1 вариант

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2025 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2025$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 400 точек и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 100. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

Задача 3. У Юры имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Процентное содержание кислоты в растворе равно 59,04%. Юра несколько раз совершает следующую операцию. Юра выливает из сосуда $\frac{1}{4}$ всего раствора, а затем доливает в освободившееся место кислоту. Сколько раз Юра совершил эту операцию, если процентное содержание кислоты в растворе стало равным 92,71%?

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) медиана AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK = 3$, $KN = 2$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{9}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 9 \\ 4x^2 + y^2 + z^2 = 4 \\ 3\sqrt{3}x + y + \sqrt{3}z = 3. \end{cases}$$

Задача 6. Решите уравнение

$$(\sin x + 2)(\cos x + 2) = \frac{21}{8}.$$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$16^{2x} + 5 \cdot 16^x = a \cdot 16^x + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right]$.

Задача 8. Гора имеет форму прямого кругового конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на окружности основания конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA = 60$, $AB = 10$, $OA = 20$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH (по железной дороге).

Задача 9. График функции $y(x) = -x^4 + 10x^3 - 33x^2 + \frac{124}{3}x - 13$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Задача 10. В классе 24 ученика, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах шестеро учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?

Страница олимпиады: *https://olimpiada.ru/ommo*

2 вариант

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2027 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2027$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 144 точки и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 36. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

Задача 3. У Тани имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Масса раствора 3 кг, процентное содержание кислоты в растворе равно 89,76%. Таня несколько раз совершает следующую операцию. Таня доливает в сосуд 1 кг кислоты, а затем выливает из сосуда 1 кг раствора. Сколько раз Таня совершила эту операцию, если процентное содержание кислоты в растворе стало равным 97,57%?

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) на отрезке BC выбрана точка M так, что $BM : MC = 4 : 3$. Отрезок AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK = 3$, $KN = 2$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{4}{z^2} = 9 \\ x^2 + 9y^2 + z^2 = 4 \\ 2\sqrt{3}x - 6y + \sqrt{3}z = 2. \end{cases}$$

Задача 6. Решите уравнение

$$(\sin x + 1)(\cos x + 1) = \frac{9}{8}.$$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$4^{2x} + 5 \cdot 4^x = a \cdot 4^x + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

Задача 8. Гора имеет форму прямого кругового конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на окружности основания конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA = 180$, $AB = 20$, $OA = 30$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH (по железной дороге).

Задача 9. График функции $y(x) = -x^4 + 2x^3 + 3x^2 - \frac{8}{3}x + 3$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Задача 10. В классе 28 учеников, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах семеро учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?

Страница олимпиады: *https://olimpiada.ru/ommo*

3 вариант

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2029 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2029$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 256 точек и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 64. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

Задача 3. У Димы имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Процентное содержание кислоты в растворе равно 27,1%. Дима несколько раз совершает следующую операцию. Дима выливает из сосуда $\frac{1}{3}$ раствора, а затем доливает в освободившееся место кислоту. Сколько раз Дима совершил эту операцию, если процентное содержание кислоты в растворе стало равным 93,6%?

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) медиана AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK = 6$, $KN = 4$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{4}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 4 \\ x^2 + y^2 + 9z^2 = 9 \\ x + 2\sqrt{6}y - \sqrt{6}z = 6. \end{cases}$$

Задача 6. Решите уравнение

$$(\sin x - 2)(\cos x + 2) = -\frac{37}{8}.$$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$2^{2x} + 5 \cdot 2^x = a \cdot 2^x + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[1, 2]$.

Задача 8. Гора имеет форму прямого кругового конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на окружности основания конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA = 120$, $AB = 30$, $OA = 40$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH (по железной дороге).

Задача 9. График функции $y(x) = -x^4 - 2x^3 + 3x^2 + \frac{16}{3}x + 3$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Задача 10. В классе 20 учеников, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах пятеро учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?

4 вариант

Задача 1. Можно ли расставить все натуральные числа от 1 до 2031 в ряд так, что для любого $k = 1, 2, \ldots, 2031$ сумма первых k чисел в этом ряду нацело делится на k-е число в ряду?

Задача 2. На окружности через равные промежутки отметили 324 точки и провели все возможные хорды между ними. Хорду с концами в отмеченных точках назовем «чётной», если на большей дуге, которую она стягивает, лежит чётное число точек. В противном случае хорда «нечётная». Рядом с каждой вершиной написано число. Сумма квадратов этих чисел равна 16. На каждой хорде написано произведение чисел, стоящих на её концах. Сумма чисел на «чётных» хордах равна a, сумма чисел на «нечётных» хордах равна b. Найдите наибольшее возможное значение величины $a - b$.

Задача 3. У Оли имеется сосуд, заполненный раствором кислоты в воде. Масса раствора равна 1 кг, масса кислоты в растворе равна 0,9 кг. Оля несколько раз совершает следующую операцию. Оля доливает в сосуд 9 кг кислоты, а затем выливает из сосуда 9 кг раствора. Сколько раз Оля совершила эту операцию, если после всех операций в растворе оказалось 999,99999 г кислоты?

Задача 4. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90^\circ$) на отрезке BC выбрана точка M так, что $BM : MC = 4 : 3$. Отрезок AM пересекает биссектрису BN в точке K. Известно, что $BK = 6$, $KN = 4$. Найдите площадь треугольника ABC.

Задача 5. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{9}{y^2} + \dfrac{1}{z^2} = 4 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 = 9 \\ \sqrt{2}x + \sqrt{2}y + 2z = 3. \end{cases}$$

Задача 6. Решите уравнение

$$(\sin x - 1)(\cos x + 1) = -\frac{8}{9}.$$

Задача 7. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{2}^{2x} + 5 \cdot \sqrt{2}^{x} = a \cdot \sqrt{2}^{x} + 6$$

имеет хотя бы один корень на отрезке $[2, 4]$.

Задача 8. Гора имеет форму прямого кругового конуса с вершиной в точке C. Точка O — центр основания, точка A лежит на окружности основания конуса, а точка B — на отрезке CA, причем $CA = 90$, $AB = 20$, $OA = 30$. Железная дорога проложена по кратчайшему пути вокруг горы из точки A в точку B. Точка H — ближайшая к вершине горы из всех точек железной дороги. Найдите длину пути BH (по железной дороге).

Задача 9. График функции $y(x) = -x^4 - 10x^3 - 33x^2 - \frac{116}{3}x - 6$ имеет две точки максимума и одну точку минимума. К графику провели касательную с двумя точками касания. Найдите длину отрезка касательной между точками касания.

Задача 10. В классе 32 ученика, у каждого ровно 3 друга среди одноклассников. Однажды на каникулах восемь учеников подписались на канал по олимпиадной математике. После этого ученики стали общаться между собой. Когда ученик узнаёт, что хотя бы двое из его друзей уже подписались на канал, он также подписывается на этот канал. Могло ли в итоге случиться, что весь класс подписался на канал?
