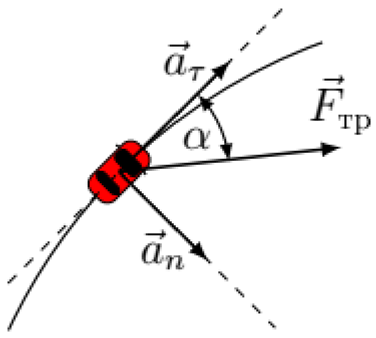
1 ?? До какой максимальной скорости может разогнаться автомобиль на этой дороге?



В рамках предположений условия максимальная величина сила трения колес о поверхность дороги равна $|\vec{F}_{\text{тр}}| = \mu N = \mu mg$, где m – масса автомобиля, и при этом ее можно направить любом направлении в горизонтальной плоскости дороги. Так как другие горизонтальные силы на автомобиль не действуют, то именно сила трения и разгоняет автомобиль, и удерживает его на нужной траектории. Пусть α – угол между скоростью автомобиля и направлением силы трения в некоторый момент времени (см. рисунок). Тогда уравнения для касательной и центростремительной компонент ускорения автомобиля имеют вид

$$\begin{cases} ma_\tau = m\frac{dv}{dt} = \mu mg \cdot \cos(\alpha) \\ ma_n = m\frac{v^2}{R} = \mu mg \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu gR \cdot \sin(\alpha) \end{cases} (1).$$

Видно, что разгон автомобиля завершается $\left(\frac{dv}{dt} = 0\right)$ и скорость достигает максимального возможного значения $v_m = \sqrt{\mu gR} = 20$ м/с при $\alpha = 90^\circ$. Далее угол α и скорость автомобиля поддерживаются постоянными.

2 ?? Определите скорость автомобиля при прохождении точек C, D и B во время заезда (см. рисунок).

Уравнение для касательной компоненты ускорения можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{v \cdot dv}{v \cdot dt} = \frac{1}{2}\frac{d(v^2)}{ds} = \mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha)(2).$$

Здесь s– путь, пройденный автомобилем от момента старта.
Далее можно действовать как минимум тремя путями.

СПОСОБ I: Подставив в (2) квадрат скорости из второго уравнения (1), находим, что

$$\mu gR\frac{d(\sin(\alpha))}{ds} = \mu gR \cdot \cos(\alpha)\frac{d\alpha}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \Rightarrow d\alpha = \frac{2}{R}ds.$$

На старте $s = 0$ и $\alpha = 0$, то есть после суммирования приращений в этом соотношении от старта до любого момента времени в процессе разгона получаем связь угла α с пройденным автомобилем расстоянием $\alpha(s) = \frac{2s}{R}$. Значит, разгон завершится в момент времени, когда $\alpha = \frac{\pi}{2} \Rightarrow s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C.

СПОСОБ II: Выразив $\sin(\alpha) = \frac{v^2}{\mu gR} = \left(\frac{v}{v_m}\right)^2$ и подставив это соотношение в уравнение (2), приводим его к виду $\frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4}$. Введем новую переменную $y \equiv \left(\frac{v}{v_m}\right)^2$, и получим уравнение $\frac{dy}{ds} = \frac{2}{R}\sqrt{1-y^2} \Rightarrow \frac{2}{R}ds = \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}$. Интегрируя его по любому участку пути на дуге AC, находим, что

$$\frac{2}{R}s = \int\limits_0^{(v/v_m)^2} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arcsin\left(\frac{v^2}{v_m^2}\right) \Rightarrow v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right).$$

Как видно, скорость достигает максимума при $s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C.

СПОСОБ III: Составив систему из второго уравнения в (1) и (2), можно получить из нее уравнение для зависимости $v^2(s)$ на участке AC

$$\begin{cases} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ v^2 = \mu gR \cdot \sin(\alpha) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d(v^2)}{ds} = 2\mu g \cdot \cos(\alpha) \\ \frac{d(v^2)}{ds} = \mu gR \cdot \cos(\alpha)\frac{d\alpha}{ds} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2(v^2)}{ds^2} = -2\mu g \cdot \sin(\alpha)\frac{d\alpha}{ds} \\ \frac{d\alpha}{ds} = \frac{2}{R} \end{cases}$$

Действительно, подставляя в уравнение для $\frac{d^2(v^2)}{ds^2}$ полученные выражения для $\sin(\alpha)$ и $\frac{d\alpha}{ds}$, приходим к уравнению гармонических колебаний

$$\frac{d^2(v^2)}{ds^2} + \frac{4}{R^2}v^2 = 0.$$

С учетом условий $v^2(0) = 0$ и $(v^2)'_s(0) = \mu gR$ приходим к решению $v^2(s) = v_m^2 \cdot \sin\left(\frac{2s}{R}\right)$. Как видно, скорость достигает максимума при $s = \frac{\pi R}{4}$, то есть точно в точке C.

Таким образом, во время заезда с минимальным временем прохождения полуокружности скорость автомобиля в точках C,D и B равна максимальной: $v_C = v_D = v_B = v_m = \sqrt{\mu g R} = 20$ м/с.

3 ?? Найдите общее время прохождения полуокружности AB.

Ясно, что время прохождения участка полуокружности от C до B равно $t_{CB} = \frac{3\pi R}{4 v_m} = \frac{3\pi}{4}\sqrt{\frac{R}{\mu g}}$. В зависимости от способа решения в пункте 2 далее можно использовать разные способы решения и в этом пункте.

СПОСОБ I: Исключим угол α из уравнений (1): на участке AC

$$\sin(\alpha) = \frac{v^2}{\mu g R} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \mu g \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{v_m}\right)^4} \Rightarrow dt = \frac{v_m}{\mu g} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv \frac{v}{v_m}$. На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \beta\sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

СПОСОБЫ II и III: Поскольку на участке AC $v(s) = v_m\sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)} = \frac{ds}{dt}$, то:

$$dt = \frac{1}{v_m}\frac{ds}{\sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)}} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}}\frac{dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

где введено обозначение $x \equiv \sqrt{\sin\left(\frac{2s}{R}\right)}$. Отметим, что

$$\sin\left(\frac{2s}{R}\right) = x^2 \Rightarrow 2\cos\left(\frac{2s}{R}\right)\frac{ds}{R} = 2x dx \Rightarrow \frac{ds}{R} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}dx.$$

На этом участке величина x изменяется от 0 до 1, и поэтому, в соответствии с указанием из условия

$$t_{AC} = \sqrt{\frac{R}{\mu g}} \cdot \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} = \beta\sqrt{\frac{R}{\mu g}}.$$

В итоге общее время прохождения полуокружности AB равно

Ответ:

$$T = t_{AC} + t_{CB} = \left(\beta + \frac{3\pi}{4}\right)\sqrt{\frac{R}{\mu g}} \approx 14{,}7\text{с}.$$

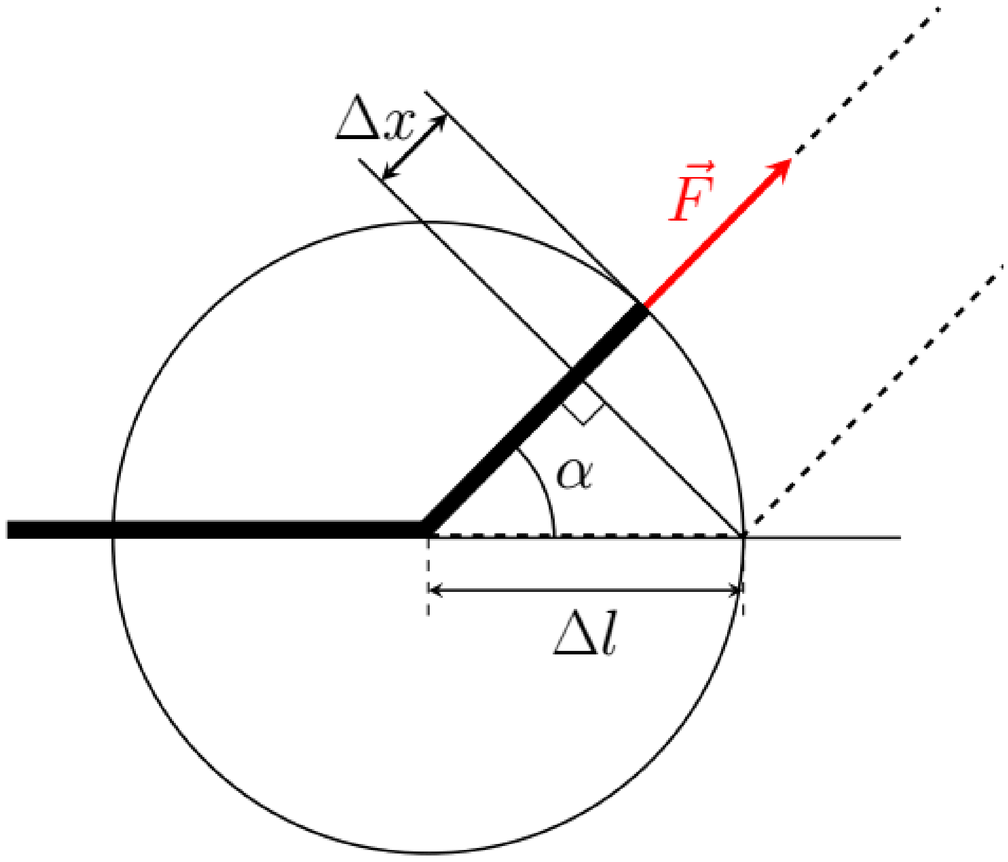
Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.

1 ?? Под каким углом к горизонту и в каком направлении следует тянуть за конец ленты, чтобы сила, при которой лента начнёт отрываться от стола, была минимальной?

Когда приложенная сила F постоянна по величине и направлению, угол наклона оторванной части ленты α также постоянен. Если внешняя сила достаточна по величине и приводит к отрыву части ленты малой длины Δl, точка, к которой приложена внешняя сила, перемещается на расстояние Δx, совершая при этом работу, которую можно связать с величиной σ и площадью ленты оторвавшейся части ленты $\Delta S = d \cdot \Delta l$:

$$\Delta A = \Delta x \cdot F = \sigma \cdot \Delta S = \sigma \cdot d \cdot \Delta l \qquad (1).$$



Перемещение точки приложения силы Δx может быть выражено через Δl и α:

$$\Delta x = \Delta l \cdot (1 - \cos\alpha) \qquad (2).$$

Подставляя (2) в (1), получаем выражение для силы $F = F(\alpha)$, необходимой для отрывания ленты от стола под некоторым углом:

$$F = \frac{\sigma d}{1 - \cos\alpha}.$$

Сила принимает минимальное значение при максимальном знаменателе $1 - \cos\alpha = 2$, то есть при $\alpha = \pi$.

Ответ: $\alpha = \pi$.

2 ?? Один из концов ленты частично оторвали от стола и прикрепили к нему невесомую нить, переброшенную через маленький (по сравнению с длинами нити и ленты) невесомый блок, расположенный на высоте $H = 1$ м, как показано на рисунке. При этом угол между нитью и горизонтом составил $\alpha_1 = 45^\circ$. К другому концу нити прикрепили груз. При какой максимальной массе груза m система будет покоиться?

Теперь рассмотрим второй случай. Силы натяжения ленты и нити равны по модулю, так что будем их обозначать T. Из условия равновесия груза $T = mg$.

Очевидно, что если сила натяжения T не превышает силу отрыва ленты для угла α_1, то лента не будет отрываться и система будет покоиться. Максимальная сила T, которая может быть достигнута при равновесии системы $T = \sigma d/(1 - \cos\alpha_1)$. Тогда масса груза равна

$$m = \frac{\sigma d}{(1 - \cos\alpha_1) \cdot g} \approx 0{,}068 \text{ кг}.$$

Ответ: $m \approx 68$ г.

3 ?? К первому грузу с максимально возможной массой m из предыдущего пункта прикрепили второй с неизвестной массой M и отпустили без начальной скорости. Лента стала отрываться, и система пришла в движение. Спустя некоторый промежуток времени грузы остановились, а наклонный участок ленты оказался под углом $\alpha_2 = 30^\circ$ к горизонту. Найдите массу второго груза M, расстояние Δh, на которое в результате сместились грузы, а также модули ускорений грузов в момент начала движения a_1 и в момент остановки a_2.

Теперь рассмотрим случай добавления груза массой M. Для начала определим длину участка ленты ΔL, который оторвался от стола до момента остановки грузов. Его можно выразить через высоту блока H и углы α_1 и α_2:

$$\Delta L = \frac{H}{\mathrm{tg}\alpha_2} - \frac{H}{\mathrm{tg}\alpha_1} \approx 0{,}732 \cdot H = 0{,}732 \text{ м}.$$

Для нахождения Δh используем условие на сохранение полной длины нити и ленты (ввиду их нерастяжимости):

$$\Delta L + L_1 = L_2 + \Delta h.$$

где $L_1 = H/\sin\alpha_1$ и $L_2 = H/\sin\alpha_2$ — это расстояния от блока до точки отрыва ленты от стола в начальный и конечный момент соответственно. Тогда

$$\Delta h = \frac{H}{\mathrm{tg}\alpha_2} - \frac{H}{\mathrm{tg}\alpha_1} + \frac{H}{\sin\alpha_1} - \frac{H}{\sin\alpha_2} = \\ = H\left(\frac{1-\cos\alpha_1}{\sin\alpha_1} - \frac{1-\cos\alpha_2}{\sin\alpha_2}\right) \approx 0{,}146 \cdot H = 0{,}146 \text{ м}.$$

Ответ: $\Delta h \approx 14{,}6$ см.

Положение, в котором остановится система, определяется законом изменения полной механической энергии: изменение потенциальной энергии груза (кинетическая энергия в крайних положениях равна нулю) равно работе по отрыву ленты:

$$(m+M)g \cdot \Delta h = A = \sigma d \Delta L.$$

Отсюда

$$M = \frac{\sigma d \Delta L}{g \Delta h} - m \approx 0{,}032 \text{ кг} = 32 \text{ г}.$$

Ответ: $M \approx 32$ г.

Ускорения грузов в начальный и конечный моменты времени находятся из второго закона Ньютона:

$$(m+M)a_1 = (m+M)g - T(\alpha_1)$$

или

$$(m+M)a_1 = (m+M)g - \frac{\sigma d}{1-\cos\alpha_1}.$$

Искомые значения:

$$a_1 = g - \frac{\sigma d}{(m+M)(1-\cos\alpha_1)} \approx 3{,}2 \text{ м/с}^2,$$

и

$$a_2 = \frac{\sigma d}{(m+M)(1-\cos\alpha_2)} - g \approx 4{,}9 \text{ м/с}^2.$$

Заметим, что после остановки ускорения грузов будут равны нулю.

Ответ: $a_1 \approx 3{,}2$ м/с^2, $a_2 \approx 4{,}9$ м/с^2.

Выразите $T_\text{г}$ через T_0 и $T_\text{х}$.

Поскольку поршни лёгкие и могут перемещаться без трения, давление внутри и снаружи одинаковое (равно p_0). Объём газа под поршнем $V = \pi r^2 h$, где h — высота расположения поршня. Уравнение Менделеева-Клапейрона для газа внутри цилиндра $p_0 \pi r^2 h = \nu RT$. Для малых изменений высоты и температуры $p_0 \pi r^2 dh = \nu R dT$, где $dh = v dt$.

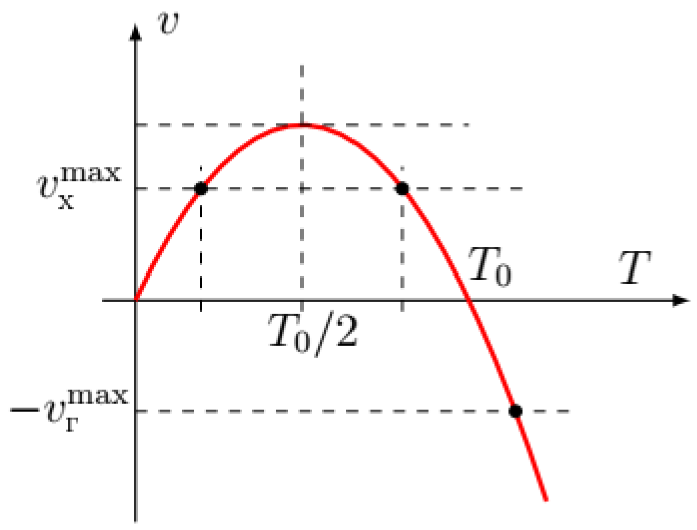
Изменение температуры газа происходит изобарически. Уравнение теплового баланса для малого промежутка времени $\alpha h 2\pi r (T_0 - T) dt = \nu C_p dT$.

Из трёх записанных уравнений находим связь скорости и температуры:

$$v = \frac{2\alpha\nu R^2}{\pi C_p p_0^2 r^3} \cdot T(T_0 - T).$$

Иначе $v(T) = aT(T_0 - T)$, где $a = \frac{2\alpha\nu R^2}{\pi C_p p_0^2 r^3} = \text{const}$.

Графическое отображение полученной зависимости – парабола, пересекающая ось абсцисс в точках 0 и T_0. Для горячего цилиндра максимальное значение скорости достигается в начальной точке движения при $T = T_\text{г}$ и равно по модулю $v_\text{г}^{\max} = aT_\text{г}(T_\text{г} - T_0)$.



Для холодного цилиндра максимальное значение скорости не определяется однозначно. При $T_\text{х} \geq T_0/2$ оно также достигается в начальной точке движения при $T = T_\text{х}$ и равно $v_\text{х}^{\max} = aT_\text{х}(T_0 - T_\text{х})$. Если $T_\text{х} < T_0/2$, то максимум скорости соответствует значению $T = T_0/2$ (вершина параболы) и равен $v_\text{х}^{\max} = aT_0^2/4$.

Приравнивая выражения для скоростей $v_\text{г}^{\max} = v_\text{х}^{\max}$, находим искомое.

При $T_\text{х} \geq T_0/2$ получим $T_\text{г}(T_\text{г} - T_0) = T_\text{х}(T_0 - T_\text{х})$. Решаем квадратное уравнение (относительно $T_\text{г}$): $T_\text{г}^2 - T_\text{г}T_0 - T_\text{х}(T_0 - T_\text{х}) = 0$, оставляем только положительный корень. Итак:

$$T_\text{г} = \frac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_\text{х}(T_0 - T_\text{х})}}{2}.$$

При $T_\text{х} < T_0/2$ получим $T_\text{г}(T_\text{г} - T_0) = T_0^2/4$. Решаем квадратное уравнение (относительно $T_\text{г}$): $T_\text{г}^2 - T_\text{г}T_0 - T_0^2/4 = 0$, оставляем только положительный корень. Итак:

$$T_\text{г} = T_0 \cdot \frac{1 + \sqrt{2}}{2}.$$

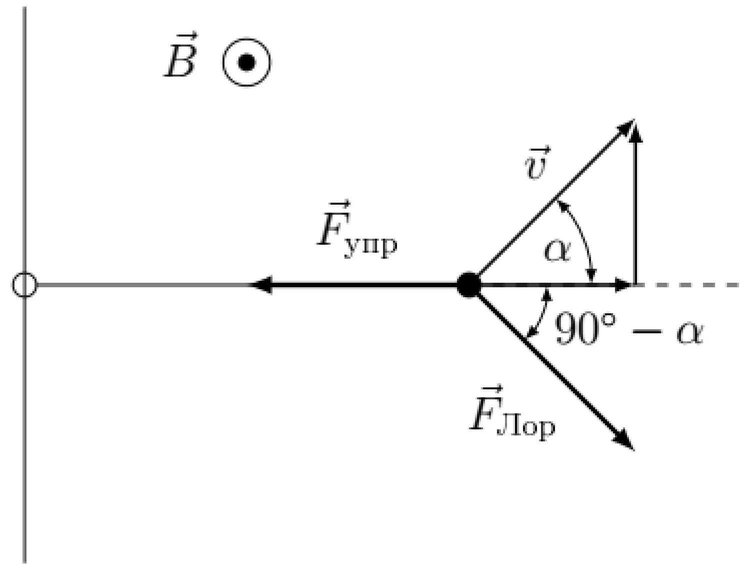
Ответ:

$$T_\text{г} = \begin{cases} T_0 \cdot \dfrac{1 + \sqrt{2}}{2}, \text{ если } T_\text{х} < T_0/2; \\ \dfrac{T_0 + \sqrt{T_0^2 + 4T_\text{х}(T_0 - T_\text{х})}}{2}, \text{ если } T_\text{х} \geq T_0/2. \end{cases}$$

Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.

1 ?? Определите траекторию заряда.



Пусть ось x горизонтальна и направлена от спицы, ось y направлена вверх вдоль спицы. Начало координат находится к точке начального положения заряда. Запишем проекции второго закона Ньютона:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB\cos(90^\circ - \alpha) \\ m\ddot{y} = -qvB\sin(90^\circ - \alpha) \end{cases}$$

Преобразуем полученные уравнения:

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qvB\sin(\alpha), \\ m\ddot{y} = -qvB\cos(\alpha). \end{cases}$$

$$\begin{cases} m\ddot{x} = -kx + qB\dot{y}, \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x}. \end{cases}$$

Метод 1

Продифференцируем по времени первое уравнение системы. Тогда

$$m\dddot{x} = -k\dot{x} + qB\ddot{y},$$

$$\dddot{x} + \left[\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2\right]\dot{x} = 0.$$

Обозначим $\beta^2 = \frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2$:

$$\dddot{x} + \beta^2\dot{x} = 0.$$

Откуда

$$\dot{x}(t) = C_1\cos(\beta t) + C_2\sin(\beta t).$$

Начальные условия:

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0, \\ \ddot{x}(0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0\cos(\beta t), \\ x(t) = \frac{v_0}{\beta}\sin(\beta t), \\ \dot{y}(t) = \frac{-qBv_0}{m\beta}\sin(\beta t), \\ y(t) = \frac{qBv_0}{m\beta^2}\left(\cos(\beta t) - 1\right). \end{cases}$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}}\right)^2 + \left(\frac{y(t) + \frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}}\right)^2 = 1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0, y_0) = \left(0, -\frac{qBv_0}{m\beta^2}\right) = \left(0, -\frac{qBmv_0}{km + (qB)^2}\right),$$

большой полуосью

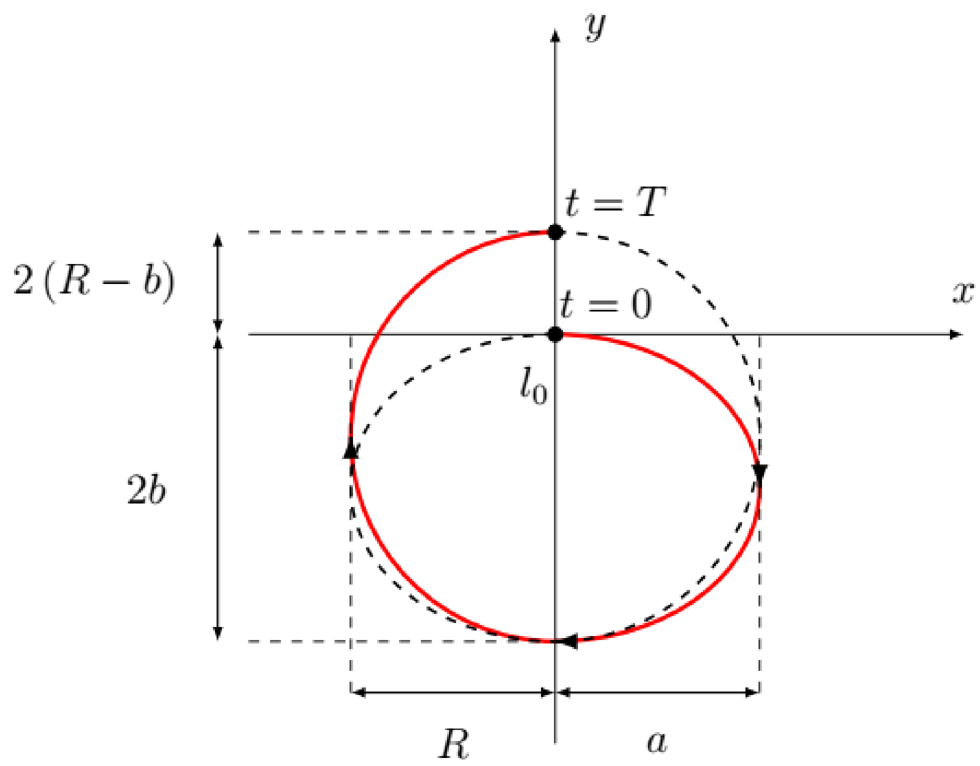
$$a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km + (qB)^2}} = R\gamma,$$

малой полуосью

$$b = \frac{qBv_0}{m\beta^2} = \frac{qBmv_0}{km + (qB)^2} = R\gamma^2,$$

где $R = \frac{mv_0}{qB}$ и $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{mk}{(qB)^2}}} < 1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по дуге окружности радиуса $R = \dfrac{mv_0}{qB}$.



Метод 2

Из $m\ddot{y} = -qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y = -\frac{qB}{m}dx = -\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y = 0$, $x = 0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y = -\Omega x.$$

Сила Лоренца не совершает работы, и, согласно закону сохранения энергии:

$$\frac{m{v_0}^2}{2} = \frac{m({v_x}^2 + {v_y}^2)}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Откуда:

$${v_x}^2 = {v_0}^2 - (\Omega^2 + \frac{k}{m})x^2 = {v_0}^2 - \beta^2 x^2,$$

где $\beta^2 = \Omega^2 + \frac{k}{m}$.
Выразим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x} = \frac{\Omega x}{\sqrt{{v_0}^2 - \beta^2 x^2}}.$$

Откуда:

$$dy = -\frac{\Omega}{\beta}\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \gamma d(\sqrt{a^2 - x^2}),$$

где $a = \frac{v_0}{\beta} = \frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}}$ и $\gamma = \frac{\Omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{mk}{(qB)^2}}} < 1$.

Суммируя малые изменения этих величин, получим:

$$y-0=\gamma(\sqrt{a^2-x^2}-a)$$

Откуда:

$$\left(\frac{y+\gamma a}{\gamma a}\right)^2+\left(\frac{x}{a}\right)^2=1.$$

Нетрудно заметить, что это уравнение эллипса. Координаты центра эллипса $(0,-\gamma a)$, его большая полуось равна $a=\frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}}=R\gamma$, а малая $b=\gamma a=\frac{qBmv_0}{km+(qB)^2}=R\gamma^2$.

Это уравнение описывает траекторию вплоть до возвращения длины резинки к исходной. Далее заряд попадает в область, где резинка провисает, и он движется по окружности радиуса $R=\frac{v_0}{\Omega}=\frac{mv_0}{qB}$ до возвращения длины резинки к исходной, после чего резинка натягивается и движение повторяется.

Метод 3

Из второго уравнения системы $m\ddot{y}=-qB\dot{x}$ получим:

$$dv_y=-\frac{qB}{m}dx=-\Omega dx.$$

С учетом того, что в начале движения $v_y=0$, $x=0$ и суммируя малые изменения этих величин, получаем, что

$$v_y=-\Omega x.$$

Подставим это в первое уравнение системы:

$$m\ddot{x}=-kx-qB\Omega x.$$

$$\ddot{x}=-\left(\frac{k}{m}+\Omega^2\right)x$$

Обозначим $\beta^2=\Omega^2+\frac{k}{m}$.

$$x=C_1\cos(\beta t)+C_2\sin(\beta t)$$

Из начальных условий:

$$\begin{cases}x(0)=0\Rightarrow C_1=0,\\ \dot{x}(0)=v_0\Rightarrow C_2=\frac{v_0}{\beta}.\end{cases}$$

$$x=\frac{v_0}{\beta}\sin(\beta t)$$

Подставим в выражение для v_y:

$$\dot{y}=-\Omega x=-\frac{\Omega v_0}{\beta}\sin(\beta t).$$

Интегрируя, получаем:

$$y=\frac{\Omega v_0}{\beta^2}(\cos(\beta t)-1)\,.$$

Заметим, что

$$\left(\frac{x(t)}{\frac{v_0}{\beta}}\right)^2+\left(\frac{y(t)+\frac{qBv_0}{m\beta^2}}{\frac{qBv_0}{m\beta^2}}\right)^2=1.$$

То есть уравнение траектории при натянутой резинке представляет собой эллипс с центром в

$$(x_0,y_0)=\left(0,-\frac{qBv_0}{m\beta^2}\right)=\left(0,-\frac{qBmv_0}{km+(qB)^2}\right),$$

большой полуосью

$$a=\frac{v_0}{\beta}=\frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}}=R\gamma,$$

малой полуосью

$$b=\frac{qBv_0}{m\beta^2}=\frac{qBmv_0}{km+(qB)^2}=R\gamma^2,$$

где $R=\frac{mv_0}{qB}$ и $\gamma=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{mk}{(qB)^2}}}<1$.

Однако при недеформированном шнуре (то есть когда координата x будет меньше 0) заряд будет двигаться по окружности радиуса $R=\frac{mv_0}{qB}$.

Ответ: При положительном удлинении шнура $\Delta x>0$ траектория является частью эллипса с большой и малой полуосями: $a=\frac{mv_0}{\sqrt{km+(qB)^2}}$, $b=\frac{qBmv_0}{km+(qB)^2}$.

При ненатянутом шнуре $\Delta x=0$ траектория является частью окружности с радиусом $R=\frac{mv_0}{qB}$.

В целом траектория состоит из последовательно чередующихся половинок эллипса и окружности, которые без излома и без разрыва переходят друг в друга при $x = 0$.

2 ?? Определите дрейфовую скорость заряда.

Определим период движения заряда:

$$T = \frac{\pi}{\sqrt{\frac{k}{m} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2}} + \frac{\pi}{\frac{qB}{m}} = \frac{\pi m}{qB}\left(\frac{qB}{\sqrt{km + (qB)^2}} + 1\right).$$

Ответ: Тогда дрейфовая скорость

$$u = \frac{2\left(R - b\right)}{T} = \frac{2kmv_0}{\pi\sqrt{km + (qB)^2}\left(qB + \sqrt{km + (qB)^2}\right)}.$$

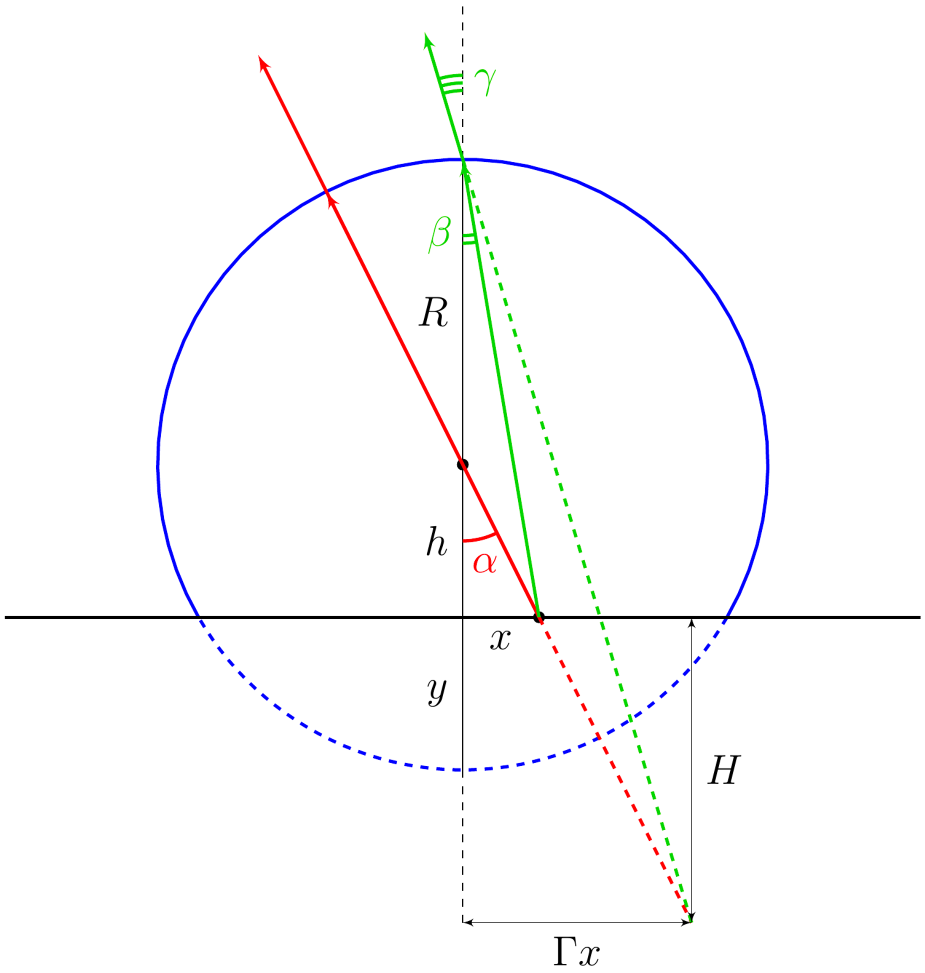
Website in English

2020 — Мы те, кого должны превзойти.

1 ?? Определите показатель преломления стекла n.

Заметим, что по условию фотографирование происходит с большого расстояния, поэтому можно считать, что увеличение цилиндра в направлении его оси отсутствует. Дополнительно можно убедиться в этом, проверив, что точки пересечения линий миллиметровки и их изображений лежат примерно на оси цилиндра.

Теперь исследуем увеличение для параксиальных лучей в направлении, перпендикулярном оси цилиндра. Пусть расстояние от оси цилиндра до плоскости равно h. Будем считать его положительным, если осталось больше половины цилиндра. Рассмотрим точку, смещённую от плоскости симметрии системы на малое расстояние x. Найдём положение её изображения, образованного параксиальными лучами.



Из закона преломления света получаем:

$$\gamma = n\beta = \frac{nx}{h+R}.$$

Запишем геометрические соотношения.

$$\frac{x(h+H)}{h} = \Gamma x = \frac{nx(h+H+R)}{h+R}$$

Выразим и подставим значение H.

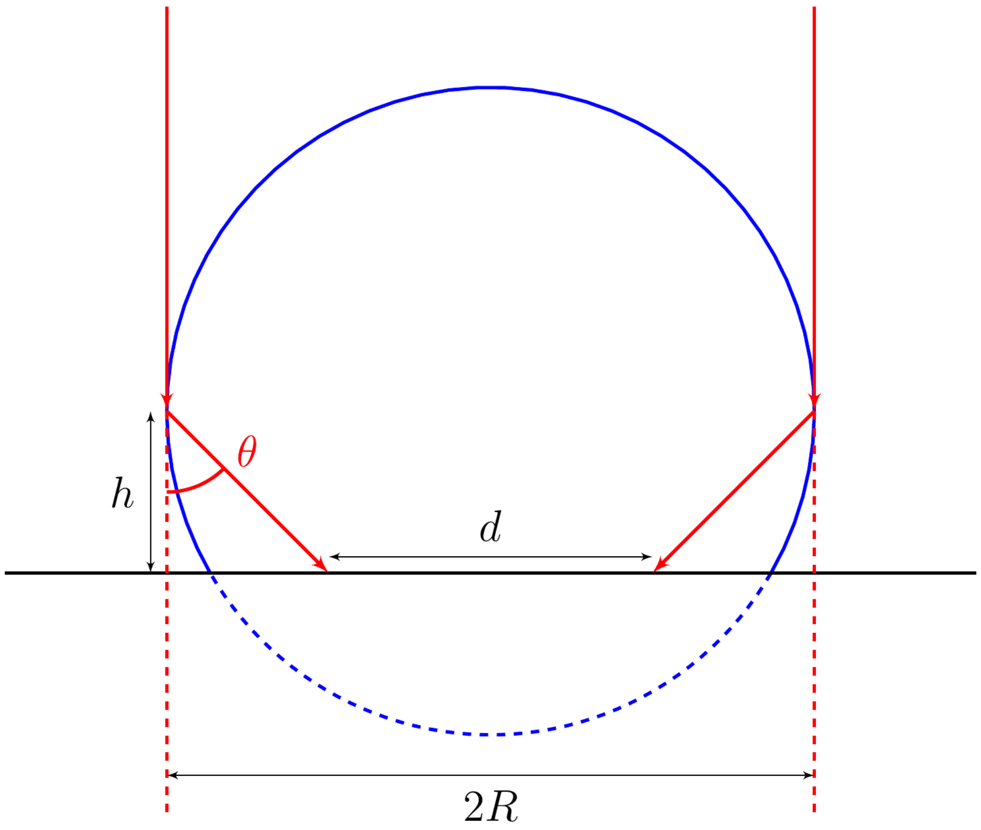
$$H = h(\Gamma - 1)$$

$$\Gamma(h+R) = n\left(\Gamma h + R\right)$$

Получаем искомое увеличение:

$$\Gamma = \frac{nR}{R-(n-1)h}$$

Заметим, что мы видим не всю миллиметровку, которую закрывает цилиндр. Такое может быть только в случае $h > 0$, то есть отрезали меньше половины цилиндра. По фотографии видно, что область видимости ограничивают лучи, идущие по касательной к цилиндру.



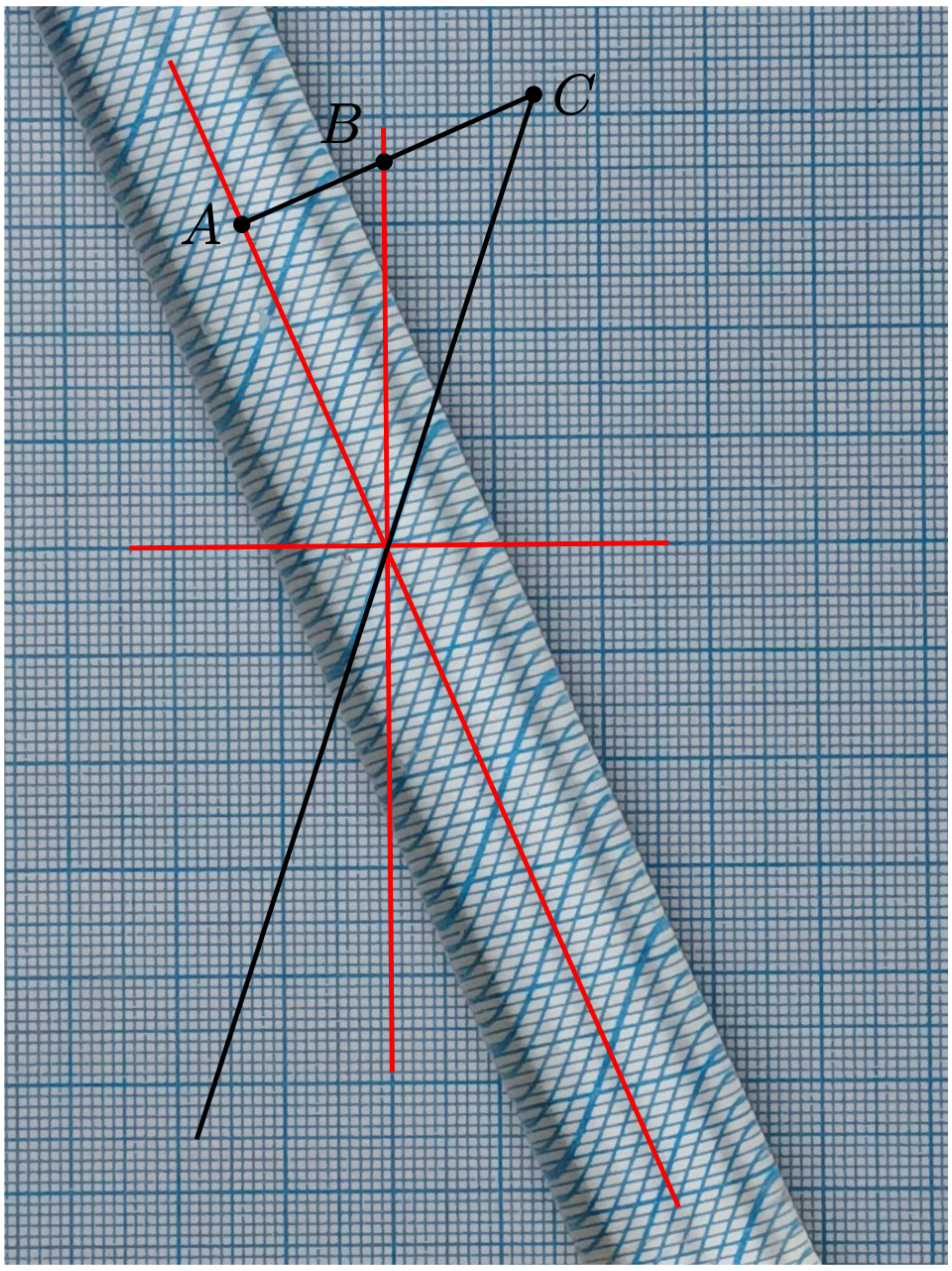
Из закона преломления света имеем:

$$\cos\theta = \frac{1}{n}.$$

$$d = 2\left(R - h\mathrm{tg}\theta\right)$$

$$\frac{d}{2R} = 1 - \frac{h\sqrt{n^2-1}}{R}$$

Теперь достаточно измерить по фотографии Γ и d/R. Тогда у нас будет система из двух уравнений с двумя неизвестными.



Проведём ось цилиндра, вертикальную линию миллиметровки и касательную к её изображению в точке на оси цилиндра. Отрезок CA – перпендикуляр из точки касательной на ось цилиндра. Тогда увеличение можно найти по фотографии:

$$\Gamma = \frac{AC}{AB} \approx 2{,}0.$$

Для поиска области видимости можем воспользоваться подобием: для любой прямой можем определить, какую её часть видно через цилиндр. Воспользуемся горизонтальной линией на миллиметровке: закрыто цилиндром 22 мм, видно через цилиндр 9 мм.

$$\frac{d}{2R} \approx 0{,}41$$

Для удобства введём обозначение $\xi = h/R$.

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{n}{1-(n-1)\xi}; \\ 0{,}41 = 1 - \xi\sqrt{n^2-1}\,. \end{cases}$$

$$\xi = \frac{0{,}59}{\sqrt{n^2-1}} = \frac{2-n}{2(n-1)}.$$

Получили уравнение на n, которое можно решить численно: $n = 1{,}48$.

Ответ:

$$n = 1{,}48$$

2 ?? Какая часть радиуса цилиндра отсечена плоскостью?

Подставляя полученное значение в формулы для ξ, получаем:

$$\xi = 0{,}54.$$

При этом искомая величина выражается через ξ:

$$\frac{y}{R} = \frac{R-h}{R} = 1 - \xi = 0{,}46.$$

Ответ:

$$\frac{y}{R} = 0{,}46$$

Website in English

0[??] Запишите номер установки.

Запишем номер установки, указанный на пружине.

1[??] Измерьте зависимость веса пружины P, установленной на весы одним из оснований, от вертикальной координаты x верхнего витка пружины. Полученные данные представьте в виде: $\Delta P = P - P_0$, где P_0 — вес всей пружины и $\Delta x = x - x_0$, где x_0 — вертикальная координата верхнего витка пружины, когда вся пружина покоилась на весах.

При помощи малярного скотча закрепим деревянную линейку 40 см к одному из брусочков, так чтобы расположив брусочек на боковой стороне, линейка оказалась в вертикальном положении. При помощи малярного скотча закрепим деревянную линейку 20 см ко второму брусочку, так чтобы положив брусочек одной из больших граней на стол линейка оказалась параллельна столу. Нижний виток пружины поместим на весы, а верхний виток пружины зацепим линейкой 20 см и, прижимая второй брусок к первому, начнем аккуратно поднимать второй брусок по поверхности первого. В ходе измерений пружина не должна соскальзывать с измеряемой области весов. Полученные данные представим в виде таблицы.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
m, г	20,37	15,32	13,41	12,41	11,32	9,89	8,84	8,13	7,17	6,63	6,11	5,2
$\lvert\Delta P\rvert$, 10^{-3}Н	0	49	68	78	89	103	113	120	129	135	140	149
x, см	6,2	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10	10,5	11	11,5	12
Δx, 10^{-3}м	0	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58
№	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
m, г	4,41	4,18	3,46	3,08	2,42	2,08	1,43	0,64	0,32	0,1	0	
$\lvert\Delta P\rvert$, 10^{-3}Н	156	159	166	169	176	179	186	193	196	199	200	
x, см	12,5	13	13,5	14	14,5	15	15,5	16	16,5	17	17,5	
Δx, 10^{-3}м	63	68	73	78	83	88	93	98	103	108	113	

2[??] Предложите теоретическую зависимость $\Delta P(\Delta x)$ для большого числа витков, изменивших своё положение.

Пусть m — масса одного витка, k – коэффициент жёсткости одного витка. Изменение высоты верхнего витка $\Delta x_1 = mg(n - 1/2)/k$, где n – количество витков с ненулевой деформацией. Изменение высоты i-го сверху витка $\Delta x_i = mg(n - i/2)/k$. Суммарное изменение длины пружины равно

$$\Delta x = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \frac{mg}{k} \sum_{i=1}^{n} (n - i/2) = \frac{mgn^2}{2k}.$$

Изменение показаний весов и веса пружины: $|\Delta m| = |\Delta P|/g = mn$ и $|\Delta P| = mgn$.
Тогда

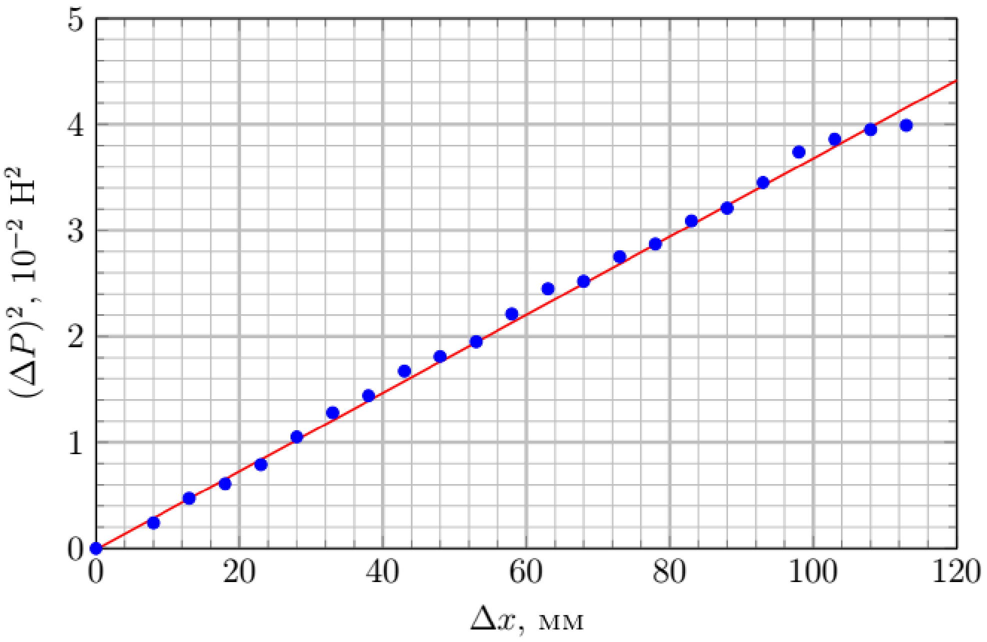
$$(\Delta P)^2 = 2kmg\Delta x \text{ или } |\Delta P| = \sqrt{2kmg}\sqrt{\Delta x}.$$

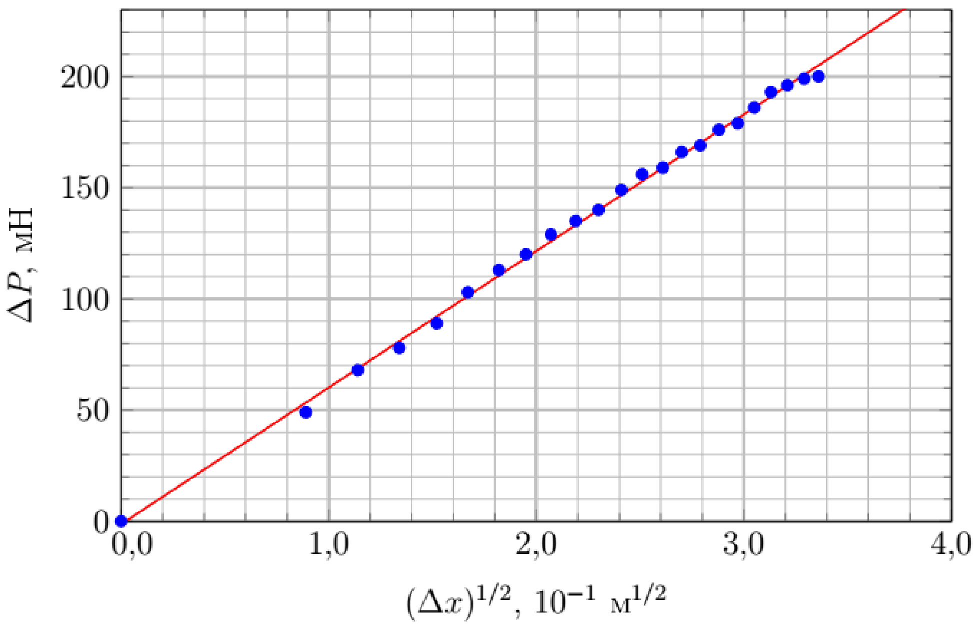
3[??] На основании экспериментальных данных пункта 1 с помощью графика проверьте соответствие теории и эксперимента.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\lvert\Delta P\rvert$, 10^{-3}Н	0	49	68	78	89	103	113	120	129	135	140	149
Δx, 10^{-3}м	0	8	13	18	23	28	33	38	43	48	53	58
ΔP^2, 10^{-2}Н^2	0,00	0,24	0,47	0,61	0,79	1,05	1,28	1,44	1,67	1,81	1,95	2,21
$\Delta x^{1/2}$, 10^{-1}м$^{1/2}$	0,00	0,89	1,14	1,34	1,52	1,67	1,82	1,95	2,07	2,19	2,30	2,41
№	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	
$\lvert\Delta P\rvert$, 10^{-3}Н	156	159	166	169	176	179	186	193	196	199	200	
Δx, 10^{-3}м	63	68	73	78	83	88	93	98	103	108	113	
ΔP^2, 10^{-2}Н^2	2,45	2,52	2,75	2,87	3,09	3,21	3,45	3,74	3,86	3,95	3,99	

$\Delta x^{1/2},\ 10^{-1}\text{м}^{1/2}$	2,51	2,61	2,70	2,79	2,88	2,97	3,05	3,13	3,21	3,29	3,36

Построим график $(\Delta P)^2(\Delta x)$ или $|\Delta P|(\sqrt{\Delta x})$ для проверки соответствия теории и эксперимента.





Графики получились линейными, значит эксперимент подтверждает теорию.

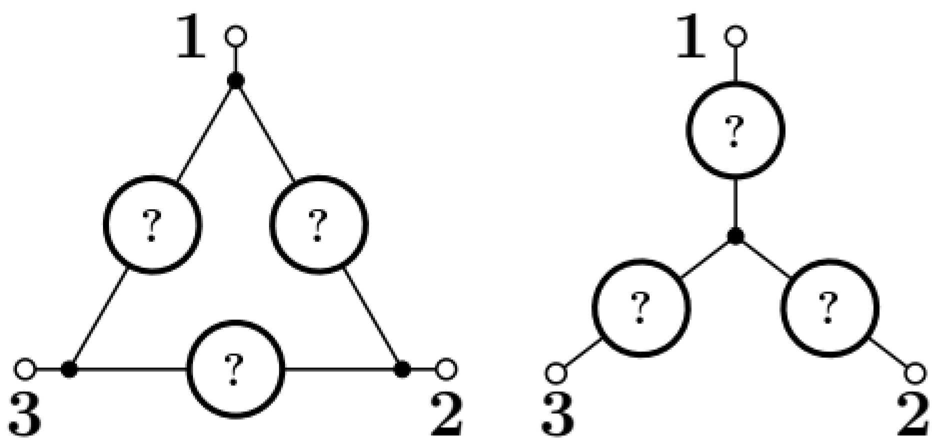
4 Используя результаты пунктов 2 и 3, определите коэффициент жёсткости одного витка пружины и оцените его погрешность.

Массу одного витка пружины можно вычислить $m = M/n$, где $M = 20{,}37$ г — масса всей пружины, а $n = 37$ — число витков.
Из углового коэффициента графика, построенного в пункте 3, выразим жёсткость одного витка: $k = \frac{\beta_1}{2mg}$ или $k = \frac{(\beta_2)^2}{2mg}$, где $\beta_1 = \frac{(\Delta P)^2}{\Delta x}$, $\beta_2 = \frac{|\Delta P|}{\sqrt{\Delta x}}$.
Произведем оценку погрешности: $k = k(\frac{\Delta\beta_1}{\beta_1} + \frac{\Delta m}{m})$ или $k = k(2\frac{\Delta\beta_2}{\beta_2} + \frac{\Delta m}{m})$.
При расчетах получаем: $k = (34{,}2 \pm 1{,}8)$ Н/м.

5 Оцените момент силы, создаваемый пружиной при повороте одного её конца относительно другого на один оборот вокруг оси симметрии цилиндрической части пружины. Опишите метод.

При помощи малярного скотча закрепим один виток пружины к концу деревянной линейки 40 см. Поместим пружину боковой стороной на стол, так чтобы линейка находилась в вертикальной плоскости, а свободный край линейки лежал на весах. Расположим бруски по обе стороны от линейки на расстоянии $2 - 3$ мм. Обнулим показания весов и начнем аккуратно скручивать свободный конец пружины относительно закреплённого на линейке. Создаваемый пружиной момент сил будет компенсироваться моментом силы реакции весов: $M = mgl$, где $m = 2{,}51$ г — показания весов, а $l = 41$ см — длина линейки.
Момент сил, создаваемый пружиной при повороте одного её конца относительно другого на один оборот: $M = 1{,}0 \cdot 10^{-2}$ Н · м.
Поскольку в данном опыте производится оценка измеряемой величины, то погрешность не вычисляется.

1 ?? Определите, по какой из двух возможных схем соединены элементы и что это за элементы.

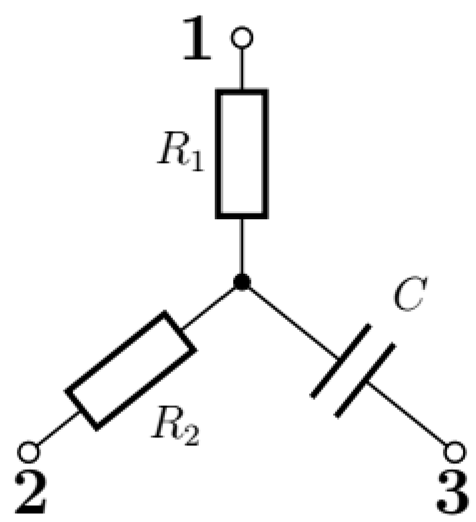


Подключим мультиметр в режиме омметра попарно к выводам $1-2$, $1-3$, $2-3$. При подключении к выводам $1-3$, $2-3$ показания омметра (сопротивление) будут увеличиваться от малого значения до бесконечности за времена порядка нескольких секунд, при подключении к выводам $1-2$ омметр будет регистрировать устойчивое значение сопротивления $115{,}4$ кОм.

Изменение показаний при подключении омметра к выводам схемы говорит о том, что происходит процесс зарядки или разрядки конденсатора. При соединении элементов по схеме типа "треугольник", для всех возможных вариантов подключения показания прибора меняются со временем. Неизменные значения могут быть зарегистрированы, если между контактами мультиметра находятся только резисторы. Таким образом, проведенные измерения позволяют точно установить схему в сером ящике (см. рисунок), при этом $R_1+R_2=115{,}4$ кОм.

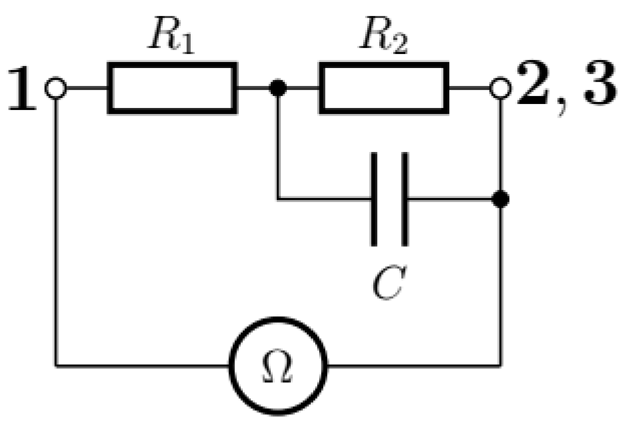
Отметим сразу, что характерное время заряда-разряда конденсатора в сером ящике через резисторы R_1 и R_2 невелико, и за времена порядка нескольких секунд конденсатор успевает полностью разряжаться или заряжаться.

Ответ:



2 ?? Определите параметры этих элементов (сопротивления резисторов и ёмкости конденсаторов).

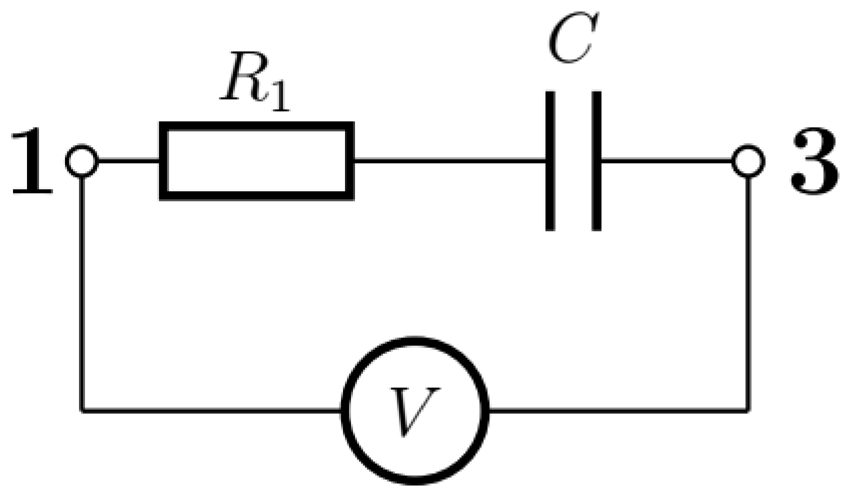
Соберём схему, указанную на рисунке, используя в качестве источника напряжения омметр в режиме измерения 2000 Ом.



Учитывая, что омметр представляет собой источник постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ с некоторым внутренним сопротивлением r, определим напряжение U_2, до которого зарядится конденсатор.

$$U_2=\frac{\mathcal{E}R_2}{R_1+R_2+r}$$

Далее отключим вывод 3 конденсатора от цепи и соберём следующую схему:



Показания подключенного таким образом вольтметра будут изменяться (уменьшаться) во времени, однако из-за сравнительно большого сопротивления мультиметра в режиме вольтметра изменение во времени будет относительно медленное. Фиксируя второе-третье показание вольтметра, можно сравнительно точно определить начальное напряжение на нём, которое связано с напряжением зарядки конденсатора:

$$U_2' = \frac{U_2 R_V}{R_1 + R_V} = \frac{\mathcal{E} R_2}{R_1 + R_2 + r} \cdot \frac{R_V}{R_1 + R_V}$$

Повторим эти измерения 5 раз, получим серию для U_2' и найдём среднее значение.

$U_2',\ \text{В}$					$< U_2' >,\ \text{В}$
1	2	3	4	5	1,62
1,60	1,62	1,61	1,64	1,63	

Проведем аналогичные измерения, поменяв местами резисторы R_1 и R_2 при зарядке конденсатора омметром. В этом случае напряжение на вольтметре:

$$U_1' = \frac{U_1 R_V}{R_1 + R_V} = \frac{\mathcal{E} R_1}{R_1 + R_2 + r} \cdot \frac{R_V}{R_1 + R_V}.$$

Выполним аналогичную серию измерений для U_1'.

$U_1',\ \text{В}$					$< U_1' >,\ \text{В}$
1	2	3	4	5	1,11
1,10	1,13	1,10	1,12	1,10	

Через отношение напряжений U_2' и U_1' найдём отношение сопротивлений R_2 и R_1:

$$\frac{U_2'}{U_1'} = \frac{R_2}{R_1} = 1{,}46.$$

Зная сумму сопротивлений, определим $R_2 = 68{,}5$ кОм, $R_1 = 46{,}9$ кОм.

Для определения ёмкости конденсатора подключим омметр к выводам $2 - 3$ и подождём несколько минут, предполагая, что за это время напряжение на конденсаторе установится равным ЭДС омметра $\mathcal{E}$. Переключив мультиметр в режим вольтметра, подключим его к выводам 2-3 и определим напряжение

$$U_3 = \frac{R_V}{R_2 + R_V} \mathcal{E}$$

в начальный момент времени после подключения (второе-третье показания вольтметра). Повторив измерения 5 раз, получим серию для U_3 . Перед каждым новым измерением обязательно будем разряжать конденсатор, замыкая выводы 3 и 1.

$U_3,\ \text{В}$					$< U_3 >,\ \text{В}$
1	2	3	4	5	2,68
2,68	2,66	2,70	2,65	2,68	

Затем повторим эксперимент, подключив к выводу 3 конденсатор известной ёмкости, и зарядим цепочку конденсаторов C и C_0 от омметра через сопротивление R_2 в течение нескольких минут. Установившееся напряжение на конденсаторе C при этом будет равно $\frac{\mathcal{E} C_0}{C_0 + C}$. Отключим конденсатор C_0, снова измерим напряжение между выводами $2 - 3$. В первый момент времени после подключения оно равно $U_4 = \frac{R_V}{R_2 + R_V} \frac{C_0}{C_0 + \mathrm{C}} \mathcal{E}$. При каждом новом измерении обязательно будем разряжать конденсаторы. Полученная серия для U_4 приведена ниже в таблице.

$U_4,\ \text{В}$					$< U_4 >,\ \text{В}$
1	2	3	4	5	1,33
1,32	1,35	1,34	1,34	1,30	

Через равенство отношений напряжений и ёмкостей

$$\frac{U_3}{U_4} = \frac{C_0 + C}{C_0} \approx 2{,}02$$

вычислим значение искомой ёмкости

$$C = C_0 \left(\frac{U_3}{U_4} - 1 \right) \approx 10{,}2 \text{ мкФ}.$$

Ответ: $R_1 = 46{,}9 \text{ кОм}; \;\; R_2 = 68{,}5 \text{ кОм}; \;\; C = 10{,}2 \text{ мкФ}$