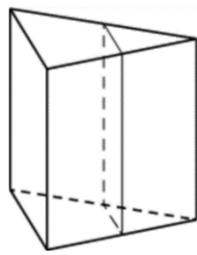






**3** Через среднюю линию основания треугольной призмы проведена плоскость, параллельная боковому ребру. Площадь боковой поверхности отсечённой треугольной призмы равна 37. Найдите площадь боковой поверхности исходной призмы.



Ответ: \_\_\_\_\_.

**4** На экзамене по геометрии школьник отвечает на один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос по теме «Вписанная окружность», равна 0,2. Вероятность того, что это вопрос по теме «Внешние углы», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**5** При выпечке хлеба производится контрольное взвешивание свежей буханки. Известно, что вероятность того, что масса окажется меньше 810 г, равна 0,98. Вероятность того, что масса окажется больше 790 г, равна 0,83. Найдите вероятность того, что масса буханки больше 790 г, но меньше 810 г.

Ответ: \_\_\_\_\_.

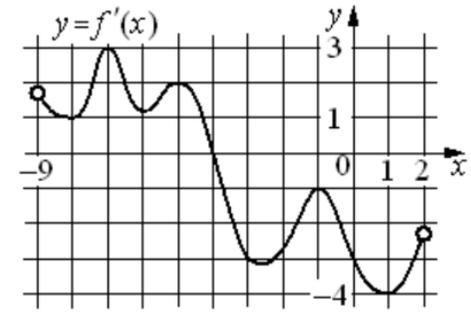
**6** Найдите корень уравнения  $\log_3(x + 4) = \log_3 16$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**7** Найдите значение выражения  $20^{-3,9} \cdot 5^{2,9} \cdot 4^{-4,9}$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

**8** На рисунке изображён график  $y = f'(x)$  — производной функции  $f(x)$ , определенной на интервале  $(-9; 2)$ . В какой точке отрезка  $[-8; -4]$  функция  $f(x)$  принимает наибольшее значение?



Ответ: \_\_\_\_\_.

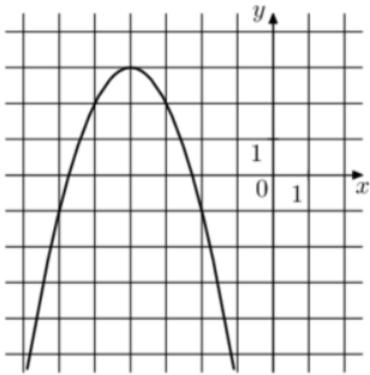
**9** Зависимость температуры (в градусах Кельвина) от времени для нагревательного элемента некоторого прибора была получена экспериментально. На исследуемом интервале температура вычисляется по формуле  $T(t) = T_0 + bt + at^2$ , где  $t$  — время в минутах,  $T_0 = 1300$  К,  $a = -\frac{14}{3}$  К/мин<sup>2</sup>,  $b = 98$  К/мин. Известно, что при температуре нагревателя свыше 1720 К прибор может испортиться, поэтому его нужно отключить. Определите, через какое наибольшее время после начала работы нужно отключить прибор. Ответ выразите в минутах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

**10** По двум параллельным железнодорожным путям друг навстречу другу следуют скорый и пассажирский поезда, скорости которых равны соответственно 70 км/ч и 50 км/ч. Длина пассажирского поезда равна 800 метрам. Найдите длину скорого поезда, если время, за которое он прошел мимо пассажирского поезда, равно 33 секундам. Ответ дайте в метрах.

Ответ: \_\_\_\_\_.

- 11** На рисунке изображён график функции  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , где числа  $a$ ,  $b$  и  $c$  — целые. Найдите значение  $f(-8)$ .



Ответ: \_\_\_\_\_.

- 12** Найдите наибольшее значение функции  $y = (x + 10)^2x + 2$  на отрезке  $[-11; -4]$ .

Ответ: \_\_\_\_\_.

*Не забудьте перенести все ответы в бланк ответов № 1 в соответствии с инструкцией по выполнению работы. Проверьте, чтобы каждый ответ был записан в строке с номером соответствующего задания.*

**Часть 2**

*Для записи решений и ответов на задания 13–19 используйте БЛАНК ОТВЕТОВ № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания (13, 14 и т. д.), а затем полное обоснованное решение и ответ. Ответы записывайте чётко и разборчиво.*

- 13** а) Решите уравнение

$$16^{\sin x} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x}$$

- б) Укажите корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $\left[2\pi; \frac{7\pi}{2}\right]$ .

- 14** Дана прямая призма  $ABCA_1B_1C_1$ , в основании которой лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ . На  $AB$  отмечена точка  $P$  такая, что  $AP:PB = 3:1$ . Точка  $Q$  делит пополам ребро  $B_1C_1$ . Точка  $M$  делит пополам ребро  $BC$ . Через точку  $M$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная  $PQ$ .

- а) Докажите, что прямая  $AB$  параллельна плоскости  $\alpha$ .  
 б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит отрезок  $PQ$ , если  $AA_1 = 5$ ,  $AB = 12$ ,  $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$ .

- 15** Решите неравенство

$$9^x - 3^x - 3^{1-x} + \frac{1}{9^{x-1}} \leq 6.$$

- 16** В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:

- каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;
- с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 311 040 рублей?



17 Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Известно, что  $AB = CD = 5$ , а  $BC = DE = 8$ .

- а) Докажите, что  $AC = CE$ .  
б) Найдите  $BE$ , если известно, что  $AD = 10$ .

18 Найдите все значения  $a$ , при каждом из которых уравнение

$$8x^6 + (a - |x|)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0$$

имеет более трёх различных решений.

19 Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка  $[23; 84]$ . Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

- а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?  
б) Может ли Петин результат быть ровно в 6 раз больше Васиного?  
в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?

*Проверьте, чтобы каждый ответ был записан рядом с номером соответствующего задания.*

**СОСТАВИТЕЛЬ ВАРИАНТА:**

<b>ФИО:</b>	Евгений Пифагор
<b>Предмет:</b>	Математика
<b>Стаж:</b>	14 лет готовлю к ЕГЭ и ОГЭ
<b>Регалии:</b>	Набрал <a href="#">100 баллов</a> на ЕГЭ по математике профиль <a href="#">Результаты моих учеников</a> Высшее образование – ТГУ (Тольятти), 2009-2014 Победитель трёх олимпиад по высшей математике
<b>ВК:</b>	<a href="https://vk.com/shkolapifagora">https://vk.com/shkolapifagora</a>
<b>Ютуб:</b>	<a href="https://www.youtube.com/c/pifagor1">https://www.youtube.com/c/pifagor1</a>



### Система оценивания экзаменационной работы по математике (профильный уровень)

Правильное выполнение каждого из заданий 1–12 оценивается 1 баллом. Задание считается выполненным верно, если ответ записан в той форме, которая указана в инструкции по выполнению задания, и полностью совпадает с эталоном ответа.

Номер задания	Правильный ответ	Видео решение
1	99	
2	11	
3	74	
4	0,55	
5	0,81	
6	12	
7	0,8	
8	-4	
9	6	
10	300	
11	-13	
12	2	
13	а) $\pi n, \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$ б) $2\pi; \frac{8\pi}{3}; 3\pi; \frac{10\pi}{3}$	
14	$\frac{16}{25}$	
15	[0; 1]	
16	201300	
17	8,2	
18	$\left(0; \frac{1}{8}\right)$	
19	а) да б) нет в) 3	

### Решения и критерии оценивания выполнения заданий с развёрнутым ответом

Количество баллов, выставленных за выполнение заданий 13–19, зависит от полноты решения и правильности ответа.

Общие требования к выполнению заданий с развёрнутым ответом: решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены. **Методы решения, формы его записи и формы записи ответа могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное количество баллов. Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.**

Эксперты проверяют только математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

При выполнении задания могут использоваться без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках, входящих в федеральный перечень учебников, допущенных к использованию при реализации имеющих государственную аккредитацию образовательных программ среднего общего образования.



13 а) Решите уравнение

$$16 \sin x = \left(\frac{1}{4}\right)^{2 \sin 2x}$$

б) Найдите все корни этого уравнения, принадлежащие отрезку  $[2\pi; \frac{7\pi}{2}]$ .

а)  $(4^2)^{\sin x} = (4^{-1})^{2 \sin 2x}$   
 $4^2 \cdot \sin x = 4^{-2 \sin 2x}$

$$2 \sin x = -2 \sin 2x \quad | :2$$

$$\sin x + \sin 2x = 0$$

$$\sin x + 2 \sin x \cdot \cos x = 0$$

$$\sin x \cdot (1 + 2 \cos x) = 0$$

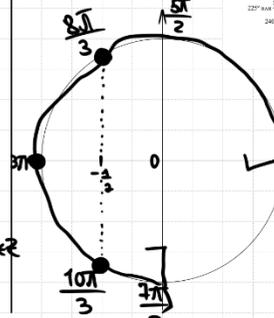
$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

б) Ответим корни с помощью окружности



Получим

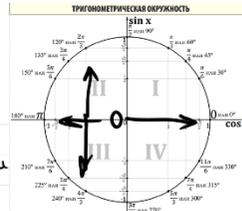
$$x = 2\pi$$

$$x = 3\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{1} - \frac{\pi}{3} = \frac{8\pi}{3}$$

$$x = \frac{3\pi}{1} + \frac{\pi}{3} = \frac{10\pi}{3}$$

Ответ: а)  $\pi n, n \in \mathbb{Z}$   
 б)  $2\pi, 3\pi, \frac{8\pi}{3}, \frac{10\pi}{3}$ .



ИСТОЧНИКИ

- ФИР (старый банк)
  - ФИР (новый банк)
  - Ященко 2020 (36 вар)
  - Ященко 2019 (36 вар)
  - Основная волна 2017
  - Основная волна 2015
- СТЕПЕНИ
- $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
  - $a^n : a^m = a^{n-m}$
  - $(a^b)^m = a^{b \cdot m}$
  - $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
  - $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
  - $a^0 = 1$
  - $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
  - $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$
- ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО УГЛА
- $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$
  - $\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha$
  - $\cos 2\alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1$
  - $\cos 2\alpha = 1 - 2 \sin^2 \alpha$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в обоих пунктах	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а ИЛИ получены неверные ответы из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения обоих пунктов: пункта а и пункта б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	2

14

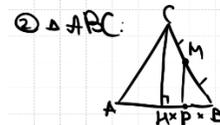
Дана прямая призма  $ABC_1B_1C_1$ , в основании которой лежит равнобедренный треугольник  $ABC$  с основанием  $AB$ . На  $AB$  отмечена точка  $P$  такая, что  $AP:PB = 3:1$ . Точка  $Q$  делит пополам ребро  $B_1C_1$ . Точка  $M$  делит пополам ребро  $BC$ . Через точку  $M$  проведена плоскость  $\alpha$ , перпендикулярная  $PQ$ .

ИСТОЧНИКИ  
 Основание волны 2023

а) Докажите, что прямая  $AB$  параллельна плоскости  $\alpha$ .

б) Найдите отношение, в котором плоскость  $\alpha$  делит отрезок  $PQ$ , если  $AA_1 = 5$ ,  $AB = 12$ ,  $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$ .

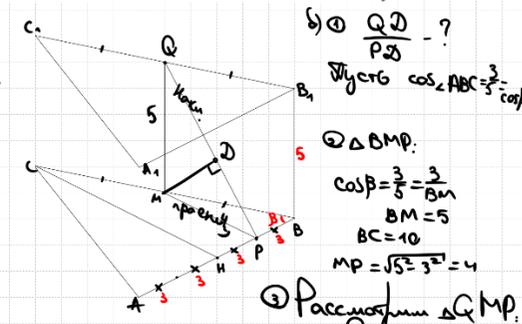
а) Рассмотрим  $\triangle QMP$  - равноср. Пусть  $M \in D$  - линия к  $QP$ .



MP - медиана  $\triangle BPC$   
 MP || AC  
 MP  $\perp$  AB

б) MP  $\perp$  AB  
 QP  $\perp$  AB по ЧТТ

в)  $d \perp QP$  (по усл.)  
 AB  $\perp$  QP по ЧТТ  
 значит AB || d



б)  $\frac{QD}{PQ} = ?$   
 Пусть  $\cos \angle ABC = \frac{3}{5}$

$\triangle BPC$ :  
 $\cos \beta = \frac{3}{5} = \frac{BM}{BC}$   
 $BM = 5$   
 $BC = 10$   
 $MP = \sqrt{5^2 + 3^2} = 4$

Рассмотрим  $\triangle QMP$ :  
 $QP = \sqrt{4^2 + 5^2} = \sqrt{41}$   
 $h = \frac{4 \cdot 5}{\sqrt{41}} = \frac{20}{\sqrt{41}}$

$QP = \frac{16}{\sqrt{41}}$   
 $QD = \frac{25}{\sqrt{41}}$   
 $\frac{QD}{PQ} = \frac{25}{16}$   
 Ответ:  $\frac{25}{16}$ .

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, и обоснованно получен верный ответ в пункте б	3
Получен обоснованный ответ в пункте б ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта а, и при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта а, ИЛИ при обоснованном решении пункта б получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте б с использованием утверждения пункта а, при этом пункт а не выполнен	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, приведённых выше	0
Максимальный балл	3





**15** Решите неравенство  
 $9^x - 3^x - 3^{1-x} + \frac{1}{9^{x-1}} \leq 6.$

**ИСТОЧНИКИ**  
 Основная волна (Резерв) 2024

$9^x - 3^x - \frac{3}{3^x} + \frac{9}{9^x} - \frac{6}{1} \leq 0$

Пусть  $3^x = t$

$\frac{t^2}{1} - \frac{t}{1} - \frac{3}{t} + \frac{9}{t^2} - \frac{6}{1} \leq 0$

$\frac{t^4 - t^3 - 6t^2 - 3t + 9}{t^2} \leq 0$

Заметим, что при  $t=1$  числитель др. в числ.  $t^4 - t^3 - 6t^2 - 3t + 9$

$t^4 - t^3 - 6t^2 - 3t + 9$

$t^3 - 6t^2 - 3t + 9$

$-6t^2 - 3t + 9$

$-6t^2 + 6t$

$-9t + 9$

$-9t + 9$

Заметим, что при  $t=3$  в др. в числ.  $t^3 - 6t^2 - 3t + 9$

$t^3 - 6t^2 - 3t + 9$

$t^3 - 3t^2$

$-3t^2 - 6t$

$-3t^2 - 9t$

$-3t - 9$

$-3t - 9$

$0$

Получаем  $(t-1)(t-3)(t^2+3t+3) \leq 0$

Заметим, что  $t^2+3t+3 > 0$  при любых  $t$

$1 \leq t \leq 3$

$3^0 \leq 3^x \leq 3^1$

$0 \leq x \leq 1$

Ответ:  $[0; 1]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Обоснованно получен ответ, отличающийся от верного исключением / включением граничных точек ИЛИ получен неверный ответ из-за вычислительной ошибки, но при этом имеется верная последовательность всех шагов решения	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	2

**16** В июле 2020 года планируется взять кредит в банке на некоторую сумму. Условия его возврата таковы:  
 - каждый январь долг увеличивается на 20% по сравнению с концом предыдущего года;  
 - с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.  
 Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен четырьмя равными платежами (то есть за четыре года) и банку будет выплачено 311 040 рублей?

**ИСТОЧНИКИ**  
 ГПР (старый банк)  
 ГПР (новый банк)  
 Основная волна 2024  
 Досрочная волна 2023  
 Досрочная волна 2018

Пусть  $S$  - сумма долга  
 март - месяц платежа  
 $x$  - ежемесячный платёж

① О.С.В.  $= 311\ 040 = 4x$   
 $x = 77\ 760$

②  $\frac{6^4}{5^4} \cdot S = \frac{6^3}{5^3} x + \frac{6^2}{5^2} x + \frac{6}{5} x + x$

$\frac{6^4}{5^4} S = \frac{216x + 180x + 150x + 125x}{5^3}$

$\frac{6^4}{5^4} S = \frac{671 \cdot x}{5^3}$

$S = \frac{671 \cdot 77\ 760 \cdot 5}{5^3 \cdot 6^4} = 671 \cdot 300 = 201\ 300 \text{ р.}$

Ответ: 201300

Дата	Сумма долга
ч 20	$S$
к 21	$1,2 \cdot S$
м 21	$1,2 \cdot S - x$
к 22	$1,2^2 \cdot S - 1,2x$
м 22	$1,2^2 \cdot S - 1,2x - x$
к 23	$1,2^3 \cdot S - 1,2^2 x - 1,2x - x$
м 23	$1,2^3 \cdot S - 1,2^3 x - 1,2^2 x - 1,2x - x$
к 24	$1,2^4 \cdot S - 1,2^4 x - 1,2^3 x - 1,2^2 x - 1,2x - x = 0$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	2
Верно построена математическая модель	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	
	2



**17** Пятиугольник  $ABCDE$  вписан в окружность. Известно, что  $AB = CD = 5$ , а  $BC = DE = 8$ .  
 а) Докажите, что  $AC = CE$ .  
 б) Найдите  $BE$ , если известно, что  $AD = 10$ .

**ИСТОЧНИКИ**  
 Основная волна 2024

а) Пусть  $AB = 2\alpha = CD$   
 (т.к. равные хорды стягивают равные дуги)  
 $BC = 2\beta = DE$

Тогда  $AC = 2\alpha + 2\beta = CE$   
 $AC = CE$   
 (т.к. равные дуги стягивают равные хорды)

б) Рассмотрим  $ABCD$  - трап. (рис.)

②  $\triangle ABC$ :  
 по т. кос:  
 $AC^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \cos \varphi$   
 $AC^2 = 25 + 64 + 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \frac{1}{5} = 105$   
 $AC = \sqrt{105} = CE$

③  $\triangle BCE$ :

по т. кос:  
 $105 = x^2 + 8^2 - 2 \cdot x \cdot 8 \cdot \frac{1}{5}$   
 $\dots x = 8,2$   
 Ответ: 8,2

Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	3

**18** Найдите все значения  $a$ , для каждого из которых уравнение  $8x^6 + (a - |x|)^3 + 2x^2 - |x| + a = 0$  имеет более трёх различных решений.

**ИСТОЧНИКИ**  
 ГПР (старый банк)  
 Основная волна (Резерв) 2012  
 Яценко 2018 (30 вар)

Рассмотрим  $f(t) = t^3 + t^1$   
 $f'(t) = 3t^2 + 1$   
 Знает  $f(t)$  возрастает на всей обл. оп.

Пусть  $2x^2 = u$   
 $|x| - a = \sqrt{u}$

Получаем  
 $u^3 + u = \sqrt{u}^3 + \sqrt{u}$   
 $f(u) = f(\sqrt{u})$

Это можно быть, только если  $u = \sqrt{u}$   
 Найти  $a$   
 $2x^2 = |x| - a$  более 3 разл. реш.  
 $a = -2x^2 + |x|$

Параметр Найдем,  $2x^2 = |x| - a$   
 $a = |x| - 2x^2$   
 для  $x \geq 0$ , то  $f(x) = -2x^2 + x$   $x_1 = \frac{1}{4}$   $y_1 = \frac{1}{8}$   
 для  $x < 0$ , то  $f(x) = -2x^2 - x$   $x_2 = \frac{1}{4}$   $y_2 = \frac{1}{8}$

Итого  $a < 0$  2 ра  
 $a = 0$  3 ра  
 $a > 0$  4 ра  
 $a = \frac{1}{8}$  2 ра  
 $a > \frac{1}{8}$  0 ра

Ответ:  $(0; \frac{1}{8}]$

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получен верный ответ	4
С помощью верного рассуждения получено множество значений $a$ , отличающееся от искомого конечным числом точек	3
С помощью верного рассуждения получены все граничные точки искомого множества значений $a$	2
Верно получена хотя бы одна граничная точка искомого множества значений $a$	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4

Содержание критерия	Баллы
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и обоснованно получен верный ответ в пункте $b$	3
Получен обоснованный ответ в пункте $b$ ИЛИ имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , и при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки	2
Имеется верное доказательство утверждения пункта $a$ , ИЛИ при обоснованном решении пункта $b$ получен неверный ответ из-за арифметической ошибки, ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте $b$ с использованием утверждения пункта $a$ , при этом пункт $a$ не выполнен	1





**19** Вася перемножил несколько различных натуральных чисел из отрезка [23; 84]. Петя увеличил каждое из Васиных чисел на 1 и перемножил все полученные числа.

а) Может ли Петин результат быть ровно вдвое больше Васиного?  
 б) Может ли Петин результат быть ровно в 6 раз больше Васиного?  
 в) В какое наибольшее целое число раз Петин результат может быть больше Васиного?

**ИСТОЧНИКИ**  
 Досрочная волна 2016

а) Вася ~~23 · 24 ... 44 · 45~~  
 Петя ~~24 · 25 ... 45 · 46~~  
 Пусть  $k$  - искоемое отношение  
 $k = \frac{24 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 45 \cdot 46}{23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 44 \cdot 45} = 2$   
 Ответ: а) да.

б) От добавления новых чисел отношение результатов Пети и Васи становится только больше  
 в)  $k \leq \frac{24 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 84 \cdot 85}{23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 83 \cdot 84}$   
 $k \leq 3 \frac{16}{23}$   
 $\Rightarrow$  Петин резу-т не может быть в 6 раз больше Васиного  
 Ответ: б) нет

в)  $k \leq 3 \frac{16}{23}$  (см. п б)  
 Учитывая, что  $k$  - целое, получаем  $k \leq 3$

а) Покажем, что  $k=3$  можно быть  
 Вася 23 · 24 ... 67 · 68  
 Петя 24 · 25 ... 68 · 69  
 $k = \frac{24 \cdot 25 \cdot \dots \cdot 68 \cdot 69}{23 \cdot 24 \cdot \dots \cdot 67 \cdot 68} = 3$   
 Ответ: в) 3.

Содержание критерия	Баллы
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а, б и в	4
Обоснованно получен верный ответ в пункте в и обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	3
Обоснованно получены верные ответы в пунктах а и б ИЛИ обоснованно получен верный ответ в пункте в	2
Обоснованно получен верный ответ в пункте а или б	1
Решение не соответствует ни одному из критериев, перечисленных выше	0
Максимальный балл	4