёздочки на цифры в равенстве $2{*}{*}{*} + 4{*}{*}{*} = {*}{*}{*}{*}$ так, чтобы получилось верное равенство с тремя забавными четырёхзначными числами?

Ответ: 3375.

Решение. Так как числа забавные, получаем равенство $2ЧНЧ + 4ЧНЧ = {*}{*}{*}{*}$. В последнем разряде складывается нечётная и нечётная цифра, поэтому сумма оканчивается на чётную цифру. Поэтому имеем равенство $2НЧН{+}4НЧН = НЧНЧ$. Теперь видно, что при сложении в первом и третьем разрядах происходит переход через десяток, а во втором разряде перехода нет. При этом первая цифра суммы будет равна 7.

Если складывается нечётная и нечётная цифра и при этом есть переход через десяток (в 1 и 3 разрядах), то возможны 15 вариантов: 1+9, 3+7, 3+9, 5+5, 5+7, 5+9, 7+3, 7+5, 7+7, 7+9, 9+1, 9+3, 9+5, 9+7, 9+9.

Если складывается чётная и чётная цифра и при этом нет перехода через десяток (во 2 разряде), то возможны 15 вариантов: 0+0, 0+2, 0+4, 0+6, 0+8, 2+0, 2+2, 2+4, 2+6, 4+0, 4+2, 4+4, 6+0, 6+2, 8+0.

Таким образом, количество вариантов равно $15 \cdot 15 \cdot 15 = 3375$.

3. [5 баллов] Решите неравенство $\log_{x^2}(x^2+2x) + \log_{(x+2)^2}(x^2+2x) \geqslant \dfrac{9}{4}$.

Ответ: $x \in [-4; -3) \cup (1; 2]$.

Решение. ОДЗ данного неравенства есть $x^2 + 2x > 0, x^2 > 0, x \neq \pm 1, (x+2)^2 > 0, x + 2 \neq \pm 1$, откуда $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Заметим, что на ОДЗ $x^2 + 2x = x(x+2) = |x(x+2)| = |x|\cdot|x+2|$. Поэтому неравенство можно преобразовать к виду $\frac{1}{2}\log_{|x|}(|x|\cdot|x+2|) + \frac{1}{2}\log_{|x+2|}(|x|\cdot|x+2|) \geqslant \frac{9}{4}$, откуда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_{|x|}|x+2| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_{|x+2|}|x| \geqslant \frac{9}{4} \iff \log_{|x|}|x+2| + \log_{|x+2|}|x| \geqslant \frac{5}{2}.$$

Обозначая $t = \log_{|x|}|x+2|$, получаем

$$t + \frac{1}{t} - \frac{5}{2} \geqslant 0 \iff \frac{(2t-1)(t-2)}{t} \geqslant 0,$$

следовательно $t \in (0, \frac{1}{2}] \cup [2, +\infty)$. То есть $0 < \log_{|x|}|x+2| \leqslant \frac{1}{2}$ или $\log_{|x|}|x+2| \geqslant 2$.

Пусть $x \in (0,1) \cup (1,2) \cup (2,+\infty)$, тогда $\log_{|x|}|x+2| = \log_x(x+2)$. При этом если $x \in (0{,}1)$, то $\log_x(x+2) < 0$, поэтому этот интервал не подходит, и $x > 1$.

Если $0 < \log_x(x+2) \leqslant \frac{1}{2}$, то $1 < x+2 \leqslant \sqrt{x}$. Решая $x+2 \leqslant \sqrt{x}$, находим, что это неравенство не имеет решений.

Если $\log_x(x+2) \geqslant 2$, то $x+2 \geqslant x^2$. Это неравенство дает $x \in [-1{,}2]$. Учитывая, что $x > 1$ и $x \neq 1$, получаем: $x \in (1{,}2]$.

Пусть $x \in (-\infty, -3) \cup (-3, -2)$, тогда $\log_{|x|}|x+2| = \log_{-x}(-x-2)$. При этом если $x \in (-3,-2)$, то $\log_{-x}(-x-2) < 0$, поэтому этот интервал не подходит, и $x < -3$.

Если $0 < \log_{-x}(-x-2) \leqslant \frac{1}{2}$, то $1 < -x-2 \leqslant \sqrt{-x}$. Решая $-x-2 \leqslant \sqrt{-x}$, находим $x \in [-4, -3)$.

Если $\log_{-x}(-x-2) \geqslant 2$, то $-x-2 \geqslant (-x)^2 = x^2$. Это неравенство не имеет решений.

Учитывая, что $x < -3$, получаем: $x \in [-4, -3)$.

Объединяя решения, получаем ответ: $x \in [-4, -3) \cup (1{,}2]$.

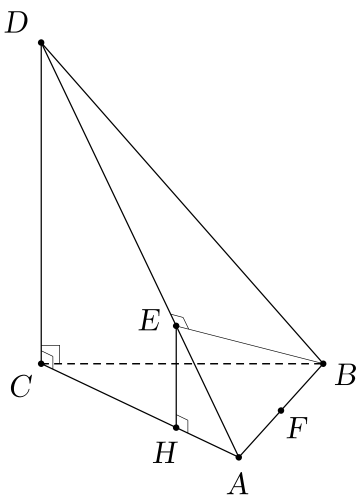
4. [4 балла] В основании пирамиды $DABC$ лежит правильный треугольник ABC, углы ACD и BCD прямые. Сфера с диаметром BD пересекает повторно рёбра AD и AB в точках E и F соответственно. Найдите объём пирамиды $EACF$, если $AB = 2\sqrt{2}$, $CD = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $\frac{2}{5}$.

Решение. Пусть $AB = a$, $CD = b$. Сечением сферы плоскостью BCD является окружность, описанная около треугольника BCD, центр которой лежит на BD, поэтому угол BCD прямой. Прямоугольные треугольники ACD и BCD равны по двум сторонам и углу, следовательно $AD = BD = \sqrt{a^2+b^2}$.

Так как BD — диаметр окружности (сечение сферы плоскостью ABD) углы BFD и BED прямые. Треугольник ADB равнобедренный и DF его высота, следовательно F — середина AB.

$$AE = AB\cos\angle BAE = AB \cdot \frac{AF}{AD} = \frac{a^2}{2\sqrt{a^2+b^2}}.$$



Пусть H — проекция точки E на плоскость ABC. Точка H лежит на AC, так как плоскость ADC перпендикулярна плоскости основания ABC. Тогда отношение объёмов пирамид $EACF$ и $DABC$ равно

$$\frac{V_{EACF}}{V_{DABC}} = \frac{EH}{DC} \cdot \frac{S_{ACF}}{S_{ABC}} = \frac{EA}{DA} \cdot \frac{AF}{AB} = \frac{a^2}{2\left(a^2+b^2\right)} \cdot \frac{1}{2}.$$

Отсюда

$$V_{EACF} = \frac{a^2}{4\left(a^2+b^2\right)} V_{DABC} = \frac{a^2}{4\left(a^2+b^2\right)} \cdot \frac{1}{3} \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}a^2}{4} = \frac{\sqrt{3}a^4 b}{48\left(a^2+b^2\right)} = \frac{2}{5}.$$

5. [5 баллов] Решите уравнение

$$9 - \cos 4x + 3\sqrt{2}\sin x - 4\sin 2x + 3\sqrt{2}\cos x = 0.$$

Ответ: $x = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

Решение. Заметим, что

$$9-\cos 4x+3\sqrt{2}\sin x-4\sin 2x+3\sqrt{2}\cos x=6+2(\sin 2x-1)^2+6\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\geqslant 6+0-6=0.$$

Равенство достигается только в том случае, когда $\sin 2x-1=0$ и $\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$. Этим равенствам одновременно удовлетворяет только $x=-\dfrac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$.

6. [6 баллов] В треугольнике ABC $\angle B=60^\circ$, а точки D, E и F лежат на сторонах CA, AB и BC соответственно, причем $BE=ED=DF=FB=30$. Отрезки AF и CE пересекаются в точке X. Найдите длину XA, если $XF=18$.

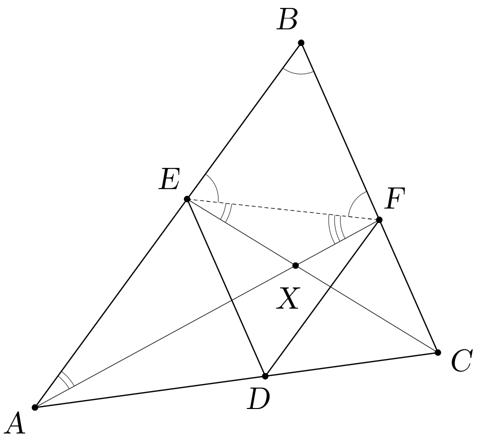
Ответ: $XA=32$.

Решение. Треугольник EBF равнобедренный с углом при вершине 60°, поэтому он правильный и $EF=30$. По теореме о пропорциональных отрезках, с учётом того, что $EB=EF=BF$, получаем:

$$\frac{AE}{EB}=\frac{AD}{DC}=\frac{BF}{FC}\quad\Longrightarrow\quad\frac{AE}{EF}=\frac{EF}{FC}.$$

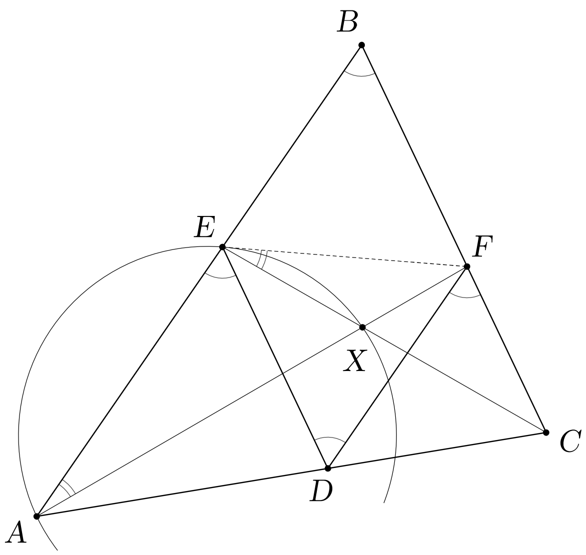
Отсюда, а также из условия $\angle AEF=\angle EFC=120^\circ$ следует, что треугольники AEF и EFC подобны и $\angle EAF=\angle FEC$. Значит, треугольники AEF и EXF подобны по двум углам и

$$\frac{AF}{EF}=\frac{EF}{XF}\Leftrightarrow\frac{AX+FX}{EF}=\frac{EF}{FX}\Rightarrow AX=\frac{EF^2}{FX}-FX=32.$$



Решение. Пусть $EF=p$, $FX=q$. По условию треугольники BEF и DEF равносторонние, поэтому $\angle BED=\angle BFD=120^\circ$, откуда $\angle AED=\angle DFC=60^\circ$. Пусть $\angle FCD=\alpha$.

Тогда из суммы углов треугольника DFC находим $\angle CDF=120^\circ-\alpha$. Поскольку $\angle EDF=60^\circ$, получаем $\angle EDA=180^\circ-\angle EDF=\angle FDC=\alpha$. Значит, треугольники AED и DFC подобны по двум углам. Поэтому $\dfrac{AE}{ED}=\dfrac{DF}{FC}$. Но $\angle AEF=\angle EFC=2\cdot 60^\circ$, а $ED=DF=EF$, то есть $\dfrac{AE}{EF}=\dfrac{EF}{FC}$. Поэтому треугольники AEF и CEF подобны по углу и двум парам прилежащих пропорциональных сторон. Отсюда следует, что $\angle EAF=\angle FEC$, поэтому, согласно обратной теореме об угле между касательной и хордой, прямая EF касается описанной окружности треугольника EAX. Значит, произведение $FX\cdot FA$ равно квадрату отрезка касательной EF^2, то есть $p^2=FX\cdot(FX+XA)$. Итак, $XA=\dfrac{EF^2}{FX}-FX=32$.



7. [6 баллов] Найдите все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases}x+\dfrac{y^2}{x}=\min\left(10+\dfrac{24y}{x};24-\dfrac{10y}{x}\right),\\ y=ax-17a+7\end{cases}$$

имеет ровно два решения.

Ответ: $a\in\left(-1,-\dfrac{5}{12}\right]\cup\left[1,\dfrac{12}{5}\right)$.

Решение. Рассмотрим первое уравнение системы. Пусть M — множество точек $(x;y)$, удовлетворяющих этому уравнению. Правая часть данного уравнения принимает различный вид в зависимости от того, какое из выражений $10+\dfrac{24y}{x}$ и $24-\dfrac{10y}{x}$ меньше. Заметим, что

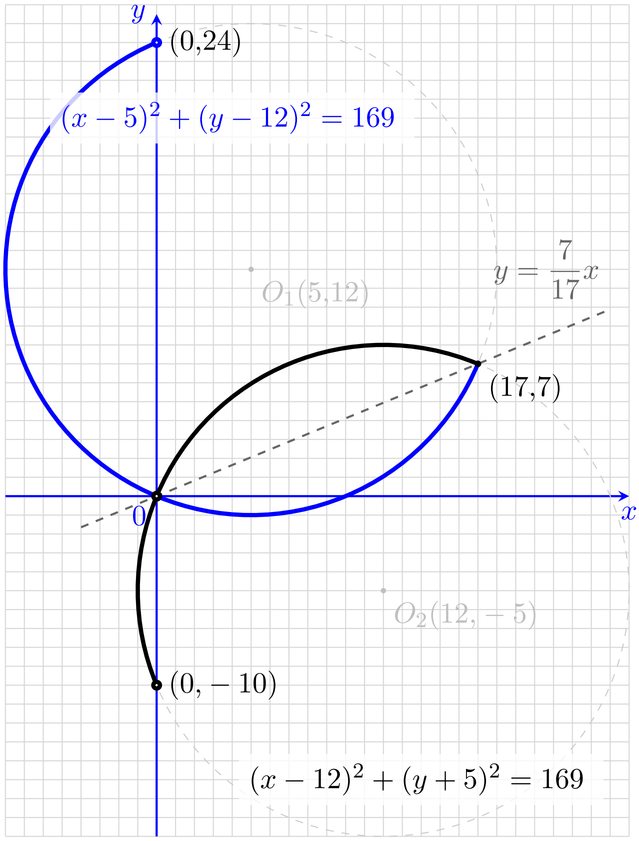
$$10+\frac{24y}{x}\leqslant 24-\frac{10y}{x}\quad\Longleftrightarrow\quad\frac{17y-7x}{x}\leqslant 0.$$

При $x>0$ это неравенство выполняется во всех точках, лежащих на прямой $y=\dfrac{7x}{17}$ и ниже неё, а при $x<0$ — во всех точках, лежащих на прямой $y=\dfrac{7x}{17}$ и выше неё.

При $\dfrac{17y-7x}{x}\leqslant 0$ первое уравнение системы принимает вид

$$x+\frac{y^2}{x}=10+\frac{24y}{x}\ \Leftrightarrow\ (x-5)^2+(y-12)^2=169. \qquad (3)$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(5;12)$ и радиусом 13. Прямую $y=\dfrac{7x}{17}$ окружность (3) пересекает в точках $(0;0)$ и $(17;7)$, а прямую $x=0$ — в точках $(0;0)$ и $(0;24)$. Значит, часть множества M, точки которой удовлетворяют неравенству $\dfrac{17y-7x}{x}\leqslant 0$, есть дуга окружности (3) с концами $(0;24)$ и $(17;7)$ за исключением точки $(0;0)$.



При $\dfrac{17y-7x}{x}>0$ первое уравнение системы принимает вид

$$x+\frac{y^2}{x}=24-\frac{10y}{x}\ \Leftrightarrow\ (x-12)^2+(y+5)^2=169. \qquad (4)$$

Это уравнение окружности с центром в точке $(12;-5)$ и радиусом 13. Прямую $y=\dfrac{7x}{17}$ эта окружность пересекает в точках $(0;0)$ и $(17;7)$, а прямую $x=0$ — в точках $(0;0)$ и $(0;-10)$.

Поэтому часть множества M, точки которой удовлетворяют условию $\dfrac{17y-7x}{x}>0$, есть дуга окружности (4) с концами $(0;-10)$ и $(17;7)$ за исключением точки $(0;0)$.

Итак, множество M имеет вид объединения двух указанных дуг за исключением точки $(0;0)$.

Перепишем второе уравнение системы в виде $y-7=a(x-17)$. При различных значениях параметра a данное уравнение задаёт прямые с угловым коэффициентом a, проходящие через точку $(17;7)$. Отметим, что любая прямая, проходящая через эту точку, кроме вертикальной, может быть задана данным уравнением с помощью выбора значения a.

Найдем значения a, при которых окружность (3) касается прямой $ax-y-17a+7=0$:

$$\frac{|5a-12-17a+7|}{\sqrt{a^2+1}}=13\ \Leftrightarrow\ |12a+5|=13\sqrt{a^2+1}\ \Leftrightarrow\ 25a^2-120a+144=0\ \Leftrightarrow\ (5a-12)^2=0\ \Leftrightarrow\ a=\frac{12}{5}.$$

Теперь определим значения a, при которых окружность (4) касается данной прямой:

$$\frac{|12a+5-17a+7|}{\sqrt{a^2+1}}=13\ \Leftrightarrow\ |12-5a|=13\sqrt{a^2+1}\ \Leftrightarrow\ 144a^2+120a+25=0\ \Leftrightarrow\ a=-\frac{5}{12}.$$

Найдём количество точек пересечения прямой $y=a(x-17)+7$ со множеством M:

1) при $a \in (-\infty; -1]$ — 1 общая точка;

2) при $a \in \left(-1; -\dfrac{5}{12}\right]$ — 2 общие точки;

3) при $a \in \left(-\dfrac{5}{12}; \dfrac{7}{17}\right)$ — 3 общие точки;

4) при $a = \dfrac{7}{17}$ — 1 общая точка;

5) при $a \in \left(\dfrac{7}{17}; 1\right)$ — 3 общие точки;

6) при $a \in \left[1; \dfrac{12}{5}\right)$ — 2 общие точки;

7) при $a \in \left[\dfrac{12}{5}; +\infty\right)$ — 1 общая точка.

Следовательно, искомое множество значений параметра есть $a \in \left(-1; -\dfrac{5}{12}\right] \cup \left[1; \dfrac{12}{5}\right)$.